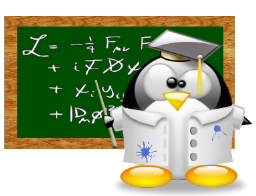
# Géométrie dans l'espace

*Stéphane PASQUET, 22 mars 2015*

## Sommaire





## Prérequis

- Géométrie euclidienne plane
- Produit scalaire dans le plan

**Définition** *Droites parallèles*

Soient $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ deux droites de l'espace.
On dit qu'elles sont `parallèles` si elles vérifient les deux conditions suivantes :

- elles sont coplanaires ;
- elles sont confondues ou n'ont aucun point en commun.

On note alors : $\mathscr{D}//\mathscr{D}'$.

**Remarque**

Dans l'espace, deux droites sans intersection ne sont pas nécessairement parallèles.

**Propriétés** *Propriétés sur les droites*

- Deux droites parallèles à une même droite sont parallèles entre elles.
- Il n'existe qu'une seule droite parallèle à une droite donnée passant par un point extérieur à cette droite.

**Définition** *Droite parallèle à un plan*

Une droite est `parallèle à un plan` si l'intersection des deux est vide.

**Propriétés** *Propriétés sur les plans et les droites*

- Si deux plans non confondus de l'espace ont un point en commun, alors leur intersection est une droite contenant ce point.
- Si une droite est parallèle à un plan, toute droite parallèle à la première est parallèle au plan.
- Il n'existe qu'un seul plan parallèle à un plan donné passant par un point donné.
- Si deux plans sont parallèles à un troisième, alors ils sont parallèles entre eux.

**Théorème**

Si un plan contient deux droites sécantes et parallèles à un autre plan, alors les deux plans sont parallèles.

**Propriété**

Si $\mathscr{D}$ est une droite parallèle à un plan $\mathscr{P}$, alors tout plan $\mathscr{P}'$ contenant $\mathscr{D}$ non parallèle à $\mathscr{P}$ coupe ce dernier en une droite parallèle à $\mathscr{D}$.

**Théorème** *Théorème du toit*

Soient $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ contenant respectivement deux droites parallèles $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$.
Si les deux plans sont sécants, alors leur intersection est une droite parallèle à $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$.

**Propriété**

Si deux plans sont parallèles, tout plan qui coupe l'un coupe l'autre et les droites d'intersection sont parallèles.

**Méthode** *Trouver l'intersection de deux plans*

Pour déterminer l'intersection de deux plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sécants selon une droite $\mathscr{D}$, on peut :

- soit trouver deux points distincts A et B appartenant aux deux plans ; on a alors $\mathscr{D}$ =(AB).
- soit trouver un point A sur les deux plans et une droite $\Delta$ dans un plan, qui est parallèle à l'autre plan.$\mathscr{D}$ est la droite parallèle à $\Delta$ passant par A.
- soit trouver un point A sur les deux plans et une droite $\Delta$ intersection de $\mathscr{P}$ et d'un plan parallèle à $\mathscr{P}'$. $\mathscr{D}$ est la droite parallèle à $\Delta$ passant par A.

**Méthode** *Trouver l'intersection d'une droite et d'un plan*

Pour déterminer l'intersection d'une droite $\mathscr{D}$ et d'un plan $\mathscr{P}$, on peut :

- soit trouver une droite $\Delta$ de $\mathscr{P}$ coplanaire et sécante avec $\mathscr{D}$. Alors, $\mathscr{D} \cap \mathscr{P} = \mathscr{D} \cap \Delta$.
- soit trouver un plan $\mathscr{P}'$ contenant $\mathscr{D}$, puis déterminer l'intersection des plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$. Alors, $\mathscr{D} \cap \mathscr{P} = \mathscr{D} \cap \Delta$. C'est la *méthode du plan auxiliaire*.

Nous allons maintenant aborder la notion de vecteurs dans l'espace. Nous verrons que nous n'allons que généraliser ce que nous avons vu pour les vecteurs du plan.

**Définition** *Vecteurs dans l'espace*

Un vecteur de l'espace est un objet géométrique défini par :

- son sens
- son orientation
- sa norme

**Propriété**

Soient un point A et un vecteur $\vec{u}$ de l'espace.
Il existe un unique point M de l'espace tel que : $\overrightarrow{\mathrm{AM}} = \vec{u}$.

De plus, toutes les règles de calculs valables dans le plan le sont aussi dans l'espace (addition, relation de Chasles, etc.), de même que les règles de colinéarité ou de vecteur directeur de droites.

**Définition** *Vecteurs coplanaires*

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace.
Soit O un point quelconque. On considère alors trois points A, B et C tels que :

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{u} \quad , \quad \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{v} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{w}.$$

Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont dits `coplanaires` si les points O, A, B et C sont coplanaires.

**Propriété**

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires de l'espace.
Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement si il existe deux réels $\lambda$ et $\mu$ tels que :

$$\vec{w} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}.$$

**Propriété**

Soit A un point de l'espace appartenant à un plan $\mathscr{P}$.
Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires de direction respective parallèle à $\mathscr{P}$.
Alors, $\mathscr{P}$ est l'ensemble des points M de l'espace tels que :

$$\overrightarrow{\mathrm{AM}} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v},$$

où $\lambda$ et $\mu$ sont deux nombres réels.
On note alors : $\mathscr{P} = (\mathrm{A}\,;\vec{u}, \vec{v})$.

**Propriété**

Soient A et B deux points de l'espace, et soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires de l'espace.
Alors, les plans $(\mathrm{A}\,;\vec{u}, \vec{v})$ et $(\mathrm{B}\,;\vec{u}, \vec{v})$ sont parallèles.

**Théorème**

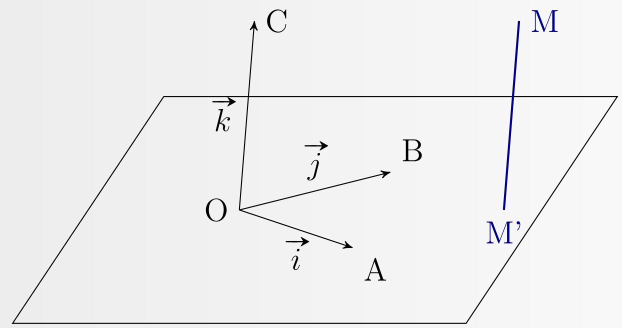
Soient $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ trois vecteurs non coplanaires de l'espace $\mathscr{E}$. Alors,

$$\forall\ \vec{u} \in \mathscr{E},\ \exists\ (x\,;y\,;z) \in \mathbb{R}^3 |\ \vec{u} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}.$$

**Démonstration**

- **Existence.**
  Soient O, A, B, C et M des points de $\mathscr{E}$ tels que $\overrightarrow{\text{OA}} = \vec{i}$, $\overrightarrow{\text{OB}} = \vec{j}$, $\overrightarrow{\text{OC}} = \vec{k}$ et $\overrightarrow{\text{OM}} = \vec{u}$.
  O, A et B définissent un plan car $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ ne sont pas coplanaires. Ainsi, la droite (OC) et le plan (OAB) sont sécants.

  Par conséquent, la parallèle à (OC) passant par M coupe le plan (OAB). Notons M' le point d'intersection.




  M' appartient au plan (OAB) donc les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\overrightarrow{\text{OM'}}$ sont coplanaires ; il existe donc deux réels $x$ et $y$ tels que $\overrightarrow{\text{OM'}} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$.
  De plus, (MM') et (OC) sont parallèles donc les vecteurs $\overrightarrow{\text{MM'}}$ et $\vec{k}$ sont colinéaires. Il existe donc un réel $z$ tel que $\overrightarrow{\text{M'M}} = z\,\vec{k}$.
  On en déduit alors :

$$\vec{u} = \overrightarrow{\text{OM}} = \overrightarrow{\text{OM'}} + \overrightarrow{\text{M'M}} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}.$$

- **Unicité.**
  Supposons qu'il existe deux triplets $(x\,;y\,;z)$ et $(x'\,;y'\,;z')$ tels que :

$$\vec{u} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k} = x'\,\vec{i} + y'\,\vec{j} + z'\,\vec{k}.$$

  Alors,

$$(x - x')\,\vec{i} + (y - y')\,\vec{j} + (z - z')\,\vec{k} = \vec{0}.$$

  Supposons que $z - z' \neq 0$. Alors,

$$\vec{k} = \frac{x - x'}{z' - z}\,\vec{i} + \frac{y - y'}{z' - z}\,\vec{j},$$

  ce qui contredit le fait que les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ ne sont pas coplanaires. On en déduit alors que $z = z'$.
  Avec un raisonnement analogue sur $x$ et $y$, on montre que $x = x'$ et $y = y'$.
  D'où l'unicité du triplet. ■

**Définitions** *Base de l'espace et coordonnées*

Soient $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ trois vecteurs non coplanaires de l'espace. Soit $\vec{u}$ un vecteur quelconque de l'espace.

- On dit que $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ est une `base` de l'espace ;
- Si $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, alors on dit que le triplet $(x\,;y\,;z)$ constitue les `coordonnées` de $\vec{u}$ dans la base $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.
  $x$ est appelé l'`abscisse`, $y$ l'`ordonnée` et $z$ la `côte` de $\vec{u}$.

Les opérations sur les coordonnées ainsi que les règles sont les mêmes que dans le plan (addition, multiplication par un réel, colinéarité, milieu).

**Définition** *Repère de l'espace*

Pour tout point O de l'espace, on dit que $\left(\mathrm{O}\,;\vec{\imath}\,,\vec{\jmath}\,,\vec{k}\right)$ est un `repère de l'espace` si les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ ne sont pas coplanaires.

**Exemple** *Différents calculs dans un repère*

Dans un repère $\left(\mathrm{O}\,;\vec{\imath}\,,\vec{\jmath}\,,\vec{k}\right)$, soient $\mathrm{A}(-1\,;2\,;-3)$, $\mathrm{B}(2\,;-2\,;-1)$ et $\mathrm{C}(0\,;3\,;-2)$.

- $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\,(2-(-1)\,;-2-2\,;-1-(-3))$, soit $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\,(3\,;-4\,;2)$.
- $\overrightarrow{\mathrm{AC}}\,(0-(-1)\,;3-2\,;-2-(-3))$, soit $\overrightarrow{\mathrm{AC}}\,(1\,;1\,;1)$.
- $\overrightarrow{\mathrm{BC}}\,(0-2\,;3-(-2)\,;-2-(-1))$, soit $\overrightarrow{\mathrm{BC}}\,(-2\,;5\,;-1)$.
- Il n'y a pas de triplet proportionnel donc il n'y a pas de vecteur colinéaire. Ainsi, A, B et C forment un plan.
- Le milieu I de [AB] est :

$$\mathrm{I}\left(\frac{-1+2}{2}\,;\frac{2-2}{2}\,;\frac{-3-1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\,;0\,;-2\right).$$

**Définition** *Représentation paramétrique d'un plan*

Soit $\mathrm{A}(x_\mathrm{A}\,;y_\mathrm{A}\,;z_\mathrm{A})$ un point de l'espace, et soient $\vec{u}\,(a\,;b\,;c)$ et $\vec{v}\,(a'\,;b'\,;c')$ deux vecteurs non colinéaires de l'espace.
On dit que le plan $(\mathrm{A}; \vec{u}, \vec{v})$ a pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = x_\mathrm{A} + \lambda a + \mu a' \\ y = y_\mathrm{A} + \lambda b + \mu b' \\ z = z_\mathrm{A} + \lambda c + \mu c' \end{cases} \quad , \quad (\lambda\,;\mu) \in \mathbb{R}^2.$$

**Exemple**

Le plan de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 5 + 2\lambda - 6\mu \\ y = 3 - \lambda + \mu \\ z = -2 + 3\lambda - 5\mu \end{cases} \quad , \quad (\lambda\,;\mu) \in \mathbb{R}^2.$$

caractérise le plan $(\mathrm{A}; \vec{u}, \vec{v})$, où $\mathrm{A}(5\,;3\,;-2)$, $\vec{u}\,(2\,;-1\,;3)$ et $\vec{v}\,(-6\,;1\,;-5)$, car $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

**Définition** *Représentation paramétrique d'une droite*

Soit $\mathrm{A}(x_\mathrm{A}\,;y_\mathrm{A}\,;z_\mathrm{A})$ un point de l'espace, et soit $\vec{u}\,(a\,;b\,;c)$ un vecteur de l'espace.
On dit que le système :

$$\begin{cases} x = x_\mathrm{A} + ka \\ y = y_\mathrm{A} + kb \\ z = z_\mathrm{A} + kc \end{cases} \quad , \quad k \in \mathbb{R}$$

est une représentation paramétrique de la droite de vecteur directeur $\vec{u}$ passant par A.

**Exemple**

Soient $\mathrm{A}(-1\,;1\,;3)$ et $\mathrm{B}(5\,;-2\,;-3)$ deux points d'un repère $\left(\mathrm{O}\,;\vec{\imath}\,,\vec{\jmath}\,,\vec{k}\right)$.
Alors,

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\,(6\,;-3\,;-6)\,.$$

Un vecteur directeur de (AB) peut donc être $\vec{u}\,(-2\,;1\,;2)$.
Par conséquent, une représentation paramétrique de la droite (AB) est :

$$\begin{cases} x = -1 - 2k \\ y = 1 + k \\ z = 3 + 2k \end{cases} \quad , \quad k \in \mathbb{R}$$

**Définitions** *Orthogonalité de droites et de vecteurs de l'espace*

- On dit que deux droites du plan sont `orthogonales` lorsque leurs parallèles respectives passant par un même point sont perpendiculaires.
- On dit que deux vecteurs sont `orthogonaux` lorsque leur support sont orthogonaux.

Deux droites perpendiculaires sont nécessairement coplanaires alors que deux droites orthogonales ne le sont pas forcément.

**Propriété**

- Si deux droites sont orthogonales, alors toute parallèle à l'une est orthogonale à l'autre.
- Si deux droites sont parallèles, alors toute droite orthogonale à l'une est orthogonale à l'autre.

**Définition** *Orthogonalité droite/plan*

Une droite est dite `orthogonale à un plan` si elle est orthogonale à toutes les droites de ce plan.

**Théorème**

Si une droite $\mathscr{D}$ est orthogonale à deux droites sécantes du plan $\mathscr{P}$, alors elle est orthogonale à $\mathscr{P}$.

**Propriétés**

- Si deux droites sont orthogonales à un même plan, alors elles sont parallèles.
- Si deux droites sont parallèles, et si l'une est orthogonale à un plan, alors l'autre l'est aussi.
- Si deux plans sont orthogonaux à une même droite, alors ils sont parallèles.

**Définition** *Plans perpendiculaires*

On dit que deux plans sont `perpendiculaires` si l'un d'eux contient une droite orthogonale à l'autre plan.

**Propriétés**

- Si deux plans sont parallèles, tout plan perpendiculaire à l'un est perpendiculaire à l'autre.
- Si un plan $\mathscr{P}$ est orthogonal à une droite $\mathscr{D}$ et perpendiculaire à un plan $\mathscr{P}'$, alors $\mathscr{D}$ et $\mathscr{P}'$ sont parallèles.

**Définition** *Vecteur normal à un plan*

Soit $\mathscr{P}$ un plan et $\mathscr{D}$ une droite orthogonale à $\mathscr{P}$.
On dit qu'un vecteur $\vec{u}$ est `normal` à $\mathscr{P}$ si $\vec{u}$ est un vecteur directeur de $\mathscr{D}$.

**Définition** *Projeté orthogonal d'un point sur un plan*

Soient $\mathscr{P}$ un plan et M un point de l'espace extérieur à $\mathscr{P}$. Soit alors $\mathscr{D}$ la droite orthogonale à $\mathscr{P}$ passant par M.
On définit le `projeté orthogonal` de M sur $\mathscr{P}$ comme étant le point d'intersection de $\mathscr{D}$ et $\mathscr{P}$.

**Définition** *Projeté orthogonal d'un point sur une droite*

Soient $\mathscr{D}$ une droite de l'espace et M un point de l'espace extérieur à $\mathscr{D}$. Soit alors $\mathscr{P}$ le plan orthogonal à $\mathscr{D}$ passant par M.
On définit le `projeté orthogonal de M` sur $\mathscr{D}$ comme étant le point d'intersection de $\mathscr{P}$ et $\mathscr{D}$.

**Remarque**

Les propriétés valables dans le plan sur les produits scalaires le sont aussi dans l'espace.

**Théorème**

Si une droite est orthogonale à deux droites sécantes d'un même plan, alors elle est orthogonale à ce plan.

**Démonstration**

Soients $\mathscr{D}$ une droite, $\mathscr{P}$ un plan, $\Delta$ et $\Delta'$ deux droites sécantes de $\mathscr{P}$. On suppose que $\mathscr{D}$ et $\Delta$ (resp. $\mathscr{D}$ et $\Delta'$) sont orthogonales. On veut montrer que $\mathscr{D}$ et $\mathscr{P}$ sont orthogonaux, c'est-à-dire que $\mathscr{D}$ est orthogonale à toutes les droites de $\mathscr{P}$.
Considérons une droite $\Delta''$ du plan $\mathscr{P}$.
Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{v}'$ et $\vec{v}''$ sont des vecteurs directeurs de, respectivement, $\mathscr{D}$, $\Delta$, $\Delta'$ et $\Delta''$.
On a donc : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{v'} = 0$.
De plus, les vecteurs $\vec{v}$, $\vec{v'}$ et $\vec{v''}$ sont coplanaires donc il existe deux réels $x$ et $y$ tels que $\vec{v''} = x\vec{v} + y\vec{v'}$. On en déduit :

$$\vec{u} \cdot \vec{v''} = \vec{u} \cdot \left(x\vec{v} + y\vec{v'}\right) = x \times (\vec{u} \cdot \vec{v}) + y \times \left(\vec{u} \cdot \vec{v'}\right) = 0,$$

ce qui prouve que $\Delta''$ est orthogonale à $\mathscr{P}$. ■

**Définition** *Repère orthonormé*

Un repère $\left(\mathrm{O}\,; \vec{\imath}\,, \vec{\jmath}\,, \vec{k}\right)$ est dit `orthonormé` (ou `orthonormal`) si :

$$\vec{\imath} \cdot \vec{\jmath} = \vec{\jmath} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{\imath} = 0 \quad \text{et} \quad \|\vec{\imath}\| = \|\vec{\jmath}\| = \|\vec{k}\| = 1.$$

**Remarque**

Quand la condition $\|\vec{\imath}\| = \|\vec{\jmath}\| = \|\vec{k}\| = 1$ n'est pas satisfaite, on dit que le repère est `orthogonal`.

**Propriété**

Soit $\mathrm{M}(x\,;y\,;z)$ un point dans le repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\vec{\imath}\,,\vec{\jmath}\,,\vec{k}\right)$.
Alors,

$$\mathrm{OM} = \sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

**Propriété**

Dans le repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\vec{\imath}\,,\vec{\jmath}\,,\vec{k}\right)$, soient $\mathrm{A}(x_\mathrm{A}\,;y_\mathrm{A}\,;z_\mathrm{A})$ et $\mathrm{B}(x_\mathrm{B}\,;y_\mathrm{B}\,;z_\mathrm{B})$.
Alors,

$$\|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\| = \sqrt{\left(x_\mathrm{B}-x_\mathrm{A}\right)^2+\left(y_\mathrm{B}-y_\mathrm{A}\right)^2+\left(z_\mathrm{B}-z_\mathrm{A}\right)^2}.$$

Ces deux dernières propriétés se démontrent à l'aide du théorème de Pythagore.

**Propriété**

Dans le repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\vec{\imath}\,,\vec{\jmath}\,,\vec{k}\right)$, soient $\vec{u}\,(x\,;y\,;z)$ et $\vec{v}\,(x'\,;y'\,;z')$.
Alors,

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = xx'+yy'+zz'.$$

**Démonstration**

On a :

$$\begin{aligned}\vec{u}\cdot\vec{v} &= \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)\\ &= \frac{1}{2}\left[\left(x^2+y^2+z^2\right)+\left(x'^2+y'^2+z'^2\right)-\left((x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2\right)\right]\\ &= xx'+yy'+zz'.\end{aligned}$$

■

**Propriété**

Soient $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ deux plans de vecteurs normaux respectifs $\vec{n}$ et $\vec{n'}$.
Alors,

$$\mathscr{P}\perp\mathscr{P}' \iff \vec{n}\cdot\vec{n'} = 0.$$

**Propriété**

*Équation cartésienne d'un plan*

Dans un repère $\left(\mathrm{O}\,;\vec{\imath}\,,\vec{\jmath}\,,\vec{k}\right)$,

- Tout plan $\mathscr{P}$ de vecteur normal $\vec{n}\,(a\,;b\,;c)$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$, admet pour équation cartésienne :
$$\mathscr{P} : ax + by + cz + d = 0.$$
- Réciproquement, l'ensemble des points $\mathrm{M}(x\,;y\,;z)$ tels que $ax+by+cz+d = 0$, avec $a \neq 0$, $b \neq 0$ et $c \neq 0$, est un plan de vecteur normal $\vec{n}\,(a\,;b\,;c)$.

**Exemple**

Le plan d'équation $3x - 5y + 2z - 1 = 0$ est un plan de vecteur normal $\vec{n}\,(3\,;-5\,;2)$.

**Méthode**

*Détermination d'une représentation paramétrique de l'intersection de 2 plans*

On considère les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ d'équations respectives :

$$\begin{aligned} \mathscr{P} &: 2x + 3y - z + 5 = 0 \\ \mathscr{P}' &: x + y + 1 = 0 \end{aligned}$$

Nous souhaitons déterminer une représentation paramétrique de l'intersection de ces deux plans si elle existe.
Pour cela, on « résout » le système suivant, en conservant une inconnue et en la considérant comme un paramètre (ici, $z$) :

$$\begin{aligned} \begin{cases} 2x + 3y - z = -5 \\ x + y = -1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y = z - 5 \\ 2x + 2y = -2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = z - 3 \\ x = -1 - (z - 3) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = z - 3 \\ x = -z + 2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -t + 2 \\ y = t - 3 \\ z = t \end{cases} , \quad t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

L'intersection des deux plans existe et est la droite passant par le point $\mathrm{A}(2\,;-3\,;0)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\,(-1\,;1\,;1)$.

**Méthode** *Intersection d'une droite et d'un plan*

On considère le plan $\mathscr{P}$ d'équation :

$$5x + y - z + 3 = 0$$

et la droite $\mathscr{D}$ passant par $\mathrm{A}(0\,;1\,;3)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\,(1\,;0\,;3)$.

1. **On vérifie d'abord que $\mathscr{P}$ et $\mathscr{D}$ se coupent en un point.**
   Un vecteur normal à $\mathscr{P}$ est $\vec{n}\,(5\,;1\,;-1)$ ; donc, $\vec{u}\cdot\vec{n} = 5\times 1 + 1\times 0 + (-1)\times 3 = 2 \neq 0$ donc $\mathscr{D}$ n'est pas parallèle à $\mathscr{P}$ : il y a donc un point unique d'intersection.
   Appelons-le I.

2. **Déterminons les coordonnées de I.**
   La représentation paramétrique de $\mathscr{D}$ est :

$$\begin{cases} x = t \\ y = 1 \\ z = 3 + 3t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

   Étant donné que I appartient à $\mathscr{D}$, il existe un réel $k$ tel que $\mathrm{I}(k\,;1\,;3k+3)$.

   En substituant les valeurs de $x$, $y$ et $z$ en fonction de $k$ dans l'équation cartésienne de $\mathscr{P}$, on a :

$$\begin{aligned} & 5k + 1 - (3 + 3k) + 3 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & 2k + 1 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & k = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

   Finalement, on a : $\mathrm{I}\left(-\frac{1}{2}\,;1\,;\frac{3}{2}\right)$.

**Propriété** *Distance d'un point à un plan*

L'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}\,;\vec{\imath}\,,\vec{\jmath}\,,\vec{k}\right)$.
Soit $\mathscr{P}$ un plan d'équation cartésienne :

$$\mathscr{P}\ :\ ax + by + cz + d = 0$$

et soit $\mathrm{A}(x_\mathrm{A}\,;y_\mathrm{A}\,;z_\mathrm{A})$ un point quelconque de l'espace.
La distance du point A au plan $\mathscr{P}$ est :

$$d\,(\mathrm{A}\,;\ \mathscr{P}) = \frac{|ax_\mathrm{A} + by_\mathrm{A} + cz_\mathrm{A} + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

**Démonstration**

Notons M le projeté orthogonal de A sur $\mathscr{P}$. Alors, (AM) est orthogonale à $\mathscr{P}$, donc admet pour vecteur directeur un vecteur normal à ce plan, soit $\vec{u}\,(a\,;b\,;c)$ et donc (AM) a pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = x_{\mathrm{A}} + at \\ y = y_{\mathrm{A}} + bt \\ z = z_{\mathrm{A}} + ct \end{cases} \quad , \qquad t \in \mathbb{R}.$$

M étant le point d'intersection de cette droite et de $\mathscr{P}$, on a :

$$a\,(x_{\mathrm{A}} + at) + b\,(y_{\mathrm{A}} + bt) + c\,(z_{\mathrm{A}} + ct) + d = 0\ ,$$

soit :

$$t = -\frac{ax_{\mathrm{A}} + by_{\mathrm{A}} + cz_{\mathrm{A}} + d}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

On a alors :

$$\mathrm{AM}^2 = (x_{\mathrm{M}} - x_{\mathrm{A}})^2 + (y_{\mathrm{M}} - y_{\mathrm{A}})^2 + (z_{\mathrm{M}} - z_{\mathrm{A}})^2$$

$$\mathrm{AM}^2 = \left(-a\frac{ax_{\mathrm{A}} + by_{\mathrm{A}} + cz_{\mathrm{A}} + d}{a^2 + b^2 + c^2}\right)^2 + \left(-b\frac{ax_{\mathrm{A}} + by_{\mathrm{A}} + cz_{\mathrm{A}} + d}{a^2 + b^2 + c^2}\right)^2 + \left(-c\frac{ax_{\mathrm{A}} + by_{\mathrm{A}} + cz_{\mathrm{A}} + d}{a^2 + b^2 + c^2}\right)^2$$

$$\mathrm{AM}^2 = \left(a^2 + b^2 + c^2\right)\frac{\left(ax_{\mathrm{A}} + by_{\mathrm{A}} + cz_{\mathrm{A}} + d\right)^2}{\left(a^2 + b^2 + c^2\right)^2}$$

$$\mathrm{AM}^2 = \frac{\left(ax_{\mathrm{A}} + by_{\mathrm{A}} + cz_{\mathrm{A}} + d\right)^2}{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$\mathrm{AM} = \frac{|ax_{\mathrm{A}} + by_{\mathrm{A}} + cz_{\mathrm{A}} + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

■