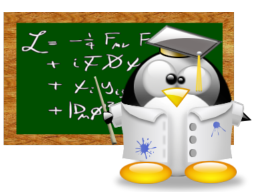
Sommaire



Prérequis

- Intégration
- Fonction exponentielle
- Conditionnement et indépendance

Définition *Variable aléatoire discrète*

On considère une expérience aléatoire sur un univers Ω **fini**.
Une `variable aléatoire X` est une application de Ω dans $\mathbb{R}$ qui, à chaque issue, associe un nombre réel.

Exemple

Si l'on considère l'expérience aléatoire consistant à jeter un dé cubique non truqué, et si X est la variable aléatoire représentant l'ensemble des issues possibles, alors $\mathrm{X} = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

$$\begin{aligned} \mathrm{X} : \Omega &\to [\![1\,;6]\!] \\ \omega &\mapsto \mathrm{X}(\omega) \end{aligned}$$

Définition *Loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète*

Soit $\mathrm{X} : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire.
La `loi de probabilité de X` est la donnée :

1. Des valeurs possibles $\{x_1; x_2; \ldots; x_n\}$ prises par X ;
2. Des probabilités $\mathrm{P}(\mathrm{X} = x_i)$, pour i variant de 1 à n, de sorte que :

$$\sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(\mathrm{X} = x_i) = 1.$$

En général, on donne la loi de probabilité de X sous forme de tableau.

Exemple

Dans le cas de l'exemple précédent (du dé cubique), la loi de probabilité de X est :

x_i	1	2	3	4	5	6
$\mathrm{P}(\mathrm{X} = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Définition *Espérance mathématique d'une variable aléatoire discrète*

Soit $\mathrm{X} = \{x_1; x_2; \ldots; x_n\}$ une variable aléatoire. On note, pour i variant de 1 à n, $p_i = \mathrm{P}(\mathrm{X} = x_i)$.
On définit l'`espérance mathématique` de X par :

$$\mathbb{E}(\mathrm{X}) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i\ .$$

Exemple

Dans notre exemple précédent,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\mathrm{X}) &= 1\times\frac{1}{6}+2\times\frac{1}{6}+3\times\frac{1}{6}+4\times\frac{1}{6}+5\times\frac{1}{6}+6\times\frac{1}{6}\\ &= (1+2+3+4+5+6)\times\frac{1}{6}\\ &= \frac{21}{6}\end{aligned}$$

Définition *Densité de probabilité*

Une fonction $f\ :\ I=[a\,;b]\to\mathbb{R}$ est une `densité de probabilité` si :

1. f est continue sur I ;
2. $\forall\, x\in I,\ f(x)\geqslant 0$;
3. $\displaystyle\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = 1.$

Exemples

1. $f : [0\,;1] \to \mathbb{R}$ est une loi de densité.
   $x \mapsto 1$
2. $f : [0\,;+\infty[\to \mathbb{R}$ est une loi de densité.
   $x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$

Définition *Loi de probabilité à densité*

Soit X une variable aléatoire.
On dit que `X est à densité f sur I` si :

1. f est une loi de densité ;
2. $\forall\, J\subseteq I,\ \mathrm{P}(\mathrm{X}\in J)=\displaystyle\int_J f(x)\ \mathrm{d}x.$

Exemple

On considère une variable aléatoire X à densité f sur $[0\,;+\infty[$, où $f(x)=\mathrm{e}^{-x}$.
f est une loi de densité (vu dans l'exemple précédent) et donc :

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\mathrm{X}\in[1\,;2]) &= \int_1^2 \mathrm{e}^{-x}\ \mathrm{d}x\\ &= \left[-\mathrm{e}^{-x}\right]_1^2\\ &= \mathrm{e}^{-1}-\mathrm{e}^{-2}.\end{aligned}$$

Propriété *Union d'intervalles (Admise)*

Soit X une variable aléatoire à densité f sur I.
Soient alors J et J' deux intervalles disjoints inclus dans I. Alors,

$$\mathrm{P}\left(\mathrm{X} \in \mathrm{J} \cup \mathrm{J'}\right) = \mathrm{P}\left(\mathrm{X} \in \mathrm{J}\right) + \mathrm{P}\left(\mathrm{X} \in \mathrm{J'}\right).$$

Propriétés

Soit X une variable aléatoire à densité f sur I.

1. $\forall \alpha \in \mathrm{I},\ \mathrm{P}\left(\mathrm{X} = \alpha\right) = 0$;
2. $\forall\ (c\,;d) \in \mathrm{I} \times \mathrm{I},\ \mathrm{P}\left(c \leqslant \mathrm{X} \leqslant d\right) = \mathrm{P}\left(c < \mathrm{X} \leqslant d\right) = \mathrm{P}\left(c \leqslant \mathrm{X} < d\right) = \mathrm{P}\left(c < \mathrm{X} < d\right)$.
3. $\forall\ \mathrm{J} \subseteq \mathrm{I},\ \mathrm{P}\left(\mathrm{X} \in \overline{\mathrm{J}}\right) = 1 - \mathrm{P}\left(\mathrm{X} \in \mathrm{J}\right)$.

Démonstration

1. Par définition, $\mathrm{P}\left(\mathrm{X} = \alpha\right) = \displaystyle\int_{\alpha}^{\alpha} f(x)\ \mathrm{d}x = 0$.
2. Le passage des inégalités larges aux inégalités strictes découlent de la propriété précédente.
3. On a $\mathrm{P}\left(\mathrm{X} \in \mathrm{I}\right) = 1$, donc $\mathrm{P}\left(\mathrm{X} \in \mathrm{J} \cup \overline{\mathrm{J}'}\right) = 1$, et ainsi $\mathrm{P}\left(\mathrm{X} \in \mathrm{J}\right) + \mathrm{P}\left(\mathrm{X} \in \overline{\mathrm{J}'}\right) = 1$, d'où le résultat. ∎

Définition *Probabilités conditionnelles*

Soit X une variable aléatoire à densité f sur I.
Soit I' un intervalle de I tel que $\mathrm{P}\left(\mathrm{X} \in \mathrm{I}'\right) \neq 0$.
On définit la probabilité conditionnelle $\mathrm{P}_{(\mathrm{X} \in \mathrm{I'})}\left(\mathrm{X} \in \mathrm{J}\right)$ par :

$$\mathrm{P}_{(\mathrm{X} \in \mathrm{I'})}\left(\mathrm{X} \in \mathrm{J}\right) = \frac{\mathrm{P}\left(\mathrm{X} \in (\mathrm{J} \cap \mathrm{I'})\right)}{\mathrm{P}\left(\mathrm{X} \in \mathrm{I'}\right)}.$$

Exemple

Soit X une variable aléatoire à densité f sur $[0\,;+\infty[$, où $f(x) = \mathrm{e}^{-x}$. Alors,

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}_{(\mathrm{X} \in [3\,;10])}\left(\mathrm{X} \in [0\,;5]\right) &= \frac{\mathrm{P}\left(\mathrm{X} \in [3\,;5]\right)}{\mathrm{P}\left(\mathrm{X} \in [3\,;10]\right)} \qquad \text{car } [0\,;5] \cap [3\,;10] = [3\,;5] \\
&= \frac{\left[-\mathrm{e}^{-x}\right]_3^5}{\left[-\mathrm{e}^{-x}\right]_3^{10}} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{-3} - \mathrm{e}^{-5}}{\mathrm{e}{-3} - \mathrm{e}^{-10}} \\
&\approx 0{,}865\,453\,908\,575.
\end{aligned}$$

Définition *Espérance d'une variable à densité*

Soit X une variable aléatoire à densité f sur $\mathrm{I} = [a\,;b]$.
On définit l'`espérance mathématique de X` par :

$$\mathbb{E}(\mathrm{X}) = \int_a^b x f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Définition *Loi uniforme sur $[a\,;b]$*

Soit X une variable aléatoire à densité f sur I.

On dit que `X suit la loi uniforme` si $f(x) = \dfrac{1}{b-a}$ et $\mathrm{I} = [a\,;b]$.

Propriété

Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $\mathrm{I} = [a\,;b]$.
Alors,

$$\forall\,(c\,;d) \in \mathrm{I} \times \mathrm{I},\ \mathrm{P}\left(\mathrm{X} \in [c\,;d]\right) = \frac{d-c}{b-a}\,.$$

Démonstration

f est continue et à valeurs positives sur I. De plus :

$$\begin{aligned}\int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_c^d \frac{1}{b-a}\,\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{x}{b-a}\right]_c^d \\ &= \frac{c}{b-a} - \frac{d}{b-a}.\end{aligned}$$

On arrive alors au résultat souhaité. ■

Exemple

On choisit au hasard un nombre entre 0 et 1. La probabilité qu'il soit compris entre 0,3 et 0,4 est :

$$\mathrm{P}\left(\mathrm{X} \in [0,3\,;0,4]\right) = 0,4 - 0,3 = 0,1.$$

Propriété *Espérance mathématique d'une loi uniforme*

Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $\mathrm{I} = [a\,;b]$.
Alors, son espérance est :

$$\mathbb{E}(\mathrm{X}) = \frac{a+b}{2}.$$

Démonstration

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \int_a^b \frac{x}{b-a}\,\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{x^2}{2(b-a)}\right]_a^b \\ &= \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} \\ &= \frac{(b-a)(b+a)}{2(b-a)} \\ &= \frac{a+b}{2}\end{aligned}$$

On a alors le résultat souhaité. ■

Définition *Loi exponentielle*

Soit X une variable aléatoire à densité f sur I.
On dit que X suit la loi exponentielle de paramètre $\boldsymbol{\lambda}$ si $f(x) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}$ et $\mathrm{I} = [0\,;+\infty[$.

Propriété

Soit X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ sur $\mathrm{I} = [0\,;+\infty[$.
Alors,

$$\forall\ (c\,;d) \in \mathrm{I}\times\mathrm{I},\ \mathrm{P}\left(\mathrm{X}\in[c\,;d]\right) = \mathrm{e}^{-\lambda c} - \mathrm{e}^{-\lambda d}.$$

Démonstration

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\left(\mathrm{X}\in[c\,;d]\right) &= \int_c^d \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x \\ &= \left[-\mathrm{e}^{-\lambda x}\right]_c^d \\ &= -\mathrm{e}^{-\lambda d} + \mathrm{e}^{-\lambda c}.\end{aligned}$$

On a alors le résultat annoncé. ■

Remarque

On en déduit que pour $a > 0$,

$$\mathrm{P}\left(\mathrm{X}\geqslant a\right) = \mathrm{e}^{-\lambda a} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{P}\left(\mathrm{X}\leqslant a\right) = 1-\mathrm{e}^{-\lambda a}.$$

Propriété

Espérance mathématique d'une loi exponentielle

Soit X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda \neq 0$ sur $\mathrm{I} = [0\,;+\infty[$.
Alors,

$$\mathbb{E}(\mathrm{X}) = \frac{1}{\lambda}.$$

Démonstration

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\mathrm{X}) &= \lim_{t\to+\infty} \int_0^t \lambda x \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x \\
&= \lim_{t\to+\infty} \left[\left(-x-\frac{1}{\lambda}\right)\mathrm{e}^{-\lambda x}\right]_0^t \qquad \text{(Intégration par parties)} \\
&= \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{\lambda}\left(1-\mathrm{e}^{-\lambda t}-\lambda t\mathrm{e}^{-\lambda t}\right)
\end{aligned}$$

D'où le résultat annoncé. ■

Propriété

Durée de vie sans vieillissement

Soit X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda \neq 0$ sur $\mathrm{I} = [0\,;+\infty[$.
Alors, pour tous réels t et h,

$$\mathrm{P}_{(\mathrm{X}\geqslant \mathrm{t})}(\mathrm{X} \geqslant \mathrm{t}+\mathrm{h}) = \mathrm{P}(\mathrm{X} \geqslant h).$$

Démonstration

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}_{(\mathrm{X}\geqslant \mathrm{t})}(\mathrm{X} \geqslant \mathrm{t}+\mathrm{h}) &= \frac{\mathrm{P}((\mathrm{X}\geqslant t+h)\cap(\mathrm{X}\geqslant t))}{\mathrm{P}(\mathrm{X}\geqslant t)} \\
&= \frac{\mathrm{P}(\mathrm{X}\geqslant t+h)}{\mathrm{P}(\mathrm{X}\geqslant t)} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{-\lambda(t+h)}}{\mathrm{e}^{-\lambda t}} \\
&= \mathrm{e}^{-\lambda h} \\
&= \mathrm{P}(\mathrm{X}\geqslant h).
\end{aligned}$$

On a alors le résultat souhaité. ■

Exemple

Un appareil électronique a une durée de vie représentée par une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,03$.
La probabilité qu'il fonctionne plus de 5 ans sachant qu'il a déja fonctionné pendant un an est :

$$\mathrm{P}_{(\mathrm{X} \geqslant 1)}(\mathrm{X} \geqslant 1 + 4) = \mathrm{e}^{-0{,}03 \times 4} \approx 0{,}886\,920\,437.$$

On peut donc s'interroger sur l'utilité de prendre une extension de garantie sur 5 ans sur un appareil dont la garantie initiale est sur un an. En effet, si l'appareil est en bon état de fonctionner au bout d'un an, il le sera 4 années avec une probabilité de 0,9.