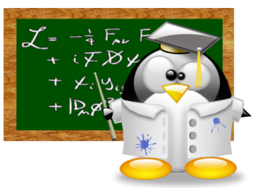
Stéphane PASQUET, 22 mars 2015

Sommaire



Prérequis

- Calculs matriciels (of course !)
- Probabilités et variables aléatoires discrètes
- Raisonnement par récurrence

À travers plusieurs exemples, nous allons introduire diverses notions dans lesquelles le calcul matriciel a son importance.

Exemple

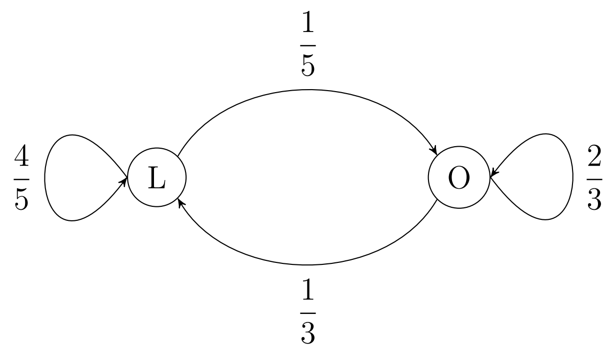
Marche aléatoire et graphe probabiliste

Valentin est un adolescent comme tant d'autres ... Dans sa chambre, il est soit sur son lit, soit devant son ordinateur (sur son bureau).

S'il est sur son lit, la probabilité qu'il y soit encore une minute plus tard est égale à $\frac{4}{5}$.

S'il est devant son ordinateur, la probabilité pour qu'il y soit encore une minute plus tard est égale à $\frac{2}{3}$.

Pour schématiser cette situation, on fait appel à un `graphe probabiliste`. En convenant de noter L pour « il est sur son lit » et O pour « il est devant son ordinateur », on a :



« L » et « O » sont appelés les `sommet` du graphe.

En convenant que L est le 1er sommet, la matrice du graphe, ou `matrice de transition` est :

$$A = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

On appellera `état initial du graphe` le vecteur ligne X_0 nous informant du lieu où Valentin se trouve au début de notre observation (par exemple, s'il est sur son lit, alors $X_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Propriété

Soit un graphe de matrice de transition A et d'état initial $X_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Alors, l'état du graphe après n observations sera :

$$X_n = X_0 A^n$$

Ouvrons maintenant le logiciel gratuit `XCAS`, puis tapons les lignes suivantes :

```
A:=[[4/5,1/5],[1/3,2/3]];
```

$$\begin{bmatrix} \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

```
P:=egv(A);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

```
D:=inv(P)*A*P;
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{7}{15} \end{bmatrix}$$

```
Q:=inv(P);
```

$$\begin{bmatrix} \frac{5}{8} & \frac{3}{8} \\ -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{bmatrix}$$

La première commande définit notre matrice de transition ;
La seconde et la troisième calculent les matrices P et D telles que :

$$A = PDP^{-1}$$

où D est une matrice diagonale.
La dernière affiche la matrice inverse de P.

On peut ainsi écrire que, pour tout entier naturel n,

$$A^n = PD^nP^{-1}$$

pour ensuite calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} A^n$. En effet,

$$\lim_{n\to+\infty} D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{car } \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{7}{15}\right)^n = 0.$$

Donc,

$$\lim_{n\to+\infty} X_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{5}{8} & \frac{3}{8} \\ -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}$$

Définition *État d'équilibre d'un graphe (résultat asymptotique)*

Lorsque $\lim\limits_{n\to+\infty} X_n$ existe, il est appelé l'`état d'équilibre` du graphe, ou `résultat asymptotique` pour la marche aléatoire.

Remarque

La matrice d'un graphe probabiliste est de la forme :

$$A = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1-q & q \end{pmatrix}$$

Avec p et q deux probabilités.
Or, A est inversible si et seulement si :

$$\begin{aligned} pq-(1-p)(1-q) \neq 0 &\Leftrightarrow pq-(1-p-q+pq) \\ &\Leftrightarrow p+q-1 \end{aligned}$$

Ainsi, A est inversible quand $p+q \neq 1$.

Exemple

Suite de matrices colonnes

On considère les deux suites (u_n) et (v_n) telles que :

$$\begin{cases} u_0 = a \\ v_0 = b \end{cases} \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{u_n+v_n}{2} \\ v_{n+1} = \dfrac{u_n-v_n}{2} \end{cases}$$

L'objectif est d'étudier ces deux suites à l'aide des matrices.

Pour cela, on va poser :

$$V_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} \quad ; \quad A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Ainsi, on a :

$$V_0 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad ; \quad V_{n+1} = AV_n$$

On en déduit alors :

$$V_n = A^n V_0.$$

Il ne nous reste plus qu'à trouver une expression de A^n.
On peut remarquer dans un premier temps, à l'aide de XCAS par exemple, que :

$$\forall p \in \mathbb{N},\ A^{2p} = \frac{1}{2^p} I_2$$

et donc :

$$\forall p \in \mathbb{N},\ A^{2p+1} = \frac{1}{2^{p+1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, pour tout entier naturel p,

$$V_{2p} = \frac{1}{2^p}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \qquad ; \qquad V_{2p+1} = \frac{1}{2^{p+1}}\begin{pmatrix} a+b \\ a-b \end{pmatrix}$$

Abordons maintenant le cas général.

Propriété

Système linéaire de suites récurrentes avec second membre

Soient les suites (u_n) et (v_n) définies par leur premier terme respectif u_0 et v_0 et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = au_n + bv_n + p \\ v_{n+1} = cu_n + dv_n + q \end{cases} \qquad , \qquad (a,b,c,d,p,q) \in \mathbb{R}^6$$

On pose alors :

$$X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} \quad , \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \quad , \quad I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Alors, l'écriture matricielle du système linéaire de suites récurrentes s'écrit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_{n+1} = AX_n + B. \tag{1}$$

De plus, si $(I_2 - A)$ est inversible alors,

$$C = (I_2 - A)^{-1}B$$

est l'unique suite constante vérifiant la relation (1) d'inconnue X_n.
Alors, pour tout entier naturel n, la suite $U_n = X_n - C_n$ vérifie la relation de récurrence $U_{n+1} = AU_n$ et donc :

$$X_n = A^n (X_0 - C) + C.$$

Démonstration

- **Commençons d'abord par vérifier que C est l'unique suite constante vérifiant la relation (1).**
  Posons alors $X_n = C$ une suite constante dans (1) et supposons que $(I_2 - A)$ est inversible :

$$\begin{aligned} & C = AC + B \\ \Leftrightarrow\ & I_2C - AC = B \\ \Leftrightarrow\ & (I_2 - A)C = B \\ \Leftrightarrow\ & C = (I_2 - A)^{-1}B. \end{aligned}$$

  Ainsi, $C = (I_2 - A)^{-1}B$ est l'unique solution à la relation (1).

Démonstration (suite)

- **Montrons à présent que $\boldsymbol{U_n = X_n - C}$ vérifie la relation de récurrence $\boldsymbol{U_{n+1} = AU_n}$.**
  Pour cela, calculons :

$$\begin{aligned} U_{n+1} &= X_{n+1} - C \\ &= AX_n + B - C \\ &= AX_n + B - (AC + B) \\ &= AX_n - AC \\ &= A(X_n - C) \\ &= AU_n \end{aligned}$$

- **Montrons maintenant que $\boldsymbol{U_n = A^n U_0}$.**
  Pour cela, raisonnons par récurrence sur n.
  - $\rightarrow$ **Initialisation.**
    Nous avons : $A^0 U_0 = I_2 U_0 = U_0$. Donc la relation est vraie au premier rang.
  - $\rightarrow$ **Hérédité.**
    Supposons la relation vraie pour un entier naturel k : $U_k = A^k U_0$.
    Alors, d'après la relation démontrée au point précédent :

$$\begin{aligned} A_{k+1} &= AU_k \\ &= AA^k U_0 \\ &= A^{k+1} U_0 \end{aligned}$$

    L'hérédité est alors vérifiée.
    Par conséquent, la relation de récurrence est vraie pour tout entier naturel n.

- **Montrons le résultat final.**
  Pour tout entier naturel n, on a :

$$\begin{aligned} U_n = X_n - C_n \Leftrightarrow X_n &= U_n + C_n \\ &= A^n U_0 + (I_2 - A)^{-1} B. \end{aligned}$$

Exemple

Considérons les deux suites (u_n) et (v_n) telles que $u_0 = v_0 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = -8u_n - 6v_n + 1 \\ v_{n+1} = 9u_n + 13v_n - 1 \end{cases}$$

...

Exemple (suite)

D'après la propriété précédente,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_n = \begin{pmatrix} -8 & -6 \\ 9 & 13 \end{pmatrix}^n \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 & 6 \\ -9 & -12 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right] + \begin{pmatrix} 9 & 6 \\ -9 & -12 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

À l'aide de XCAS, on trouve

$$\begin{pmatrix} -8 & -6 \\ 9 & 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{pmatrix} 9 & 6 \\ -9 & -12 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{9} & \frac{1}{9} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

Donc,

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 & 6 \\ -9 & -12 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{9} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{9} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \quad X_n &= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-5)^n & 0 \\ 0 & 10^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{8}{9} \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2}{9} & \frac{1}{9} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2(-5)^n & -10^n \\ -(-5)^n & 3 \times 10^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{8}{9} \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{9} \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{6}{5}(-5)^n - \frac{1}{5} \times 10^n & \frac{2}{5}(-5)^n - \frac{2}{5} \times 10^n \\ -\frac{3}{5}(-5)^n + \frac{3}{5} \times 10^n & -\frac{1}{5}(-5)^n + \frac{6}{5} \times 10^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{8}{9} \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{9} \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{22}{5}(-5)^n - \frac{26}{45} \times 10^n + \frac{1}{9} \\ -\frac{11}{15}(-5)^n + \frac{26}{15} \times 10^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On en conclut alors que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \begin{cases} u_n = \frac{22}{5}(-5)^n - \frac{26}{45} \times 10^n + \frac{1}{9} \\ v_n = -\frac{11}{15}(-5)^n + \frac{26}{15} \times 10^n \end{cases}$$

Remarque

On pourra toujours trouver les solutions d'un système linéaire de suites récurrentes du type $X_{n+1} = AX_n + B$ si A peut se mettre :

- soit sous la forme $A = PDP^{-1}$, où D est une matrice diagonale,
- soit sous la forme $A = aI_2 + bN$, où $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ou $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Définition *Modèle d'Ehrenfest*

Considérons 2 boîtes B_1 et B_2 séparées par une paroi trouée, B_1 étant rempli de N particules de gaz et B_2 étant vide.
À chaque étape, un certains nombre de particules peut passer d'une boîte à l'autre.
Le modèle d'Ehrenfest permet d'étudier la proportion de particules à l'étape n, n étant un entier naturel.

Pour se donner une idée des démarches à suivre pour modéliser la répartition des particules, prenons d'abord $N = 2$.

Alors, à chaque étape, l'une des trois répartitions suivantes uniquement est envisageable :

- Répartition r_1 : 2 particules dans B_1 ;
- Répartition r_2 : 1 particule dans B_1 et B_2 ;
- Répartition r_3 : 2 particules dans B_2.

Notons alors pour $i \in [\![1\,;3]\!]$:

- R_i l'événement : « la répartition est r_i »

En convenant de noter, pour $(i\,;j) \in [\![1\,;3]\!] \times [\![1\,;3]\!]$, $p_{ij} = \mathrm{P}_{\mathrm{R_i}}(\mathrm{R_j})$, on a :

$$p_{12} = p_{32} = 1 \quad ; \quad p_{21} = p_{23} = \frac{1}{2} \quad ; \quad p_{11} = p_{22} = p_{33} = p13 = p31 = 0$$

D'où la matrice de transition suivante :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Alors, en convenant de noter V_n la matrice ligne représentant la répartition des particules, $V_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, on, a :

$$V_1 = V_0 P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et plus généralement,

$$V_n = V_{n-1}P = V_0 P^n$$

Ainsi,

$$V_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

En raisonnant par récurrence, on pourrait démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P^{2n} = P^2 \qquad \text{et} \qquad P^{2n+1} = P.$$

Donc, si $k \in \mathbb{N}^*$, $V_{2k} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, ce qui signifie que la répartition est soit r_1, soit $r3$ pour un instant pair, et $V_{2k+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, ce qui signifie que la répartition est r_2 pour un instant impair.

En notant X_n le nombre de particules dans la boîte B_1 à l'instant $n > 0$, on a :

- Si $n = 2k$, $\mathbb{E}\left(\mathrm{X}_n\right) = 2 \times \frac{1}{2} + 1 \times 0 + 0 \times \frac{1}{2} = 1$;

- Si $n = 2k+1$, $\mathbb{E}\left(\mathrm{X}_n\right) = 2 \times 0 + 1 \times 1 + 0 \times 0 = 1$.

Ceci signifie que le nombre moyen de particules dans chaque boîte tend à s'équilibrer.

Penchons-nous maintenant sur le nombre d'étapes moyen nécessaires pour revenir à l'état initial. Notons alors T_p, avec $N = 2p$ particules, $p \in \mathbb{N}^*$, la variable aléatoire représentant ce nombre. D'après ce qui a été fait, on peut dire :

- $\mathrm{P}\left(\mathrm{T_p} = 1\right) = \mathrm{P}\left(\mathrm{T_p} = 3\right) = 0$ et pour tout entier naturel k, $\mathrm{P}\left(\mathrm{T_p} = 2k+1\right) = 0$;
- $\mathrm{P}\left(\mathrm{T_p} = 2\right) = \dfrac{1}{2}$, $\mathrm{P}\left(\mathrm{T_p} = 4\right) = \dfrac{1}{4}$ et pour tout entier naturel non nul k, $\mathrm{P}\left(\mathrm{T_p} = 2k\right) = \dfrac{1}{2^k}$.

L'espérance de T_p est donc :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\mathrm{T}_p\right) &= \sum_{k=1}^{2p} k\mathrm{P}\left(\mathrm{T_p} = k\right) \\
&= \sum_{k=1}^{p} \mathrm{P}\left(\mathrm{T_p} = 2k\right) \\
&= \sum_{k=1}^{p} \frac{k}{2^{k-1}}
\end{aligned}$$

Posons :

$$\forall x \neq 1, \qquad f(x) = \sum_{k=1}^{p} x^k = \sum_{k=0}^{p} x^k - 1.$$

Alors,

$$\forall x \neq 1, \qquad f'(x) = \sum_{k=1}^{p} kx^{k-1}.$$

Or,

$$\sum_{k=0}^{p} x^k = \frac{x^{p+1}-1}{x-1} \quad \text{(penser aux suites géométriques)}$$

donc :

$$f(x) = \frac{x^{p+1}-1}{x-1} - 1$$

et :

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{(p+1)x^p(x-1) - (x^{p+1}-1)}{(x-1)^2} \\
&= \frac{px^{p+1} - (p+1)x^p + 1}{(x-1)^2}
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\sum_{k=1}^{p} kx^{k-1} = \frac{px^{p+1} - (p+1)x^p + 1}{(x-1)^2}.$$

En prenant $x = \dfrac{1}{2}$, cela donne :

$$\sum_{k=1}^{p} \frac{k}{2^{k-1}} = \frac{\frac{p}{2^{p+1}} - \frac{p+1}{2^p} + 1}{\frac{1}{4}}$$

D'où :

$$\lim_{p \to +\infty} \mathbb{E}\left(\mathrm{T}_p\right) = 4,$$

ce qui signifie qu'en moyenne, 4 étapes sont nécessaires pour revenir à l'état initial.