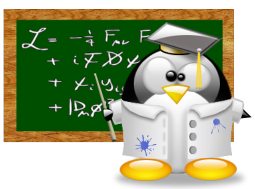
Calculs matriciels

Stéphane PASQUET, 22 mars 2015

Sommaire



Prérequis

- Raisonnement par récurrence

Définition

Matrice

Une `matrice` $n \times p$ est un tableau de plusieurs nombres à n lignes et p colonnes. Elle peut représenter (ou symboliser) plusieurs choses : un *graphe orienté* ou un *système linéaire de n équations à p inconnues* par exemple (nous en verrons plusieurs dans le programme de Spécialité Terminake S).
On dit que la matrice est `carrée d'ordre` n si $p = n$.

Exemple

La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ est une matrice de dimensions 3×2.

Notation

On notera $A = (a_{ij})$ la matrice :

$$\begin{array}{c} \\ A = \end{array} \begin{array}{c} j^{\text{e}} \text{ colonne} \\ \downarrow \\ \begin{pmatrix} & & \vdots & \\ \cdots & \cdots & a_{ij} & \cdots \\ & & \vdots & \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \longleftarrow i^{\text{e}} \text{ ligne} \end{array}$$

Définition

Matrice identité

Soit $A = (a_{ij})$ une matrice carrée d'ordre $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$.
On dit que A est la `matrice identité` si :

$$\begin{cases} a_{ii} = 1 & , \ 1 \leqslant i \leqslant n \\ a_{ij} = 0 & , \ i \neq j, 1 \leqslant i, j \leqslant n \end{cases}$$

Remarque

La matrice identité d'ordre n est notée I_n et on peut écrire :

$$I_n = (\delta_{ij}) \ ,$$

où δ_{ij} est le *symbole de Kronecker*.

Définitions

Matrice triangulaire, matrice diagonale

Soit $A = (a_{ij})$ une matrice carrée d'ordre $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$.

- On dit que A est `diagonale` si :

$$\forall i \neq j,\ a_{ij} = 0,\ 1 \leqslant i, j \leqslant n$$

- On dit que A est `triangulaire supérieure` si :

$$\forall i > j,\ a_{ij} = 0,\ 1 \leqslant i, j \leqslant n$$

- On dit que A est `triangulaire inférieure` si :

$$\forall i < j,\ a_{ij} = 0,\ 1 \leqslant i, j \leqslant n$$

Exemples

- $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ est une matrice diagonale.
- $B = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 0 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ est une matrice triangulaire supérieure.
- $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ est une matrice triangulaire inférieure.

Définition

Matrice transposée

Soit $A = (a_{ij})$ une matrice de dimensions $n \times p$.
La `transposée` de A est la matrice, notée ${}^tA$, telle que :

$${}^tA = (a_{ji}) .$$

Exemple

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$. Alors, ${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$.

Définition

Soient $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ deux matrices de mêmes dimensions.
On dit que $A = B$ si $a_{ij} = b_{ij}$ pour tout les entiers i et j possibles.

Exemple

Si $\begin{pmatrix} x-1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, alors $x-1=3$, soit $x=4$.

Propriétés

Somme et différence de deux matrices

Soient $A=(a_{ij})$ et $B=(b_{ij})$ deux matrices de mêmes dimensions.
Posons $S=A+B=(s_{ij})$ et $D=A-B=(d_{ij})$. Alors,

$$s_{ij}=a_{ij}+b_{ij} \qquad ; \qquad d_{ij}=a_{ij}-b_{ij}.$$

Exemples

Soient $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$. Alors,

$$S=A+B=\begin{pmatrix} 1+(-1) & 2+6 \\ 5+3 & -3+(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 8 & -5 \end{pmatrix}$$

$$D=A-B=\begin{pmatrix} 1-(-1) & 2-6 \\ 5-3 & -3-(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Propriété

L'addition de deux matrices est commutative : si A et B sont deux matrices de mêmes dimensions, alors :

$$A+B=B+A$$

Définition

Soit $A=(a_{ij})$ et soit λ un réel.
On définit la matrice λA par :

$$\lambda A = \lambda \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1p} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2p} \\ \vdots & & \ddots & \\ \lambda a_{n1} & \lambda a_{n2} & \cdots & \lambda a_{np} \end{pmatrix} = (\lambda a_{ij})$$

Propriété

Multiplication de deux matrices

Soient $A = (a_{ij})$, de dimensions $n \times p$, et $B = (b_{ij})$, de dimensions $p \times m$, deux matrices.
Le produit $C = AB = (c_{ij})$ sera une matrice de dimensions $n \times m$ définie par :

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$$

Si on prend le cas simple d'un vecteur ligne multiplié par un vecteur colonne, cela donne :

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \cdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{pmatrix} = \left(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + \cdots + a_{n-1}b_{n-1} + a_nb_n \right)$$

Exemples

1 Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$. On a :

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 2 + (-1) \times 3 + 3 \times (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \end{pmatrix}$$

2 Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$.
On a d'une part :

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \times (-1) + 2 \times (-3) & 1 \times (-2) + 2 \times 0 \\ 3 \times (-1) + 4 \times (-3) & 3 \times (-2) + 4 \times 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -7 & -2 \\ -15 & -6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Exemples (suite)

Et on a d'autre part :

$$\begin{aligned} BA &= \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (-1)\times 1 + (-2)\times 3 & (-1)\times 2 + (-2)\times 4 \\ (-3)\times 1 + 0\times 3 & (-3)\times 2 + 0 \times 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -7 & -10 \\ -3 & -6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Remarque

Attention : le produit de deux matrices n'est en général pas commutatif : $AB \neq BA$. C'est pourquoi on précise toujours que BA est le **produit à gauche** par B de A et que AB est le **produit à droite** par B de A.

Propriété

Écriture matricielle d'un système linéaire

On considère le système linéaire :

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

En posant $A = \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} c \\ c' \end{pmatrix}$, l'écriture matricielle du système est :

$$AX = C$$

Démonstration

Il suffit d'écrire $AX = C$ et de multiplier le membre de gauche :

$$\begin{aligned} AX = C &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ c' \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} ax + by \\ a'x + b'y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ c' \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases} \end{aligned}$$

■

Remarque

Une telle écriture est possible pour tout système linéaire de n équations à n inconnues. Par exemple,

$$\begin{cases} ax + \ by + \ cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \\ a''x + b''y + c''z = d'' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d \\ d' \\ d'' \end{pmatrix}$$

Définition

Matrice inverse

Soit A une matrice carrée d'ordre n. S'il existe une matrice B telle que $AB = BA = I_n$, alors B est appelée la `matrice inverse` de A et est notée A^{-1} :

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$$

Dans ce cas, on dit que A est `inversible`.

Propriété

Soit un système linéaire d'écriture matricielle $AX = B$, où A est une matrice inversible.
Alors, $X = A^{-1}B$.

Démonstration

Si $AX = B$, alors, en multipliant à gauche par A^{-1}, on a : $A^{-1}AX = A^{-1}B$.
Or, par définition, $A^{-1}A = I_n$, et $I_nX = X$. Donc, $X = A^{-1}B$. ■

Propriété

Inverse d'une matrice carrée d'ordre 2

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.
A est inversible si $ad - bc \neq 0$. Dans ce cas, son inverse est :

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Démonstration

Effectuons le produit :

$$\begin{aligned}\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &= \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} ad-bc & db-bd \\ -ac+ac & -bc+ad \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{ad-bc} \times (ad-bc)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= I_2\end{aligned}$$

Effectuons maintenant le produit :

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \times \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} &= \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} ad-bc & -ba+ba \\ cd-dc & -cb+da \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} \\ &= I_2\end{aligned}$$

Ces calculs prouvent donc que $\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ est la matrice inverse de $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ lorsque $ad-bc \neq 0$. ■

Propriété

Puissance d'une matrice diagonale

Soit $D = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_{pp} \end{pmatrix}$ une matrice diagonale.

Alors,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ D^n = \begin{pmatrix} d_{11}^n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22}^n & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_{pp}^n \end{pmatrix}$$

Démonstration

On raisonne par récurrence sur n.

- **Initialisation.**
Outre le fait que l'égalité soit vraie pour $n=1$, regardons pour $n=2$:

$$\begin{aligned} D^2 &= \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_{pp} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_{pp} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} d_{11}^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22}^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_{pp}^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- **Hérédité.**
Supposons que $D^k = (q_{ij})$, avec $q_{ii} = d_{ii}^k$ et $q_{ij} = 0$ pour $i \neq j$, et notons $D^{k+1} = D^k D = (c_{ij})$. Alors,

$$c_{ij} = \sum_{m=1}^{p} q_{im} d_{mj}$$

Or, $d_{ij} = 0$ pour $i \neq j$. Donc :

$$\begin{aligned} c_{ii} &= q_{i1}d_{1i} + q_{i2}d_{2i} + \cdots + q_{ii}d_{ii} + q_{i(i+1)}d_{(i+1)i} + \cdots + q_{ip}d_{pi} \\ c_{ii} &= 0 + 0 + \cdots + d_{ii}^k d_{ii} + 0 + \cdots + 0 \\ c_{ii} &= d_{ii}^{k+1} \end{aligned}$$

et

$$c_{ij} = 0$$

L'hérédité est alors démontrée, d'où le résultat de la propriété.

■

Propriété

Soit A une matrice telle que :

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix} \quad , \quad (a\,;b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

En convenant de noter :

$$A = aI_2 + bN \quad , \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \ ,$$

pour tout entier naturel n,

$$A^n = a^n I_2 + n a^{n-1} b N.$$

Démonstration

Démontrons cela par récurrence sur n.

- **Initialisation.**
  Pour $n = 0$, $a^n I_2 + na^{n-1}bN = I_2 = A^n$. Donc l'initialisation est faite.

- **Hérédité.**
  Supposons que l'égalité soit vraie pour un entier naturel k.

$$\begin{aligned} A^{k+1} &= AA^k \\ &= (aI_2 + bN)(a^k I_2 + ka^{k-1}bN) \\ &= a^{k+1}I_2 + ka^k bN + a^k bN + ka^{k-1}b^2N^2 \\ &= a^{k+1}I_2 + (k+1)a^k bN \quad (\text{car } N^2 = 0) \end{aligned}$$

  L'hérédité est alors vérifiée.

La propriété est donc vraie pour tout entier naturel n.

Propriété

Puissance d'une matrice carrée

Soient A une matrice carrée d'ordre p, P une matrice carrée inversible d'ordre p et D une matrice diagonale d'ordre p telle que $A = PDP^{-1}$.
Alors,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = PD^nP^{-1}$$

Démonstration

La démonstration s'effectue par récurrence sur n.

- **Initialisation.**

$$\begin{aligned} A^2 &= PD\underbrace{P^{-1}P}_{=I_p}DP^{-1} \\ &= PDDP^{-1} \\ &= PD^2P^{-1} \end{aligned}$$

- **Hérédité.**
  Supposons que $A^k = PD^kP^{-1}$. Alors,

$$\begin{aligned} A^{k+1} &= A^k A \\ &= PD^k\underbrace{P^{-1}P}_{=I_p}DP^{-1} \\ &= PD^kDP^{-1} \\ &= PD^{k+1}P^{-1} \end{aligned}$$

  L'hérédité est alors vérifiée.
  La propriété est donc vraie pour tout entier naturel n. ■