Géométrie dans l'espace en Terminale S

Fiche

par
Stéphane PASQUET

2 juin 2018

Disponible sur `http://www.mathweb.fr`

1 Les plans

- **Représentation paramétrique d'un plan.**
  Le plan passant par $A(x_A;y_A;z_A)$ et porté par les vecteurs $\vec{u}(a;b;c)$ et $\vec{v}(a';b';c')$ a pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x &= x_A + \lambda a + \mu a' \\ y &= y_A + \lambda b + \mu b' \\ z &= z_A + \lambda c + \mu c' \end{cases} \quad , \quad \lambda \in \mathbb{R},\ \mu \in \mathbb{R}.$$

- **Équation cartésienne.**
  Le plan de vecteur normal $\vec{n}(a;b;c)$ a pour équation cartésienne :

$$ax + by + cz + d = 0 \quad , \quad d \in \mathbb{R}.$$

- **Plans parallèles.**
  Deux plans sont parallèles lorsque leurs vecteurs normaux sont colinéaires.
- **Plans perpendiculaires.**
  Deux pans sont perpendiculaires lorsque leurs vecteurs normaux sont orthogonaux (leur produit scalaire est nul).

2 Les droites

- **Représentation paramétrique d'une droite.**
  La droite passant par le point $A(x_A;y_A;z_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(a;b;c)$ a pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x &= x_A + at \\ y &= y_A + bt \\ z &= z_A + ct \end{cases} \quad , \quad t \in \mathbb{R}.$$

- **Droite orthogonale à un plan.**
  Une droite est orthogonale à un plan lorsque son vecteur directeur est colinéaire au vecteur normal du plan.

- **Droite parallèle à un plan.**
Une droite est parallèle à un plan lorsque son vecteur directeur est orthogonal au vecteur normal du plan (le produit scalaire des deux vecteurs est nul).
- **Droites orthogonales.**
Deux droites sont orthogonales lorsque le produit scalaire de leurs vecteurs directeurs est nul.

3 Intersection d'une droite et d'un plan

Exemple : On considère le plan $\mathscr{P}$ d'équation :

$$5x + y - z + 3 = 0$$

et la droite $\mathscr{D}$ passant par A$(0\,;1\,;3)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\,(1\,;0\,;3)$.

1. **On vérifie d'abord que $\mathscr{P}$ et $\mathscr{D}$ se coupent en un point.**
Un vecteur normal à $\mathscr{P}$ est $\vec{n}\,(5\,;1\,;-1)$; donc, $\vec{u}\cdot\vec{n} = 5\times1+1\times0+(-1)\times3 = 2 \neq 0$ donc $\mathscr{D}$ n'est pas parallèle à $\mathscr{P}$: il y a donc un point unique d'intersection. Appelons-le I.

2. **Déterminons les coordonnées de I.**
La représentation paramétrique de $\mathscr{D}$ est :

$$\begin{cases} x &= t \\ y &= 1 \\ z &= 3+3t \end{cases} \quad , \quad t \in \mathbb{R}.$$

Étant donné que I appartient à $\mathscr{D}$, il existe un réel k tel que I$(k\,;1\,;3k+3)$.

En substituant les valeurs de x, y et z en fonction de k dans l'équation cartésienne de $\mathscr{P}$, on a :

$$\begin{aligned} & 5k + 1 - (3+3k) + 3 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & 2k + 1 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & k = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Finalement, on a : I$\left(-\frac{1}{2}\,;1\,;\frac{3}{2}\right)$.

4 Intersection de deux plans

Exemple : On considère les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ d'équations respectives :

$$\mathscr{P} : 2x+3y-z+5=0$$
$$\mathscr{P}' : x+y+1=0$$

Nous souhaitons déterminer une représentation paramétrique de l'intersection de ces deux plans si elle existe.
Pour cela, on « résout » le système suivant, en conservant une inconnue et en la considérant comme un paramètre (ici, z) :

$$\begin{cases} 2x+3y-z & = -5 \qquad (E_1) \\ x+y & = -1 \qquad (E_2)\ (L_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+3y & = z-5 \qquad (E_1) \\ 2x+2y & = -2 \qquad (E_2) \longleftarrow 2(E_2) \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y & = z-3 \qquad (E_1)-(E_2) \\ x & = -1-(z-3) \qquad (L_2) \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y & = z-3 \qquad (L_1) \\ x & = -z+2 \qquad (L_2) \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x & = -t+2 \\ y & = t-3 \qquad , \quad t \in \mathbb{R} \\ z & = t \end{cases}$$

L'intersection des deux plans existe et est la droite passant par le point $\mathrm{A}(2\,;-3\,;0)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\,(-1\,;1\,;1)$.

5 Longueur d'un segment

Dans le repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\vec{\imath}\,,\vec{\jmath}\,,\vec{k}\right)$, soient $\mathrm{A}(x_\mathrm{A}\,;y_\mathrm{A}\,;z_\mathrm{A})$ et $\mathrm{B}(x_\mathrm{B}\,;y_\mathrm{B}\,;z_\mathrm{B})$.
Alors,

$$\mathrm{AB} = \sqrt{(x_\mathrm{B}-x_\mathrm{A})^2+(y_\mathrm{B}-y_\mathrm{A})^2+(z_\mathrm{B}-z_\mathrm{A})^2}.$$

6 Théorème du toit

Soient $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ contenant respectivement deux droites parallèles $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$.
Si les deux plans sont sécants, alors leur intersection est une droite parallèle à $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$.