Les fonctions en Terminale S

Disponible sur `http://www.mathweb.fr`

Fiche

par
Stéphane PASQUET

2 juin 2018

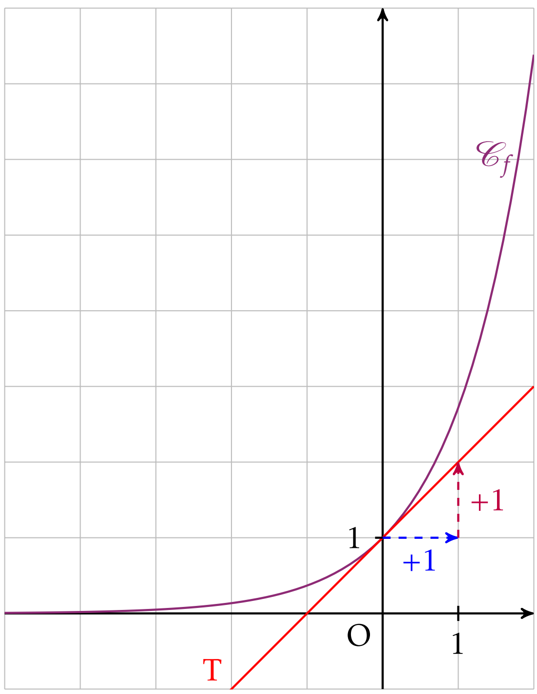
1 Dérivation

Pour une fonction f définie sur un intervalle I,

- **Le nombre dérivé** de f en $a \in \mathrm{I}$ est défini par :

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \left(\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \right) = \lim_{x \to a} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right).$$

  Il correspond au **coefficient directeur de la tangente** à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse $x = a$.



Ici, le coefficient directeur de (T), tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse $x = 0$, est égal à $+1$, donc $f'(0) = 1$.

- **Équation de la tangente :**

$$y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

- **Tableaux des principales dérivées :**

Fonctions	Dérivées
x^n	nx^{n-1}
$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$
e^x	e^x
$\cos x$	$-\sin x$
$\sin x$	$\cos x$

Fonctions	Dérivées
u^n	$nu'u^{n-1}$
$\ln u$	$\dfrac{u'}{u}$
e^u	$u'e^u$
$\cos(ax+b)$	$-a\sin(ax+b)$
$\sin(ax+b)$	$a\cos(ax+b)$

Fonctions	Dérivées
uv	$u'v+uv'$
$\dfrac{u}{v}$	$\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$
$\sqrt{u}$	$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$
$f(ax+b)$	$af'(ax+b)$

- Une fonction est **dérivable** en $a \in \mathrm{I}$ si la dérivée à gauche de a est égale à la dérivée à droite de a.

Exemple : On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{pour } x \leqslant 1 \\ x^2 - x & \text{pour } x \geqslant 1 \end{cases}$$

Alors,

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{pour } x \leqslant 1 \\ 2x - 1 & \text{pour } x \geqslant 1 \end{cases}$$

On voit que :

$$\lim_{\substack{x\to 1 \\ x<1}} f'(x) = 1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{\substack{x\to 1 \\ x>1}} f'(x) = 1.$$

f est donc dérivable en 1.

2 Continuité

- Une fonction f définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ est **continue** sur I si :

$$\forall a \in \mathrm{I},\ \lim_{\substack{x\to a \\ x<a}} f(x) = \lim_{\substack{x\to a \\ x>a}} f(x).$$

Exemple : On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{pour } x \leqslant 1 \\ x^2 - x + 1 & \text{pour } x \geqslant 1 \end{cases}$$

On voit que :

$$\lim_{\substack{x\to 1 \\ x<1}} f(x) = 1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{\substack{x\to 1 \\ x>1}} f(x) = 1.$$

Donc f est continue en 1.

- Si f est continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et si (u_n) est une suite qui converge vers un nombre $\ell \in \mathrm{I}$, alors

$$\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = f\left(\lim_{n\to+\infty} u_n\right) = f(\ell).$$

- **Théorème des valeurs intermédiaires.**
  Si :
  1. f est continue sur $[a\,;b]$,
  2. $c \in]f(a)\,;f(b)[$ ou $c \in]f(b)\,;f(a)[$,

  alors l'équation $f(x) = c$ admet au moins une solution sur $]a\,;b[$.
- **Corollaire du théorème des valeurs intermédiaires (Théorème de la bijection).**
  Si :
  1. f est continue et strictement monotone sur $[a\,;b]$,
  2. $c \in]f(a)\,;f(b)[$ ou $c \in]f(b)\,;f(a)[$,

  alors l'équation $f(x) = c$ admet une unique solution sur $]a\,;b[$.

3 Intégration & primitives

- Sur un intervalle I convenablement choisi, une **primitive F** d'une fonction f est la fonction telle que :
$$F' = f.$$
- Si $F(t) = \displaystyle\int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x$, alors $F'(t) = f(t)$.
- **Tableau des principales primitives :**

Fonctions	Primitives
x^n	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1} + k,\ k \in \mathbb{R}$
$\dfrac{1}{x},\ x > 0$	$\ln x + k,\ k \in \mathbb{R}$
e^x	$\mathrm{e}^x + k,\ k \in \mathbb{R}$
$\cos x$	$\sin x + k,\ k \in \mathbb{R}$
$\sin x$	$-\cos x + k,\ k \in \mathbb{R}$
$\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u} + k,\ k \in \mathbb{R}$

Fonctions	Primitives
$u'u^n$	$\dfrac{u^{n+1}}{n+1} + k,\ k \in \mathbb{R}$
$\dfrac{u'}{u},\ u > 0$	$\ln u + k,\ k \in \mathbb{R}$
$u'\mathrm{e}^u$	$\mathrm{e}^u + k,\ k \in \mathbb{R}$
$\cos(ax+b)$	$\dfrac{1}{a}\sin(ax+b) + k,\ k \in \mathbb{R}$
$\sin(ax+b)$	$-\dfrac{1}{a}\cos(ax+b) + k,\ k \in \mathbb{R}$

Méthode pour trouver une primitive : faire apparaître une formule de façon explicite.

Exemple : On considère la fonction f définie par $f(x) = x\mathrm{e}^{-x^2+1}$.
Pour trouver une primitive de f, on regarde les tableaux ci-dessus : f fait intervenir une exponentielle, donc F est nécessairement de la forme $u'\mathrm{e}^u$.
On pose alors $u(x) = -x^2 + 1$, donc $u'(x) = -2x$. On fait alors apparaître $u'\mathrm{e}^u$ dans f :
$$f(x) = -\frac{1}{2} \times \left(-2x\mathrm{e}^{-x^2+1}\right)$$
donc :
$$f = -\frac{1}{2}u'\mathrm{e}^u.$$
Ainsi,
$$\mathrm{F} = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^u \qquad \text{soit} \qquad \mathrm{F}(x) = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x^2+1}.$$

- L'intégrale sur $[a\,;b]$ d'une fonction continue f est :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a).$$

Si $f \geqslant 0$ sur $[a\,;b]$, elle représente l'aire du domaine délimité par :

— la courbe représentative de f ;

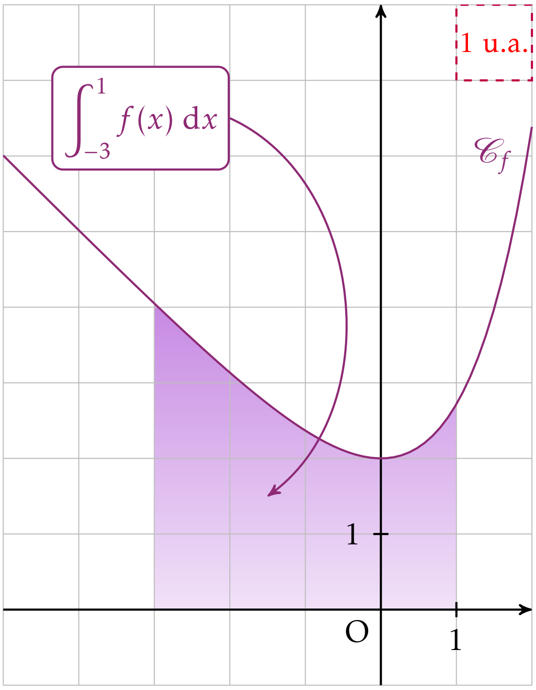
— l'axe des abscisses ;

— la droite d'équation $x = a$;

— la droite d'équation $x = b$.

Elle est alors exprimée en unité d'aire.
Ici, graphiquement, on peut affirmer (en comptant les carreaux) que :

$$10 \leqslant \int_{-3}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 11.$$



- **Propriétés.**
  1. *Linéarité :*

  $$\int_a^b [\lambda f(x)]\,\mathrm{d}x = \lambda \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \int_a^b [f(x)+g(x)]\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

  2. *Positivité.*

  Si $f(x) \geqslant 0$ sur $[a\,;b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$.

  3. *Relation de Chasles.*

  Si $c \in [a\,;b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

- **Valeur moyenne :** $\mu = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

4 Limites

- **Tableau des principales limites**

Limites	Valeurs
$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x}$	$+\infty$
$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x}$	0
$\displaystyle\lim_{x\to 0} x\ln x$	0
$\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x}$	1
$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x\mathrm{e}^x$	0

- **Forme indéterminée** « $\frac{\infty}{\infty}$ » : on factorise par « l'expression la plus forte » au numérateur et au dénominateur, ou on fait apparaître une limite connue (figurant dans le tableau ci-contre).
- **Forme indéterminée** « $\infty - \infty$ » : on factorise par « l'expression la plus forte ».
- **Asymptote horizontale** d'équation $y = a$:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = a.$$

- **Asymptote verticale** d'équation $x = b$:

$$\lim_{\substack{x\to b\\ x>b}} f(x) = \pm\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{\substack{x\to b\\ x<b}} f(x) = \pm\infty.$$

5 Identification de coefficients

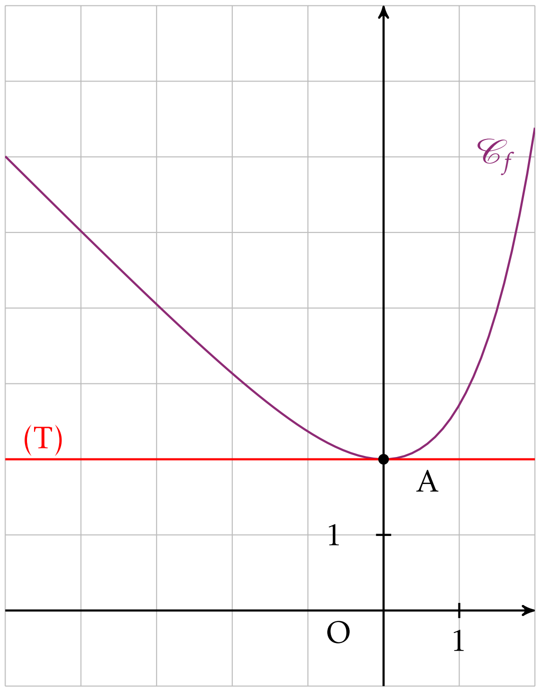
Certains exercices proposent l'expression d'une fonction à l'aide de paramètres, l'objectif étant de trouver la valeur de ces paramètres.

Pour cela, on utilisera souvent la valeur de $f(a)$ et $f'(a)$ donnée dans l'énoncé (de façon explicite ou graphique).

Exemple : On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = a\mathrm{e}^x + bx + 1$$

dont la représentation graphique est la suivante :



(T) est la tangente à la courbe au point d'abscisse A(0 ; 2).
Déterminer a et b.

- Détermination de a.
  On sait que $f(0) = 2$ car la courbe passe par le point de coordonnées (0 ; 2).
  Or, $f(0) = a\mathrm{e}^0 + b \times 0 + 1 = a + 1$. Donc, $a + 1 = 2$, soit $a = 1$.
- Détermination de b.
  On sait que $f'(0) = 0$ car la tangente en 0 est horizontale (coefficient directeur nul).
  Or, $f'(x) = a\mathrm{e}^x + b$ donc $f'(0) = a + b = 1 + b$. Donc, $1 + b = 0$, soit $b = -1$.

Finalement, on a :

$$f(x) = \mathrm{e}^x - x + 1.$$

6 Équations & inéquations avec logarithme et exponentielle

- $e^{\ln x} = x$ $(x > 0)$ et $\ln(e^x) = x$ par définition
- $e^x = e^y \iff x = y$
- $e^x > e^y \iff x > y$
- $\ln x = \ln y \iff x = y$
- $\ln x > \ln y \iff x > y$
- $\ln a = b \iff a = e^b$
- $q^n \geqslant b \iff \ln(q^n) \geqslant \ln b$

$$\iff x \ln q \geqslant \ln b$$

$$\iff \begin{cases} x \geqslant \dfrac{\ln b}{\ln q} & \text{si } q > 1 \text{ (car } \ln q > 0) \\ x \leqslant \dfrac{\ln b}{\ln q} & \text{si } 0 < q < 1 \text{ (car } \ln q < 0) \end{cases}$$