Les nombres complexes en Terminale S

Disponible sur `http://www.mathweb.fr`

Fiche

par
Stéphane PASQUET

2 juin 2018

1 Formes algébrique, trigonométrique et exponentielle

Forme algébrique	Forme trigonométrique	Forme exponentielle
$z = a + ib$	$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$	$z = re^{i\theta}$
$\begin{cases} a = r\cos\theta \\ b = r\sin\theta \end{cases}$	$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{a}{r} \\ \sin\theta = \dfrac{b}{r} \end{cases}$ et $\lvert z\rvert = \sqrt{a^2+b^2}$	

- **Trouver la forme trigonométrique/exponentielle à partir de la forme algébrique.**

Exemple : On considère le nombre complexe $z = 2 - 2i\sqrt{3}$.

1. **On calcule d'abord son module.**

$$\begin{aligned} |z| &= \sqrt{a^2+b^2} \\ &= \sqrt{2^2 + \left(-2\sqrt{3}\right)^2} \\ &= \sqrt{4+12} \\ &= \sqrt{16} \end{aligned}$$

$\boxed{|z| = 4}$

2. **On factorise le nombre complexe par son module.**

$$z = 4\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

3. **On trouve un argument.**

Il faut que $\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{1}{2} \\ \sin\theta = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ donc $\theta = -\dfrac{\pi}{3}$.

4. **On conclut.**

Donc $z = 4\left[\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)\right] = 4e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

- **Trouver la forme algébrique à partir de la forme exponentielle/trigonométrique.**

  Exemple : On considère le nombre complexe $z = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$.
  1. **On écrit la forme trigonométrique.**
     $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$.
  2. **On calcule le sinus et le cosinus de l'angle.**
     $z = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.
  3. **On développe.**
     $z = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$.

- **Trouver la forme algébrique d'un quotient de deux nombres complexes.**
  Si $z = \frac{a+ib}{a'+ib'}$, son écriture algébrique se trouve en multipliant le numérateur et le dénominateur par l'expression conjuguée du dénominateur : $a' - ib'$.

  Exemple : On considère le nombre complexe $z = \frac{1-3i}{2+i}$.
  Alors,

$$\begin{aligned} z &= \frac{(1-3i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} \\ &= \frac{2-i-6i+3i^2}{4-i^2} \\ &= \frac{-1-7i}{5} \qquad \text{car } i^2 = -1 \\ \end{aligned}$$
$$\boxed{z = -\frac{1}{5} - \frac{7}{5}i}$$

Propriétés sur les conjugués

- $z = a + ib$ et $\overline{z} = a - ib$
- $\overline{\overline{z}} = z$
- $\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'}$
- $\overline{z^n} = \overline{z}^n$
- $z\overline{z} = |z|^2$

Propriétés sur les modules et les arguments

- $|zz'| = |z| \times |z'|$
- $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$
- $|z^n| = |z|^n$
- $|\overline{z}| = |z|$
- $|z+z'| \leqslant |z| + |z'|$ (inégalité triangulaire)
- $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')$
- $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \frac{\arg(z)}{\arg(z')}$
- $\arg(z^n) = n\arg(z)$
- $\arg(\overline{z}) = -\arg(z)$

Ensembles de points

- **Relation importante.**
  Si a, b, c et d sont les affixes des points A, B, C et D, alors :

$$\arg\left(\frac{a-b}{c-d}\right) = (\overrightarrow{\mathrm{DC}}, \overrightarrow{\mathrm{BA}}).$$

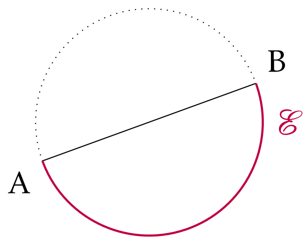
  En particulier,

  ⋆ $\arg\left(\frac{z-z_A}{z-z_B}\right) = 0 \mod 2\pi \Longleftrightarrow (\overrightarrow{\mathrm{BM}}, \overrightarrow{\mathrm{AM}}) = 0 \mod 2\pi \Longleftrightarrow M \in (AB)\backslash]AB]$

  ⋆ $\arg\left(\frac{z-z_A}{z-z_B}\right) = 0 \mod \pi \Longleftrightarrow (\overrightarrow{\mathrm{BM}}, \overrightarrow{\mathrm{AM}}) = 0 \mod \pi \Longleftrightarrow M \in (AB) \setminus \{B\}$

  ⋆ $\arg\left(\frac{z-z_A}{z-z_B}\right) = \pi \mod \pi \Longleftrightarrow (\overrightarrow{\mathrm{BM}}, \overrightarrow{\mathrm{AM}}) = \pi \mod \pi \Longleftrightarrow M \in [AB[$

  ⋆ $\arg\left(\frac{z-z_A}{z-z_B}\right) = \frac{\pi}{2} \mod 2\pi \Leftrightarrow M \in \mathscr{E}$ où $\mathscr{E}$ est l'ensemble en rouge représenté ci-dessous (privé de B) :



  ⋆ $\arg\left(\frac{z-z_A}{z-z_B}\right) = \frac{\pi}{2} \mod \pi \Leftrightarrow M \in \mathscr{C}_{[AB]} \setminus \{B\}$

- **Ensemble de points sous condition modulaire.**
  Trouver l'ensemble des points M(z) tels que :

$$|z-a| = |z-b|,$$

  où a et b sont les affixes respectives des points A et B, revient à trouver l'ensemble des points M tels que :

$$\mathrm{AM} = \mathrm{BM}$$

  donc l'ensemble est la *médiatrice de [AB]*.

- **Ensemble de points sous condition sur la partie réelle ou imaginaire.**
  Pour trouver l'ensemble des points $M(z)$ tels que $\mathrm{Re}(f(z)) = 0$ ou $\mathrm{Im}(f(z)) = 0$, il faut souvent remplacer z par $x + iy$ dans $f(z)$.

> *Exemple :* On considère l'application complexe :
>
> $$\begin{aligned} f : \mathbb{C}^* &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto \frac{1}{iz} \end{aligned}$$
>
> Pour trouver l'ensemble des points $M(z)$ tels que $\mathrm{Re}(f(z)) = 0$, on pose $z = x + iy$:
>
> $$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{i(x+iy)} \\ &= \frac{1}{-y+ix} \\ &= \frac{-y-ix}{x^2+y^2} \end{aligned}$$
>
> Donc,
>
> $$\begin{aligned} \mathrm{Re}(f(z)) = 0 &\Leftrightarrow \frac{-y}{x^2+y^2} = 0 \\ &\Leftrightarrow y = 0 \end{aligned}$$
>
> L'ensemble des points M est donc la droite d'équation $y = 0$ privée du point O (car $z = 0$ est exclut).

Équation polynomiale de degré 2

L'équation :

$$az^2 + bz + c = 0 \qquad , \qquad a \in \mathbb{R}^*,\ b \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R}$$

admet deux solutions complexes lorsque $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ qui sont :

$$z_1 = \frac{-b - i\sqrt{|\Delta|}}{2a} \qquad \text{et} \qquad z_2 = \frac{-b + i\sqrt{|\Delta|}}{2a}.$$

Affixe d'un vecteur

- Si $A(z_A)$ et $B(z_B)$ sont deux points du plan d'Argand-Cauchy (plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$), alors l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est :

$$z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A.$$

- ABCD est un parallélogramme si et seulement si :

$$z_B - z_A = z_C - z_D.$$