Suites et récurrence en Terminale S

Disponible sur `http://www.mathweb.fr`

Fiche

par
Stéphane PASQUET

2 juin 2018

Nous allons ici voir comment rédiger un exercice faisant intervenir le raisonnement par récurrence à travers une étude de suite.

1 Énoncé

On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \sqrt{1+\frac{1}{u_n}}.$$

Étudier la convergence de cette suite.

2 Solution

Posons :

$$f(x) = \sqrt{1+\frac{1}{x}}.$$

On a alors :

$$u_{n+1} = f(u_n).$$

1. **On montre que la suite est bien définie.**

   - *Initialisation.*
     $u_0 = 2$ donc $1+\dfrac{1}{u_0} > 0$, ce qui implique que $\sqrt{1+\dfrac{1}{u_0}} > 0$. Donc u_1 est bien défini et de plus, $u_1 > 0$ comme racine carrée.
   - *Hérédité.*
     On suppose que pour un entier k donné, $u_k > 0$.
     Alors, $1+\dfrac{1}{u_k} > 0$, ce qui fait que $\sqrt{1+\dfrac{1}{u_k}}$ est bien défini. Donc u_{k+1} est bien défini.

   L'hérédité étant vérifiée, u_n existe pour tout entier naturel n et $u_n > 0$.
2. **On étudie la fonction sur** $]0\,;+\infty[$**.**
   f est de la forme $\sqrt{u}$, donc $f' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$. Nous avons alors :

$$f'(x) = \frac{-\frac{1}{x^2}}{2\sqrt{1+\frac{1}{x}}} = -\frac{1}{2x^2\sqrt{1+\frac{1}{x}}}.$$

Ainsi, $f'(x) < 0$ sur $]0;+\infty[$. On en déduit :

x	0	1	2	$+\infty$
$f(x)$	‖ $+\infty$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{\frac{3}{2}}$	1

3. **On démontre par récurrence que $u_n \in [1;2]$.**
   - *Initialisation.*
     $u_0 = 2 \in [1;2]$.
   - *Hérédité.*
     On suppose que pour un entier naturel k donné, $u_k \in [1;2]$.
     Alors, d'après les variations de la fonction f, $1 < \sqrt{\frac{3}{2}} \leqslant f(u_k) \leqslant \sqrt{2} < 2$.

   L'hérédité est alors vérifiée. Ainsi, pour tout entier naturel n, $u_n \in [1;2]$.
4. **On étudie les variations de la suite.**
   La fonction f est décroissante donc, pour tout entier naturel n,
   $$f(u_n) < u_n$$
   soit :
   $$u_{n+1} < u_n.$$
   La suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est donc décroissante.
5. **On conclut sur la convergence de la suite.**
   La suite est décroissante et bornée. Elle converge donc.
6. **On détermine la limite de la suite.**
   Posons ℓ la limite de la suite.
   f étant continue sur $]0;+\infty[$,
   $$\begin{aligned} u_{n+1} = f(u_n) &\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = f\left(\lim_{n\to+\infty} u_n\right) \\ &\Rightarrow \ell = f(\ell) \\ &\Rightarrow \ell = \sqrt{1+\frac{1}{\ell}} \\ &\Rightarrow \ell^2 = 1 + \frac{1}{\ell} \\ &\Rightarrow \ell^3 = \ell + 1 \end{aligned}$$
   Ainsi, ℓ est racine du polynôme :
   $$P(x) = x^3 - x - 1.$$
   Une formule (qui n'est pas au programme de terminale mais qui peut être vue) stipule que tout polynôme de la forme $x^3 + px + q$ admet une racine égale à :
   $$\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{q^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{q^3}{27}}} \quad , \quad \Delta = 4p^3 + 27q^2 \geqslant 0.$$

Ici, $\Delta = 23$, ce qui nous donne :

$$\ell = \sqrt[3]{-\frac{1}{2} + \frac{23}{108}} + \sqrt[3]{-\frac{1}{2} - \frac{23}{108}} \approx 1{,}324\,717\,957\,244\,746\,025\,960\,908\,854\,477.$$

On en déduit alors :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = \sqrt[3]{-\frac{1}{2} + \frac{23}{108}} + \sqrt[3]{-\frac{1}{2} - \frac{23}{108}}.}$$

Nota Bene : sans la formule, on pourrait trouver une valeur approchée de la limite à l'aide d'un tableau de valeurs de $P(x)$, pour $x \in [1\,;2]$ avec un pas convenablement choisi.