Les suites en Terminale S

Disponible sur `http://www.mathweb.fr`

Fiche

par
Stéphane PASQUET

2 juin 2018

1 Suites arithmétiques

- **Relation de récurrence :** $u_{n+1} = u_n + r$.
- **Relations explicites :** $u_n = u_0 + nr$ et $u_n = u_p + (n-p)r$.
- **Somme des premiers termes :** $u_0 + u_1 + \cdots + u_n = (n+1)u_0 + \dfrac{n(n+1)}{2}r$.
- $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

2 Suites géométriques

- **Relation de récurrence :** $u_{n+1} = qu_n$.
- **Relations explicites :** $u_n = u_0 \times q^n$ et $u_n = u_p \times q^{n-p}$.
- **Somme des premiers termes :** $u_0 + u_1 + \cdots + u_n = u_0 \times \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$.
- $1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$.
- Si $|q| < 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$.
  Si $q > 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$.

3 Généralités

- **Théorème des gendarmes.**
  Si $v_n \leqslant u_n \leqslant w_n$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n) = \ell$ (valeur finie), alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.
- **Théorème de comparaison.**
  - Si $u_n \geqslant v_n$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
  - Si $v_n \leqslant u_n$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.
- Toute suite croissante et majorée converge.
  Toute suite décroissante et minorée converge.
- **Inégalité de Bernoulli.**
  Pour tout réel positif x et tout entier naturel n, $(1-x)^n \geqslant 1 - nx$.

4 Raisonnement par récurrence

Principe de récurrence.
Soit (P_n) une propriété dépendant d'un entier naturel n.
Si (P_0) est vraie et si, quel que soit l'entier naturel k, $(P_k) \Rightarrow (P_{k+1})$, alors (P_n) est vraie pour tout entier naturel n.

Exemple : soit à démontrer la propriété :

$$(P_n) \qquad : \qquad \forall x \in \mathbb{R}^+,\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad (1-x)^n \geqslant 1 - nx.$$

- **Initialisation.**
  $(1-x)^0 = 1$ et $1 + 0 \times x = 1$.
  La propriété est donc vraie pour $n = 0$. L'initialisation est vérifiée.

- **Hérédité.**
  Supposons que pour un certain entier k,

  $$(1-x)^k \geqslant 1 - kx. \qquad \text{(HR)}$$

  Alors,

  $$\begin{aligned}(1-x)^{k+1} &= (1-x)^k(1+x)\\ &\geqslant (1-kx)(1-x) \quad \text{(HR)}\\ &\geqslant 1-(k+1)x + x^2\\ &\geqslant 1-(k+1)x.\end{aligned}$$

  L'hérédité est alors montrée ; la propriété est donc vraie pour tout entier naturel n.

5 Étude d'une suite arithmético-géométrique

Exemple : soit la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 & = 20\ 000\\ u_{n+1} & = 0,9u_n + 1\ 000\end{cases}$$

Soit alors la suite $(v_n)_{n\geqslant 0}$ définie par :

$$v_n = u_n - 10\ 000. \qquad (1)$$

1. **La suite (v_n) est géométrique.**
   $$\begin{aligned}v_{n+1} &= u_{n+1} - 10\ 000\\ &= 0,9u_n - 9\ 000\\ &= 0,9\,(u_n - 10\ 000)\\ v_{n+1} &= 0,9v_n\end{aligned}$$

Exemple (suite) :

2. **Expression du terme général u_n.**
   (v_n) est géométrique de raison $q = 0,9$ et de premier terme :
   $$v_0 = u_0 - 10\ 000 = 10\ 000.$$
   Donc,
   $$v_n = v_0 \times q^n = 10\ 000 \times 0,9^n\ ,$$
   et donc , d'après l'équation 1 :
   $$\begin{aligned} u_n &= v_n + 10\ 000 \\ u_n &= 10\ 000 \times 0,9^n + 10\ 000. \end{aligned}$$

3. **Limite de la suite (u_n).**
   On sait que $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$ car (v_n) est géométrique de raison $0 < q < 1$.
   Donc,
   $$\begin{aligned} \lim_{n \to +\infty} u_n &= \lim_{n \to +\infty} (v_n + 10\ 000) \\ &= \lim_{n \to +\infty} v_n + 10\ 000 \\ &= 10\ 000. \end{aligned}$$