Application du TVI en Terminale S

Disponible sur `http://www.mathweb.fr`

Fiche

par
Stéphane PASQUET

2 juin 2018

Nous allons ici voir comment rédiger un exercice faisant intervenir le corollaire du Théorème des Valeurs Intermédiaires (TVI), que l'on nomme le « théorème de la bijection ».

1 Énoncé

Montrer que l'équation : $\dfrac{1}{x-1} - \sqrt{3x+6} = 0$ admet une unique solution.

2 Solution

Posons :

$$f(x) = \frac{1}{x-1} - \sqrt{3x+6}$$

définie sur $\mathscr{D} = [-2\,;1[\cup]1\,;+\infty[$.

1. **On justifie la dérivabilité de f.**

   - La fonction $x \mapsto x-1$ est dérivable et ne s'annule jamais sur $[-2\,;1[$ et sur $]1\,;+\infty[$. Par conséquent, $x \mapsto \dfrac{1}{x-1}$ est dérivable sur ces mêmes intervalles comme inverse d'une fonction dérivable ne s'annulant pas.
   - La fonction $x \mapsto 3x+6$ est dérivable et ne s'annule jamais sur $]-2\,;1[$ et sur $]1\,;+\infty[$. Par conséquent, $x \mapsto \sqrt{3x+6}$ est dérivable sur ces intervalles comme racine carrée d'une fonction dérivable strictement positive.

   Ainsi, f est dérivable sur $]-2\,;1[$ et sur $]1\,;+\infty[$ comme somme de fonctions dérivables sur ces intervalles.

2. **On détermine la dérivée de la fonction.**

   - La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x-1}$ est de la forme $\dfrac{1}{u}$ avec $u(x) = x-1$. Sa dérivée est donc $-\dfrac{u'}{u^2}$, avec $u'(x) = 1$, soit $-\dfrac{1}{(x-1)^2}$.
   - La fonction $x \mapsto \sqrt{3x+6}$ est de la forme $\sqrt{u}$ avec $u(x) = 3x+6$. Sa dérivée est donc $\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$, avec $u'(x) = 3$, soit $\dfrac{3}{2\sqrt{3x+6}}$.

   Ainsi, $\boxed{f'(x) = -\dfrac{1}{(x-1)^2} - \dfrac{3}{2\sqrt{3x+6}}}$.

3. **On étudie le signe de la dérivée et les variations de la fonction.**
$(x-1)^2 > 0$ et $\sqrt{3x+6} > 0$ sur $]-2;1[\cup]1;+\infty[$. Donc $f'(x) < 0$ sur $]-2;1[\cup]1;+\infty[$.
Par conséquent, f est strictement décroissante sur $]-2;1[$et sur $]1;+\infty[$.
4. **On calcule les limites aux bornes du domaine de définition.**
   - $f(-2) = \dfrac{1}{-2-1} - \sqrt{-6+6} = -\dfrac{1}{3}$.
   - $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x-1}\right) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{3x+6} = +\infty$ donc, par somme, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty}$.
   - Quand x tend vers 1 par valeurs inférieures, on a :

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}}(x-1) = 0^- \\ \lim\limits_{X\to0^-}\left(\dfrac{1}{X}\right) = -\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} f(x) = -\infty}.$$

   - Quand x tend vers 1 par valeurs supérieures, on a :

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}(x-1) = 0^+ \\ \lim\limits_{X\to0^+}\left(\dfrac{1}{X}\right) = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} f(x) = +\infty}.$$

5. **On construit le tableau de variations de la fonction.**

x	-2		1		$+\infty$
$f(x)$	$-\frac{1}{3}$	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

6. **On applique le théorème de la bijection.**
La fonction f est continue et strictement décroissante sur $[-2;1[$ et sur $]1;+\infty[$.
De plus,
   - $f(-2) < 0$ et $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} f(x) < 0$ donc l'équation $f(x) = 0$ n'admet aucune solution sur l'intervalle $[-2;1[$.
   - $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} f(x) > 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) < 0$ donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires (théorème de la bijection), l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $]1;+\infty[$.
7. **On détermine une valeur approchée de la solution.**
Cette question n'était pas posée initialement, mais la curiosité peut nous pousser à la traiter.
Posons α cette solution.
   - On peut commencer par calculer :

$$f(2) = \frac{1}{2-1} - \sqrt{3\times2+6} = 1 - \sqrt{12} < 0.$$

   On en conclut alors que $\alpha \in]1;2[$.

- Utilisons maintenant la calculatrice, et plus particulièrement le tableau de valeurs.
  On paramètre la calculatrice de sorte à ce qu'elle calcule les valeurs de $f(x)$ pour $x \in [1,1\,;2]$, pour x allant de 0,1 en 0,1.

TI	CASIO
Touche 2nd+WINDOW (TBLSET) TblStart = 1.1 ΔTbl = 0.1	MENU + TABLE + EXE, puis [F5] (Range) Start : 1.1 End : 2 Pitch : 0.1

On obtient alors le tableau suivant :

x	y
1.1	6.950410
1.2	1.901613
1.3	0,186907
1.4	-0,693744
1.5	-1,240370
1.6	-1,619669
1.7	-1,903095
1.8	-2,126389
1.9	-2,309415

On peut alors dire que $\alpha \in [1,3\,;1,4]$ car $f(1,3) > 0$ et $f(1,4) < 0$.
Pour avoir une valeur approchée de α à 10^{-1} près, on constate que $f(1,3)$ est plus proche de 0 que $f(1,4)$. Donc $\alpha \approx 1,3$ à 10^{-1} près. Allons plus loin et calculons les valeurs de $f(x)$ pour $x \in [1,3\,;1,4]$ avec un pas de 0,01. On a alors :

x	y
1.30	0.186907
1.31	0.074616
1.32	-0.030947
1.33	-0.130393
1.34	-0.224262
1.35	-0.313031
1.36	-0.397124
1.37	-0.476920
1.38	-0.552758
1.39	-0.624941

On voit alors que $\alpha \in [1,31\,;1,32]$, avec $f(1,32)$ plus proche de 0 que $f(1,31)$. On peut alors dire que $\alpha \approx 1,31$ à 10^{-2} près.
Pour avoir une valeur approchée de α à 10^{-3} près, on va plus loin : on calcule $f(x)$ pour $x \in [1,31\,;1,32]$ avec un pas de 0,001.

x	y
1.310	0.074616
1.311	0.063768
1.312	0.052986
1.313	0.042270
1.314	0.031620
1.315	0.021034
1.316	0.010512
1.317	5.356670E-05
1.318	-0.010342
1.319	-0.020675

On constate que $\alpha \approx 1,317$ à 10^{-3} près. À ce stade, nous avons une très bonne valeur approchée car $f(1,317) \approx 0,00005$.