

Étudier une fonction trigonométrique

On souhaite étudier la fonction $f(x) = 3 \cos(2x) - 2 \cos^3(2x)$.

- **Étape 1 : périodicité.** On se demande s'il existe un réel T tel que $f(x + T) = f(x)$. On calcule donc :

$$\begin{aligned} f(x + T) &= 3 \cos[2(x + T)] - 2 \cos^3[2(x + T)] \\ &= 3 \cos(2x + 2T) - 2 \cos^3(2x + 2T). \end{aligned}$$

On sait que la période de la fonction $\cos$ est 2π donc :

$$\begin{aligned} f(x + T) = f(x) &\iff 3 \cos(2x + 2T) - 2 \cos^3(2x + 2T) = 3 \cos(2x) - 2 \cos^3(2x) \\ &\iff 2T = 2\pi \\ &\iff T = \pi. \end{aligned}$$

Résultat 1 : f est π -périodique.

Conséquence 1 : on choisit un domaine d'étude d'amplitude égale à π , centré en 0 (ça servira plus tard) : $\mathcal{D} = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

- **Étape 2 : parité.** On se demande si f est paire ou impaire. On calcule donc $f(-x)$.

$$\begin{aligned} f(-x) &= 3 \cos(-2x) - 2 \cos^3(-2x) \\ &= 3 \cos(2x) - 2 \cos^3(2x) \text{ car } \cos(-x) = \cos(x) \\ &= f(x). \end{aligned}$$

Résultat 2 : f est paire car $f(-x) = f(x)$.

Remarque : si $f(-x) = -f(x)$ alors f est impaire.

Conséquence 2 : on peut couper en deux le domaine d'étude car les variations sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées. On peut alors prendre $\mathcal{D} = \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Remarque : si f était impaire, la conséquence aurait été la même car les variations auraient été symétriques, mais par rapport à l'origine du repère.

- **Étape 3 : dérivation.** On calcule la dérivée de f pour en trouver le signe sur $\mathcal{D}$. On utilise le fait que $[\cos(ax + b)]' = -a \sin(ax + b)$, et $(u^n)' = nu'u^{n-1}$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= -6 \sin(2x) - 2 \times 3 [-2 \sin(2x)] [\cos(2x)]^2 \\ &= -6 \sin(2x) + 12 \sin(2x) \cos^2(2x) \\ &= -6 \sin(2x) [1 - 2 \cos^2(2x)] \\ &= 6 \sin(2x) \cos(4x) \text{ car } \cos(2a) = 2 \cos^2(a) - 1. \end{aligned}$$

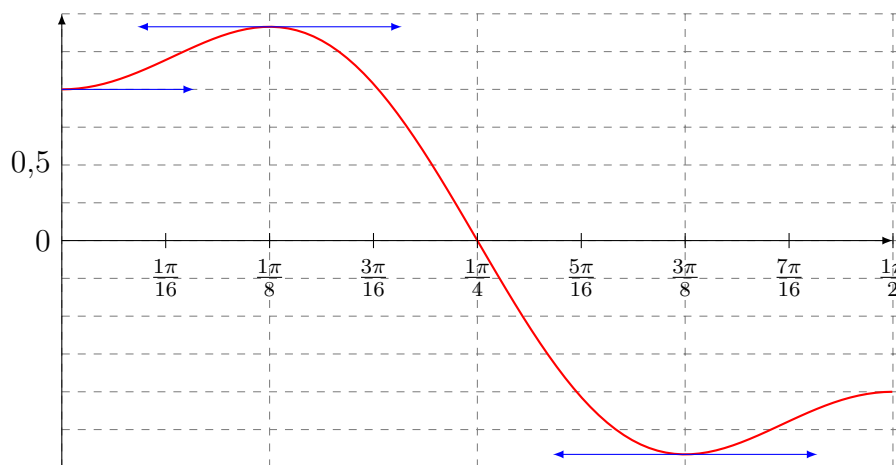
— **Étape 4 : étude du signe de la dérivée.** N'oublions pas que nous sommes sur un intervalle restreint : $\mathcal{D} = \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

(a) Si $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ alors $0 \leq 2x \leq \pi$ et donc $\sin(2x) \geq 0$.

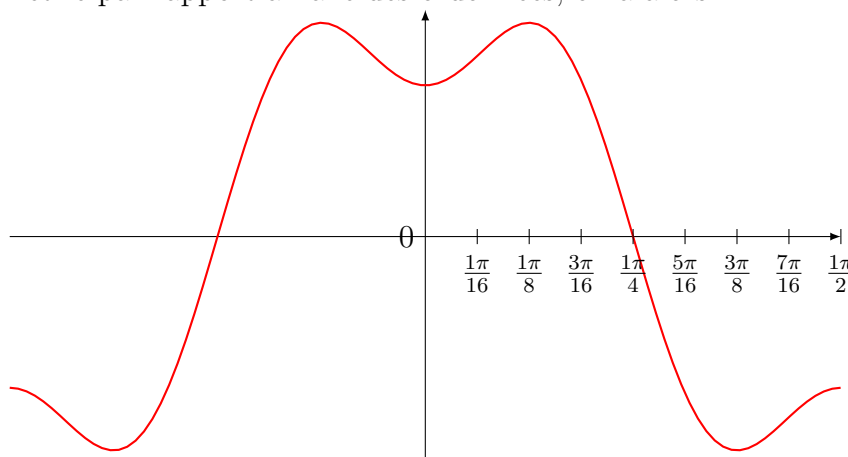
(b) Si $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ alors $0 \leq 4x \leq 2\pi$ et donc $\cos(4x) \geq 0$ pour $0 \leq 4x \leq \frac{\pi}{2}$ et pour $\frac{3\pi}{2} \leq 4x \leq 2\pi$, donc pour $0 \leq x \leq \frac{\pi}{8}$ et pour $\frac{3\pi}{8} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

x	0	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(2x)$	0	+	+	0
$\cos(4x)$	+	0	-	+
$f'(x)$	0	+	0	-
f	1	$\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	-1

— **Étape 5 : représentation graphique.** Sur $\mathcal{D}$, on a :



Par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées, on a alors :



En répétant ce motif sur $\mathbb{R}$, on obtient la courbe complète.