

Pour réviser son bac S

Disponible sur <http://www.mathweb.fr>

14 juin 2016

Analyse

1. Trouver la dérivée de la fonction f définie par $f(x) = \ln(x^2 + 3)$.
2. Trouver la dérivée de la fonction g définie par $g(x) = x \ln x - x$.
3. Trouver la dérivée de la fonction h définie par $h(x) = xe^{2x-1}$.
4. Résoudre l'équation $\ln(2x + 3) + \ln(x) = 0$.
5. Résoudre l'inéquation $3 \times 0,8^n < 0,5$.
6. Résoudre l'inéquation $(3x - 4)e^{2x+3} \geq 0$.
7. Résoudre l'inéquation $(x + 2)\ln(x - 1) > 0$.
8. Que vaut $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x}$?
9. Que vaut $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x$?
10. Que vaut $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x}$?
11. Que vaut $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$?
12. Calculer $\int_0^1 (x + e^x) dx$.
13. Calculer $\int_0^1 \frac{3e^x}{e^x + 2} dx$.
14. Montrer que la fonction $F(x) = x \ln x - x$ est une primitive de la fonction $f(x) = \ln x$.
15. La suite (u_n) est définie par : $u_n = \int_0^1 \frac{n}{1 + e^{1-x}} dx$.
Montrer que (u_n) est décroissante.
16. La suite (a_n) est définie par $a_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n , $a_{n+1} = 0,5a_n + 5$.
On pose $v_n = a_n - 10$. Montrer que (v_n) est géométrique et en déduire une expression de a_n en fonction de n .
Compléter l'algorithme suivant afin qu'il affiche le premier entier n tel que $a_n > 9$.

Variables :	n entier naturel a réel
Initialisation :	n prend la valeur 0 a prend la valeur 1
Traitement :	Tant que ... faire a prend la valeur ... n prend la valeur $n + 1$ Fin du Tant que
Sortie :	Afficher ...

17. $f(x) = \sqrt{2x}$. On suppose que f est croissante sur $[0; +\infty[$. On pose $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $u_0 = 1$.

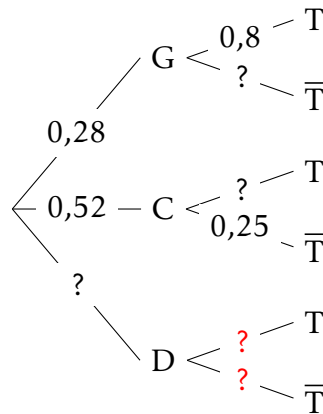
Montrer par récurrence que (u_n) est croissante.

Nombres complexes

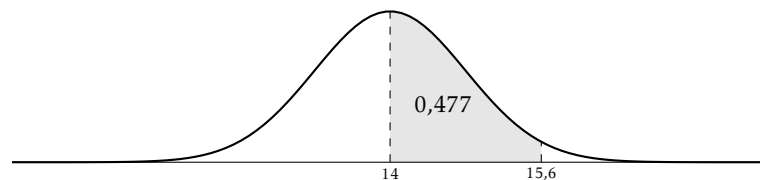
1. Mettre le nombre $z = \frac{3\sqrt{2}}{2} + 3i\frac{\sqrt{6}}{2}$ sous la forme exponentielle.
2. Mettre le nombre $z = 6e^{i\frac{\pi}{6}}$ sous la forme algébrique.
3. Soient A et B d'affixes respectives $z_A = i$ et $z_B = 3$. M est un point d'affixe z .
 - a. Déterminer l'ensemble des points M tels que $\frac{z-i}{z-3}$ soit un imaginaire pur.
 - b. Déterminer l'ensemble des points M tels que $\frac{z-i}{z-3}$ soit un nombre réel.
 - c. Déterminer l'ensemble des points M tels que $\left| \frac{z-i}{z-3} \right| = 1$.
4. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $2z^2 + 3z + 11 = 0$.
5. Soient A, B et C d'affixes respectives $a = \sqrt{2} + i\sqrt{3}$, $b = 2\sqrt{3} + 3i\sqrt{2}$ et $c = 9 + 11i$.
Les points A, B et C sont-ils alignés ?
6. Si $z = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{5}}$ alors quelle est la forme exponentielle de z^{10} ?

Probabilités

1. On a l'arbre suivant :



- Que vaut $P(D)$?
 - Que vaut $P_G(\bar{T})$ et $P_C(T)$?
 - On sait que $P(T) = 0,674$. Que vaut alors $P_D(T)$ et $P_D(\bar{T})$?
 - Calculer alors $P_T(C)$.
- Un sac contient 100 000 billes ; 47 % sont bleues et les autres sont rouges. On tire au hasard avec remise 40 billes de ce sac. On note X la variable aléatoire représentant le nombre de billes bleues tirées à l'issue de ce tirage.
 - Calculer $P(X = 20)$.
 - Calculer $P(X \geq 1)$.
 - Sur les 40 billes tirées, 17 sont bleues. Peut-on considérer que ce lot est représentatif de ce qu'il y a dans le sac de billes ?
 - Louis-Mokthar attend son ami. Il sait qu'il arrivera au plus tard dans 30 minutes. On appelle X la variable aléatoire représentant sa durée d'attente en minutes. Quelle est la probabilité qu'il attende plus de 10 minutes ?
 - Une variable aléatoire X suit une loi exponentielle de paramètre λ . On sait que $P(X \geq 8) = 0,5$. Calculer λ .
 - Une variable aléatoire X suit la loi normale de moyenne $\mu = 14$ et d'écart-type σ tel que $P(20 \leq X \leq 15,6) = 0,477$.
La représentation de sa fonction de densité est la suivante :



- Calculer σ .
 - Calculer $P(X \geq 17)$.
- Une variable aléatoire X suit la loi $\mathcal{N}(\mu; 3^2)$. On sait que $P(X \leq 16) = 0,32$. Calculer μ .
 - Soit un échantillon de population de taille n sur lequel 48 % des personnes ont l'intention de voter pour le candidat A. Donner le plus petit entier n tel que l'amplitude de l'intervalle de confiance soit inférieur ou égale à 0,1.

Géométrie dans l'espace

Dans cette section, on considère :

- les points $A(2 ; -1 ; 0)$, $B(-1 ; 1 ; 3)$ et $C(1 ; -7 ; 2)$;
 - la droite $\mathcal{D}$ de représentation paramétrique :
$$\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = -1 + t \\ z = -2t \end{cases}$$
 - le plan $\mathcal{P}$ d'équation cartésienne : $3x + y - 2z + 8 = 0$
1. Lequel des points A, B ou C appartient à la droite $\mathcal{D}$?
 2. Donner un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite $\mathcal{D}$.
 3. Donner un vecteur normal du plan $\mathcal{P}$.
 4. Montrer que $\mathcal{D}$ est orthogonale au plan $\mathcal{P}$.
 5. Trouver les coordonnées du point d'intersection de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{D}$. On le note H.
 6. Montrer que B et C sont sur $\mathcal{P}$.
 7. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (HC).
 8. H, B et C sont-ils alignés ?
 9. Calculer AH, BH et CH.
 10. On rappelle que l'aire d'un triangle ABC est égale à $\frac{1}{2}AB \times AC \sin \widehat{A}$.
 - a. Calculer $\vec{HB} \cdot \vec{HC}$.
 - b. En déduire $\cos \widehat{H}$, puis l'aire de HBC.
 11. Calculer le volume de la pyramide HBCA.

Corrigé

Les corrections sont sommaires car il est plus important de retenir l'idée que la forme.

Analyse

1. $f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 3}$.
2. $g'(x) = 1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x} - 1 = \ln x$.
3. $h(x) = e^{2x-1} + x \times 2e^{2x-1} = (1 + 2x)e^{2x-1}$.
4. $\ln(2x + 3) + \ln x = \ln[x(2x + 3)] = \ln(2x^2 + 3x)$ donc l'équation est équivalente à :
 $\ln(2x^2 + 3x) = \ln 1$, soit $2x^2 + 3x - 1 = 0$. $x = 1$ est une solution évidente, d'où $x = -\frac{1}{2}$ est l'autre solution.
5. $3 \times 0,8^n < 0,5 \iff 0,8^n < \frac{0,5}{3}$
 $\iff \ln 0,8^n < \ln \frac{1}{6}$
 $\iff n \ln 0,8 < -\ln 6$
 $\iff n > -\frac{\ln 6}{\ln 0,8}$ car $\ln 0,8 < 0$
6. $3x - 4 \geq 0 \iff x \geq \frac{4}{3}$ et $e^{2x+3} > 0$ pour tout x donc l'ensemble solution est l'ensemble des x tels que $x \geq \frac{4}{3}$.
7. $\ln(x - 1)$ existe si $x > 1$. Dans ce cas, $x + 2 > 0$ et n'influe pas le signe de $(x + 2)\ln(x - 1)$.
 $\ln(x - 1) > 0 \iff x - 1 > 1 \iff \underline{x > 2}$.
8. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ (cours)
9. $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$ (cours)
10. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ (cours)
11. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ (cours)
12. $\int_0^1 (x + e^x) dx = \left[\frac{x^2}{2} + e^x \right]_0^1 = \frac{1}{2} + e - 1 = e - \frac{1}{2}$.
13. $\int_0^1 \frac{3e^x}{e^x + 2} dx = 3 \int_0^1 \frac{u'}{u} dx = 3 [\ln |e^x + 2|]_0^1 = 3 \ln(e + 2) - 3 \ln 3 = 3 \ln\left(\frac{e + 2}{3}\right)$ avec $u(x) = e^x + 2$.
14. $F'(x) = 1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x} - 1 = \ln x$ donc F est une primitive de $\ln x$.
15. $u_{n+1} - u_n = \int_0^1 \left(\frac{n+1}{1 + e^{1-x}} - \frac{n}{1 + e^{1-x}} \right) dx = \int_0^1 \frac{1}{1 + e^{1-x}} dx$.
Or, $e^{1-x} > 0$ sur $[0; 1]$, donc $\frac{1}{1 + e^{1-x}} > 0$ sur $[0; 1]$.
L'intégrale d'une fonction positive est positive donc $u_{n+1} - u_n > 0$ et donc (u_n) est croissante.

16. $v_{n+1} = a_{n+1} - 10 = 0,5a_n + 5 - 10 = 0,5a_n - 5 = 0,5(a_n - 10) = 0,5v_n$.

Donc (v_n) est géométrique de raison 0,5 et de premier terme $v_0 = u_0 - 10 = 1 - 10 = -9$, donc $v_n = v_0 \times 0,5^n = -9 \times 0,5^n$.

Alors, comme $v_n = a_n - 10$, $a_n = v_n + 10 = 10 - 9 \times 0,5^n$.

Variables :	n entier naturel a réel	
Initialisation :	n prend la valeur 0 a prend la valeur 1	
Traitement :	Tant que $n \leq 9$ faire a prend la valeur $0.5a + 5$ n prend la valeur $n + 1$ Fin du Tant que	on met le contraire de la condition que l'on veut car $a_{n+1} = 0,5a_n + 5$
Sortie :	Afficher n	on affiche le premier n qui ne satisfait pas la condition « $n \leq 9$ »

17. On pose $\mathcal{P}_n : u_{n+1} > u_n$ pour tout entier naturel n .

- Initialisation : $u_0 = 1$ et $u_1 = \sqrt{2}$, donc $u_1 > u_0$, donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.

- Hérédité : on suppose que pour un entier k fixé, $u_{k+1} > u_k$.

Alors, $f(u_{k+1}) > f(u_k)$ car f est croissante, soit : $u_{k+2} > u_{k+1}$.

Ainsi, $\mathcal{P}_k \Rightarrow \mathcal{P}_{k+1}$ donc l'hérédité est vérifiée.

La propriété est donc vraie pour tout entier naturel n et donc (u_n) est croissante.

Nombres complexes

1. $|z| = \sqrt{\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{6}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{2} + \frac{27}{2}} = \sqrt{\frac{36}{2}} = \frac{6}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$.

$$z = 3\sqrt{2} \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 3\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{3}}.$$

2. $z = 6e^{i\frac{\pi}{6}} = 6 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = 6 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} \right) = 3\sqrt{3} + 3i$.

3. a. $Z = \frac{z-i}{z-3} = \frac{z-z_A}{z-z_B}$ est un imaginaire pur $\iff \arg Z = \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$.

Or, $\arg Z = (\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA})$ donc l'ensemble des points M est le cercle de diamètre [AB] privé de B (car Z existe si $z \neq 3$).

b. $Z = \frac{z-i}{z-3} = \frac{z-z_A}{z-z_B}$ est un réel $\iff \arg Z = 0 \pmod{\pi}$.

Or, $\arg Z = (\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA})$ donc l'ensemble des points M est la droite (AB) privée de B (car Z existe si $z \neq 3$).

c. $|Z| = \left| \frac{z-i}{z-3} \right| = \left| \frac{z-z_A}{z-z_B} \right| = \frac{MA}{MB} = 1$ donc M est sur la médiatrice de [AB].

4. $\Delta = 9 - 4 \times 2 \times 11 = 9 - 88 = -79$ donc $z_1 = \frac{-3 + i\sqrt{79}}{4}$ et $z_2 = \frac{-3 - i\sqrt{79}}{4}$.

$$5. z_{\overrightarrow{AB}} = b - a = 2\sqrt{3} - \sqrt{2} + i(3\sqrt{2} - \sqrt{3}).$$

$$z_{\overrightarrow{AC}} = c - a = 9 - \sqrt{2} + i(11 - \sqrt{3}).$$

$$q_1 = \frac{9 - \sqrt{2}}{2\sqrt{3} - \sqrt{2}} = \frac{(9 - \sqrt{2})(2\sqrt{3} + \sqrt{2})}{(2\sqrt{3} - \sqrt{2})(2\sqrt{3} + \sqrt{2})} = \frac{18\sqrt{3} + 9\sqrt{2} - 2\sqrt{6} - 2}{14} \approx 2,64$$

et

$$q_2 = \frac{11 - \sqrt{3}}{3\sqrt{2} - \sqrt{3}} = \frac{(11 - \sqrt{3})(3\sqrt{2} + \sqrt{3})}{(3\sqrt{2} - \sqrt{3})(3\sqrt{2} + \sqrt{3})} = \frac{33\sqrt{2} + 11\sqrt{3} - 3\sqrt{6} - 3}{15} \approx 3,69$$

donc $q_1 \neq q_2$, ce qui signifie que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires, et donc que les points ne sont pas alignés.

$$6. z = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{5}} \text{ donc } z^{10} = \sqrt{2}^{10} e^{i\frac{\pi}{5} \times 10} = 2^5 e^{i \times 2\pi} = 32.$$

Probabilités

$$1. \quad a. P(D) = 1 - 0,28 - 0,52 = 0,2.$$

$$b. P_G(\overline{T}) = 1 - 0,8 = 0,2 \text{ et } P_C(T) = 1 - 0,25 = 0,75.$$

$$c. 0,28 \times 0,8 + 0,52 \times 0,75 + 0,2 \times P_D(T) = 0,674 \text{ (formule des probabilités totales)} \\ \text{donc } P_C(T) = 0,3.$$

$$d. P_T(C) = \frac{P(C \cap T)}{P(T)} = \frac{0,52 \times 0,75}{0,674} \approx 0,579.$$

$$2. X \text{ suit la loi binomiale de paramètres } n = 40 \text{ et } p = 0,47.$$

$$a. P(X = 20) \approx 0,1166.$$

$$b. P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - (1 - 0,47)^{40} \approx 0,9999999999991.$$

$$c. f = \frac{17}{40} = 0,425 \text{ est la fréquence observée des billes bleues. L'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95\% de la fréquence de billes bleues est :}$$

$$I = \left[0,47 - 1,96\sqrt{\frac{0,47 \times 0,53}{100\,000}}; 0,47 + 1,96\sqrt{\frac{0,47 \times 0,53}{100\,000}} \right] \approx [0,467; 0,473]$$

$f \notin I$ donc cet échantillon de 40 billes n'est pas représentatif du sac de billes.

$$3. X \text{ suit la loi uniforme sur } [0; 30].$$

$$P(X \geq 10) = \frac{30 - 10}{30 - 0} = \frac{2}{3}.$$

$$4. P(X \geq 8) = 1 - e^{-8\lambda} = 0,5 \text{ donc } e^{-8\lambda} = 0,5, \text{ soit } -8\lambda = \ln 0,5 = -\ln 2, \text{ d'où } \lambda = \frac{\ln 2}{8}.$$

$$5. \quad a. 0,477 = \frac{0,954}{5}. \text{ Or, } P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) = 0,954 \text{ donc } 2\sigma = 15,6 - 14 = 1,6, \text{ soit } \sigma = 0,8.$$

$$b. P(X \geq 17) \approx 9 \times 10^{-5}.$$

$$6. \text{ On pose } Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{X - \mu}{3} \text{ qui, d'après le cours, suit la loi } \mathcal{N}(0; 1).$$

$$P(X \leq 16) = 0,32 \iff P\left(Z \leq \frac{16 - \mu}{3}\right) = 0,32$$

La calculatrice nous donne (avec la fonction invN) : $\frac{16 - \mu}{3} \approx -0,467698799115$, soit $16 - \mu \approx -1,4$ et donc $\mu \approx 17,4$.

7. L'amplitude de l'intervalle de confiance est $\frac{2}{\sqrt{n}}$ donc on cherche n tel que $\frac{2}{\sqrt{n}} \geq 0,1$,
soit $\frac{\sqrt{n}}{2} \geq 10$, soit $\sqrt{n} \geq 20$ et donc $n > 20^2$, soit $n \geq 400$.

Géométrie dans l'espace

1. $A \in \mathcal{D}$: pour $t = 0$ dans la représentation paramétrique de $\mathcal{D}$, on obtient les coordonnées de A.
2. $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ (coefficients de t dans la représentation paramétrique de $\mathcal{D}$).
3. $\vec{u}$ est aussi un vecteur normal à $\mathcal{P}$ (coefficients de x, y et z dans l'équation cartésienne).
4. Le coefficient directeur de $\mathcal{D}$ est normal à $\mathcal{P}$ donc $\mathcal{D}$ est orthogonale à $\mathcal{P}$.
5. On remplace x, y et z dans l'équation cartésienne :

$$3(2+3t) + (-1+t) - 2(-2t) + 8 = 0 \Leftrightarrow 6+9t-1+t+4t+8=0 \Leftrightarrow 14t = -13 \Leftrightarrow t = -\frac{13}{14}.$$

D'où :

$$\begin{cases} x = 2 - 3 \times \frac{13}{14} = -\frac{11}{14} \\ y = -1 - \frac{13}{14} = -\frac{27}{14} \\ z = 2 \times \frac{13}{14} = \frac{13}{7} \end{cases} \quad \text{donc} \quad H\left(-\frac{11}{14}; -\frac{27}{14}; \frac{13}{7}\right)$$

6. $3x_B + y_B - 2z_B + 8 = -3 + 1 - 6 + 8 = 0$ donc B est sur $\mathcal{P}$. Idem pour C.

7. $\overrightarrow{HC} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{11}{14} \\ -7 + \frac{27}{14} \\ 2 - \frac{13}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{25}{14} \\ -\frac{71}{14} \\ \frac{1}{7} \end{pmatrix}$ donc :

$$(HC) : \begin{cases} x = 1 + \frac{25}{14}t \\ y = -7 - \frac{71}{14}t \\ z = 2 + \frac{1}{7}t \end{cases}$$

8. $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 1 - (-1) \\ -7 - 1 \\ 2 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{HC} = \begin{pmatrix} \frac{25}{14} \\ -\frac{71}{14} \\ \frac{1}{7} \end{pmatrix}$.

$\frac{25}{14} = \frac{25}{28}$ et $\frac{-71}{-8} = \frac{71}{102} \neq \frac{25}{28}$ donc les vecteurs ne sont pas colinéaires, et donc H, B et C ne sont pas alignés.

9. $\overrightarrow{HA} = \begin{pmatrix} 2 + \frac{11}{14} \\ -1 + \frac{27}{14} \\ 0 - \frac{13}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{39}{14} \\ \frac{13}{14} \\ -\frac{13}{7} \end{pmatrix}$ donc $AH = \sqrt{\left(\frac{39}{14}\right)^2 + \left(\frac{13}{14}\right)^2 + \left(\frac{13}{7}\right)^2} = \frac{13\sqrt{14}}{14}$.

$\overrightarrow{HB} = \begin{pmatrix} -1 + \frac{11}{14} \\ 1 + \frac{27}{14} \\ 3 - \frac{13}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{14} \\ \frac{41}{14} \\ \frac{8}{7} \end{pmatrix}$ donc $BH = \frac{\sqrt{1946}}{14}$.

D'après la question 7., $HC = \frac{9\sqrt{70}}{14}$.

10. a. $\overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{HC} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{14} \\ \frac{41}{14} \\ \frac{8}{7} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{25}{14} \\ -\frac{71}{14} \\ \frac{1}{7} \end{pmatrix} = -\frac{3}{14} \times \frac{25}{14} + \frac{41}{14} \times \left(-\frac{71}{14}\right) + \frac{8}{7} \times \frac{1}{7} = -\frac{211}{14}$.

b. $\overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{HC} = HB \times HC \times \cos(\overrightarrow{HB}, \overrightarrow{HC})$ donc $\cos(\overrightarrow{HB}, \overrightarrow{HC}) = \frac{-\frac{211}{14}}{\frac{\sqrt{1946}}{14} \times \frac{9\sqrt{70}}{14}} \approx -0,889298$.

Or, pour tout x , $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ donc $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$.

Ainsi, $\sin^2(\overrightarrow{HB}, \overrightarrow{HC}) \approx 1 - (-0,889298)^2 \approx 0,209$, soit $\sin \widehat{H} \approx 0,457$.

L'aire du triangle HBC est donc égale à $\frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{1946}}{14} \times \frac{9\sqrt{70}}{14} \times 0,457 \approx 3,87$.

11. La hauteur de cette pyramide est [AH] donc le volume est :

$$\mathcal{V} \approx \frac{1}{3} \times 3,87 \times \frac{13\sqrt{14}}{14} \approx 4,48.$$