

Exercice 1

PARTIE A

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$g(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}} + 2.$$

1. Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.

2. Calculer $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} g(x)$ puis $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} g(x)$.

La fonction g est-elle continue en 0 ?

3. Montrer que pour tout réel non nul, $g'(x) = \frac{1}{x^3}e^{-\frac{1}{x}}$.

4. En déduire le signe de $g'(x)$ puis les variations de g sur son domaine de définition.

5. Montrer qu'il existe une unique solution sur $[-1; 0[$, notée α , à l'équation $g(x) = 0$.
Donner une valeur approchée à 10^{-2} près de α .

PARTIE B

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x) = xe^{-\frac{1}{x}} + 2x - 1.$$

1. Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

2. Calculer $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x)$ puis $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x)$.

La fonction f est-elle continue en 0 ?

3. Montrer que la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = 3x - 2$ est une asymptote à la courbe représentative de f en $+\infty$.

On pourra poser $X = -\frac{1}{x}$ puis se ramener à l'expression $\frac{1 - e^X}{X} + 1$.

4. Montrer que $f'(x) = g(x)$.

5. En déduire les variations de f sur $\mathbb{R}^*$.

Exercice 2

Une équipe de statisticiens propose les modèles suivants pour comparer l'évolution future de la population française et de la population allemande.

On note u_n la population de l'Allemagne estimée en millions d'habitants au 1^{er} janvier de l'année $2010 + n$. On a alors $u_0 = 81,2$ et $u_{n+1} = 0,998u_n + 0,2$.

On note v_n la population de la France estimée en millions d'habitants au 1^{er} janvier de l'année $2010 + n$. On a alors $v_0 = 63,2$ et $v_{n+1} = 1,002v_n + 0,1$.

On considère l'algorithme suivant :

Algorithme

```

> Entrées
    | u et v : nombres réels
    | n : nombre entier

> Traitement
    | Affecter à u la valeur 81,2
    | Affecter à v la valeur 63,2
    | Affecter à n la valeur 0
    | Tant que |u-v| ≥ 15
        | Affecter à u la valeur 0.998u+0.2
        | Affecter à v la valeur 1.002v+0.1
        | Affecter à n la valeur n+1
    | Fin du Tant que

> Sortie
    | Afficher n
    
```

1. (a) Recopier et compléter le tableau suivant (arrondir les résultats à 10^{-3}) :

n	0	1	2	3
u_n	81,2			
v_n	63,2			
$ u_n - v_n $				

- (b) Un élève de Terminale programme cet algorithme sur sa calculatrice. Son programme affiche « 16 ».
- Son programme retourne-t-il le bon résultat ? À quoi ce dernier correspond-il ?
2. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $u_n = -18,8 \times 0,998^n + 100$.
On admettra que $v_n = 113,2 \times 1,002^n - 50$.
3. (a) Montrer que la suite (u_n) converge et donner sa limite.
- (b) Montrer que la suite (v_n) diverge.

Exercice 3

PARTIE A

On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = x^2 \ln x + 3x - 1.$$

1. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ puis $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
2. Montrer que f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.
3. En déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]0; 1]$.

PARTIE B

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{3} \\ u_{n+1} = \frac{1}{3} (1 - u_n^2 \ln(u_n)) \end{cases}$$

1. Calculer u_1 , u_2 et u_3 (On donnera les valeurs approchées à 10^{-3} près).
2. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $\frac{1}{3} \leq u_n \leq \frac{1}{2}$.
3. Montrer que (u_n) est croissante.
En déduire que (u_n) est convergente.
4. Montrer alors que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha$.
En déduire, à l'aide de votre calculatrice, une valeur approchée de α à 10^{-7} près.

Exercice 4

Dans le plan complexe, on considère le point Ω d'affixe $\omega = 1 + i$.

Pour tout entier naturel n tel que $0 \leq n \leq 2$, on considère les points A_n d'affixes respectives $z_n = \omega + e^{\frac{2n\pi i}{3}}$.

1. Calculer $\arg\left(\frac{z_1 - \omega}{z_0 - \omega}\right)$.
Comment peut-on interpréter ce résultat géométriquement ?
2. Calculer $\arg\left(\frac{z_2 - \omega}{z_1 - \omega}\right)$.
3. Quelle est la nature du triangle $A_0A_1A_2$? Justifier.
4. Donner une méthode pour construire un triangle équilatéral à l'aide des nombres complexes.

Exercice 5

Le plan est rapporté à un repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

On considère l'application f définie de $\mathbb{C}^*$ sur $\mathbb{C}^*$ par :

$$f : z \mapsto \frac{1}{\bar{z}}.$$

1. Trouver tous les points fixes de f , c'est-à-dire tous les points d'affixe z tels que $f(z) = z$. Quel ensemble cela représente-t-il ?
2. Quel est l'ensemble image d'un cercle de centre O et de rayon $r > 0$?
3. (a) Montrer que si $z = re^{i\theta}$ est l'affixe d'un point M appartenant à la droite d'équation $x = 1$, alors $f(z) = \cos \theta e^{i\theta}$.
(b) Pour cette question, on pourra utiliser un outil informatique (celui qui semble le plus pertinent : tableur, calculatrice, Xcas, GeoGebra, AlgoBox, ...).
Prendre différentes valeurs de θ sur $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, puis construire les points d'affixe $f(z)$.
Que peut-on conjecturer quant à l'ensemble image de la droite d'équation $x = 1$?
4. S'inspirer de la question précédente pour trouver l'ensemble image de la droite d'équation $y = 1$.

Exercice 6

Les résultats seront arrondis à 10^{-3} près lorsque nécessaire.

Dans une usine, on utilise deux machines A et B pour fabriquer des pièces.

1. La machine A assure 40% de la production et la machine B en assure 60%.
On estime que 10% des pièces issues de la machine A ont un défaut et que 9% des pièces issues de la machine B ont un défaut.
On choisit une pièce au hasard et on considère les événements suivants :
 - A : « La pièce est produite par la machine A »
 - B : « La pièce est produite par la machine B »
 - D : « La pièce a un défaut ».
 - $\bar{D}$, l'événement contraire de l'événement D .
 - (a) Traduire la situation à l'aide d'un arbre pondéré.
 - (b) Calculer la probabilité que la pièce choisie présente un défaut et ait été fabriquée par la machine A.
 - (c) Démontrer que la probabilité $P(D)$ de l'événement D est égale à 0,094.
 - (d) On constate que la pièce choisie a un défaut.
Quelle est la probabilité que cette pièce provienne de la machine A ?
2. On examine 10 pièces choisies au hasard dans la production de la machine A. On assimile ces 10 tirages à des tirages successifs indépendants et avec remise.
On note X le nombre de pièces qui sont conformes dans l'échantillon de 10 pièces.
 - (a) Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale et préciser ses paramètres.
 - (b) Déterminer $P(X \geq 5)$ (on donnera la valeur la plus précise possible).

Correction

Exercice 1

PARTIE A

1. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$ donc :

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1$
- $\lim_{X \rightarrow 0} e^X = 1$ donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-\frac{1}{x}} = 1$

Ainsi, par produit, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}} \right] = 1$ et donc $\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 3}$.

Par un raisonnement analogue, on trouve $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 3}$

En effet, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$.

2. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x} = -\infty$ donc :

- $\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(1 + \frac{1}{x}\right) = -\infty$
- $\lim_{X \rightarrow +\infty} e^X = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{-\frac{1}{x}} = +\infty$.

Ainsi, par produit, $\lim_{x \rightarrow 0^-} \left[\left(1 + \frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}} \right] = -\infty$ et par somme, on a $\boxed{\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = -\infty}$.

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ donc :

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 + \frac{1}{x}\right) = +\infty$
- $\lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-\frac{1}{x}} = 0$.

On a donc une indétermination de la forme « $\infty \times 0$ ».

Développons $f(x)$:

$$f(x) = e^{-\frac{1}{x}} + \frac{1}{x} e^{-\frac{1}{x}} + 2.$$

Nous savons que $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-\frac{1}{x}} = 0$ et que le « 2 » ne va pas nous déranger dans nos calculs.

Posons alors $X = -\frac{1}{x}$. Ainsi, $\lim_{x \rightarrow 0^+} X = -\infty$ et $\frac{1}{x} e^{-\frac{1}{x}} = -X e^X$.

Ainsi, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} e^{-\frac{1}{x}} \right) = \lim_{X \rightarrow -\infty} (-X e^X) = 0$ (d'après le cours).

Par comme, on obtient alors $\boxed{\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 2}$.

$\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$; par conséquent, g n'est pas continue en 0.

3. g est de la forme $uv + 2$ où :

- $u(x) = 1 + \frac{1}{x}$ donc $u'(x) = -\frac{1}{x^2}$
- $v(x) = e^{-\frac{1}{x}}$ donc $v'(x) = \frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}$

Ainsi,

$$\begin{aligned} g'(x) &= (u'v + uv')(x) + 0 \\ &= -\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}} + \left(1 + \frac{1}{x}\right) \times \frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}} \\ &= \cancel{-\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}} + \cancel{\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}} + \frac{1}{x^3}e^{-\frac{1}{x}} \\ \boxed{g'(x) = \frac{1}{x^3}e^{-\frac{1}{x}}} \end{aligned}$$

4. $g'(x)$ est du signe de $\frac{1}{x^3}$, donc du signe de x , car une exponentielle est toujours strictement positive. D'où le tableau suivant :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$-$		$+$
$g(x)$	$3 \longrightarrow -\infty$	$2 \longrightarrow 3$	

5. g est continue et strictement décroissante sur $[-1; 0[$.

De plus, « 0 » est une valeur intermédiaire entre $g(-1) = 2 > 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = -\infty$.

Ainsi, d'après le corollaire du Théorème des Valeurs Intermédiaires (le « Théorème de la bijection »), il existe une unique valeur α sur $[-1; 0[$ telle que $g(\alpha) = 0$.

À l'aide de la calculatrice, on trouve $g(-0,69) \approx 0,086$ et $g(-0,68) \approx -0,0479$.

Donc $\alpha \approx -0,68$.

PARTIE B

1. • $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{1}{x}\right) = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-\frac{1}{x}} = \lim_{X \rightarrow 0} e^X = 1$.

Ainsi, par produit, $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^{-\frac{1}{x}} = -\infty$.

De plus, $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x - 1) = -\infty$ donc, par somme, $\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty}$.

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-\frac{1}{x}} = 1$. Ainsi, par produit, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (xe^{-\frac{1}{x}}) = +\infty$.

De plus, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - 1) = +\infty$ donc, par somme, $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty}$.

2. • $\lim_{x \rightarrow 0^-} xe^{-\frac{1}{x}} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{X}e^X\right) = \lim_{X \rightarrow +\infty} \left(-\frac{e^X}{X}\right) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0^-} (2x - 1) = -1$ donc, par somme, $\boxed{\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty}$.

• $\lim_{x \rightarrow 0^+} xe^{-\frac{1}{x}} = \lim_{X \rightarrow -\infty} \left(-\frac{1}{X}e^X\right) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} (2x - 1) = -1$ donc, par somme, $\boxed{\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -1}$.

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ donc f n'est pas continue en 0.

3. Posons $h(x) = f(x) - (3x - 2) = xe^{-\frac{1}{x}} - x + 1$.

Posons $X = -\frac{1}{x}$; alors, $h(X) = -\frac{1}{X}e^X + \frac{1}{X} + 1 = \frac{1 - e^X}{X} + 1$.

Or, $\lim_{X \rightarrow 0} \frac{e^X - 1}{X} = 1$ (d'après le cours) donc $\lim_{X \rightarrow 0} \frac{1 - e^X}{X} = -1$ et donc $\lim_{X \rightarrow 0} \left(\frac{1 - e^X}{X} + 1 \right) = 0$.

Or, $\lim_{x \rightarrow +\infty} X = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{X \rightarrow 0} h(X) = 0$.

Ainsi, la différence $f(x) - (3x - 2)$ tend vers 0 à l'infini; cela signifie que la courbe représentative de f admet en $+\infty$ une asymptote oblique d'équation $y = 3x - 2$.

4. $f'(x) = e^{-\frac{1}{x}} + x \times \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} + 2$

$$= \left(1 + \frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}} + 2$$

$f'(x) = g(x)$

5. Le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x)$ d'où le tableau suivant :

x	$-\infty$	α	0	$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$	$-\infty$		$f(\alpha)$	$+\infty$
			-1	

Exercice 2

1. (a) Le tableau complété est le suivant :

n	0	1	2	3
u_n	81,2	81,238	81,275	81,313
v_n	63,2	63,426	63,653	63,881
$u_n - v_n$	18	17,811	17,622	17,432

(b) Pour $n = 15$, $u_n - v_n \approx 15,112$ et pour $n = 16$, $u_n - v_n \approx 14,718$.

Ainsi, $n = 16$ est bien la première valeur de n pour laquelle $u_n - v_n < 15$.

Cela signifie qu'en $2010 + 16$, soit en 2026, la différence entre les deux populations sera inférieure à 15 millions d'habitants.

2. Soit $(\mathcal{P}_n)$ la propriété : « $u_n = -18,8 \times 0,998^n + 100$ ».

- **Initialisation.**

$$(\mathcal{P}_0) : u_0 = -18,8 \times 0,998^0 + 100 = -18,8 + 100 = 81,2.$$

Ainsi, $(\mathcal{P}_0)$ est vraie.

- **Hérédité.**

Supposons que pour un certain entier n donnée, $(\mathcal{P}_n)$ soit vraie (hypothèse de récurrence : HR). Alors,

$$u_{n+1} = 0,998u_n + 0,2 \quad (\text{par définition})$$

$$= 0,998(-18,8 \times 0,998^n + 100) + 0,2 \quad (\text{par HR})$$

$$= -18,8 \times 0,998^n \times 0,998 + 100 \times 0,998 + 0,2$$

$$= -18,8 \times 0,998^{n+1} + 99,8 + 0,2$$

$$= -18,8 \times 0,998^{n+1} + 100$$

$(\mathcal{P}_{n+1})$ est donc vraie. L'hérédité est alors vérifiée.

Ainsi, $(\mathcal{P}_n)$ est vraie pour tout entier naturel n .

3. (a) On sait que pour $0 < q < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$.

Ainsi, $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,998^n = 0$, ce qui implique que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 100$.

Par conséquent, (u_n) converge et sa limite vaut 100.

(b) On sait que pour $q > 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$. Donc (v_n) diverge.

Exercice 3

PARTIE A

1. • On sait que $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 \ln x) = 0$ (d'après le cours). De plus, $\lim_{x \rightarrow 0} (3x - 1) = -1$.

Ainsi, par somme, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -1$.

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 \ln x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x - 1) = +\infty$.

Ainsi, par somme, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

$$\begin{aligned} 2. \quad f'(x) &= 2x \ln x + x^2 \times \frac{1}{x} + 3 \\ &= 2x \ln x + x + 3 \end{aligned}$$

On ne peut pas déterminer le signe de $f'(x)$ donc on calcule $f''(x)$:

$$\begin{aligned} f''(x) &= 2 \ln x + 2x \times \frac{1}{x} + 1 \\ &= 2 \ln x + 3 \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} f''(x) > 0 &\Leftrightarrow 2 \ln x + 3 > 0 \\ &\Leftrightarrow \ln x > -\frac{3}{2} \\ &\Leftrightarrow x > e^{-\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

D'où le tableau suivant :

x	0	$e^{-\frac{3}{2}}$	$+\infty$
$f''(x)$		- 0 +	
$f'(x)$			
$f(x)$		+ +	
$f(x)$			

$$\begin{aligned} \bullet \quad f'\left(e^{-\frac{3}{2}}\right) &= 2e^{-\frac{3}{2}} \times \left(-\frac{3}{2}\right) + e^{-\frac{3}{2}} + 3 \\ &= -2e^{-\frac{3}{2}} + 3 \\ &\approx 2,55 > 0 \end{aligned}$$

La fonction f est donc strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

3. f est continue et strictement croissante sur $]0; 1]$. De plus, 0 est une valeur intermédiaire entre $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -1$ et $f(1) = 2$.

Ainsi, d'après le corollaire du Théorème des Valeurs Intermédiaires (théorème de la bijection), il existe une unique valeur α sur $]0; 1]$ telle que $f(\alpha) = 0$.

PARTIE B

1. • $u_1 = \frac{1}{3} \left(1 - \left(\frac{1}{3} \right)^2 \times \ln \left(\frac{1}{3} \right) \right) = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{\ln 3}{9} \right) \approx 0,374$

• $u_2 \approx \frac{1}{3} \left(1 - 0,374^2 \ln 0,374 \right) \approx 0,379$

• $u_3 \approx \frac{1}{3} \left(1 - 0,379^2 \ln 0,379 \right) \approx 0,380$

2. Soit $(\mathcal{P}_n)$ la propriété : « $\frac{1}{3} \leq u_n \leq \frac{1}{2}$ ».

• **Initialisation.**

$(\mathcal{P}_0) : \frac{1}{3} \leq u_0 \leq \frac{1}{2}$.

Or, $u_0 = \frac{1}{3}$ donc $(\mathcal{P}_0)$ est vraie.

• **Hérédité.**

Supposons que pour un entier n donné, $(\mathcal{P}_n)$ soit vraie.

Ainsi,

$$\ln \frac{1}{3} \leq \ln(u_n) \leq \ln \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad 0 \leq u_n^2 \leq \frac{1}{4}.$$

On en déduit alors :

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \ln \frac{1}{2} &\leq u_n^2 \ln(u_n) \leq 0 \\ \Rightarrow 0 &\leq -u_n^2 \ln(u_n) \leq -\frac{1}{4} \ln \frac{1}{2} \\ \Rightarrow 1 &\leq 1 - u_n^2 \ln(u_n) \leq 1 - \frac{1}{4} \ln \frac{1}{2} \\ \Rightarrow \frac{1}{3} &\leq \frac{1}{3} \left(1 + u_n^2 \ln(u_n) \right) \leq \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{4} \ln \frac{1}{2} \right) \end{aligned}$$

Or, $\frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{4} \ln \frac{1}{2} \right) < \frac{1}{2}$

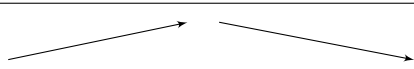
$$\Rightarrow \frac{1}{3} \leq u_{n+1} < \frac{1}{2}$$

L'hérédité est alors vérifiée.

Ainsi, $(\mathcal{P}_n)$ est vraie pour tout entier naturel n .

3. Posons $g(x) = \frac{1}{3}(1 - x^2 \ln x)$ afin d'avoir $u_{n+1} = g(u_n)$.

$g'(x) = -\frac{1}{3}x(2 \ln x + 1)$ et $2 \ln x + 1 > 0 \Leftrightarrow x > e^{-\frac{1}{2}} \approx 0,6$. D'où le tableau suivant :

x	0	$e^{-\frac{1}{2}}$	$+\infty$
$g'(x)$		+	0 -
g			

h est donc croissante sur $\left[\frac{1}{3}; \frac{1}{2} \right]$, ce qui implique que $h(u_n) > u_n$, soit $u_{n+1} > u_n$.

(u_n) est donc croissante.

De plus, elle est bornée (d'après la question précédente), donc majorée. Or, toute suite croissante et majorée converge. Donc (u_n) converge.

4. Posons ℓ la limite de (u_n) ; alors puisque h est continue sur $\left[\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right]$, $\ell = h(\ell)$. Résolvons donc l'équation $x = h(x)$:

$$\begin{aligned} x = h(x) &\Leftrightarrow x = \frac{1}{3}(1 - x^2 \ln x) \\ &\Leftrightarrow 3x = 1 - x^2 \ln x \\ &\Leftrightarrow x^2 \ln x + 3x - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow f(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = \alpha \quad (\text{d'après la partie A}) \end{aligned}$$

Il existe donc une seule solution à l'équation $x = h(x)$. Ainsi, $\ell = \alpha$.

À l'aide de la calculatrice, on trouve : $\alpha \approx 0,3798938$.

N.B. Remarquez la vitesse de convergence de la suite (u_n) : on arrive à une valeur approchée de α à 10^{-9} près dès u_9 .

Exercice 4

$$1. \arg\left(\frac{z_1 - \omega}{z_0 - \omega}\right) = \arg\left(\frac{e^{\frac{2i\pi}{3}}}{e^0}\right) = \frac{2\pi}{3}.$$

On peut en déduire que $(\overrightarrow{\Omega A_0}, \overrightarrow{\Omega A_1}) = \frac{2\pi}{3}$.

$$2. \arg\left(\frac{z_2 - \omega}{z_1 - \omega}\right) = \arg\left(\frac{e^{\frac{4i\pi}{3}}}{e^{\frac{2i\pi}{3}}}\right) = \arg\left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\right) = \frac{2\pi}{3}.$$

3. Des questions précédents, on déduit que $(\overrightarrow{\Omega A_0}, \overrightarrow{\Omega A_1}) = (\overrightarrow{\Omega A_1}, \overrightarrow{\Omega A_2}) = \frac{2\pi}{3}$, ce qui implique que $A_0 A_1 A_2$ est équilatéral.

4. Pour construire un triangle équilatéral à l'aide des nombres complexes, il suffira de prendre un point quelconque d'affixe ω , puis de construire 3 autres points d'affixes z_n précédemment définis.

Exercice 5

$$1. f(z) = z \Leftrightarrow \frac{1}{\bar{z}} = z \Leftrightarrow z\bar{z} = 1 \Leftrightarrow |z| = 1.$$

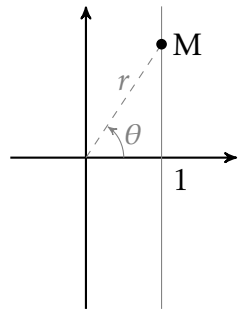
Ainsi, tous les points fixes de f sont les points qui se trouvent sur le cercle unité.

$$2. \text{Posons } z = re^{i\theta}. \\ \text{Alors, } f(z) = \frac{1}{re^{-i\theta}} = \frac{1}{r}e^{i\theta}.$$

Ainsi, $f(z)$ est l'affixe d'un point du cercle de centre O et de rayon $\frac{1}{r}$.

L'image du cercle $\mathcal{C}_{(O,r)}$ sera donc le cercle $\mathcal{C}'_{(O,\frac{1}{r})}$.

3. (a) Faisons un schéma :



On a alors $\cos \theta = \frac{1}{r}$.

Or, $f(z) = \frac{1}{re^{-i\theta}} = \frac{1}{r}e^{i\theta}$.

Donc, $f(z) = \cos \theta e^{i\theta}$.

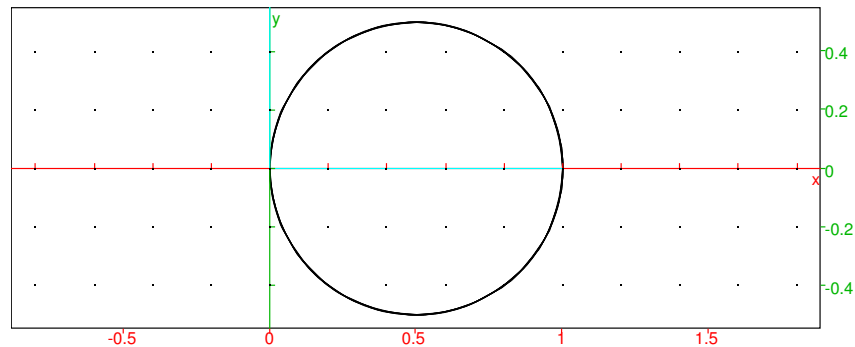
(b) On construit, à l'aide d'un logiciel, tous les points de coordonnées $(\cos^2 \theta; \cos \theta \sin \theta)$ pour $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

En effet, $f(x) = \cos \theta e^{i\theta} = \cos \theta (\cos \theta + i \sin \theta) = \cos^2 \theta + i \cos \theta \sin \theta$.

Avec le logiciel Xcas, on tapera :

```
plotparam(cos(t)*cos(t)+i*cos(t)*sin(t),t)
```

et on obtiendra la figure suivante :



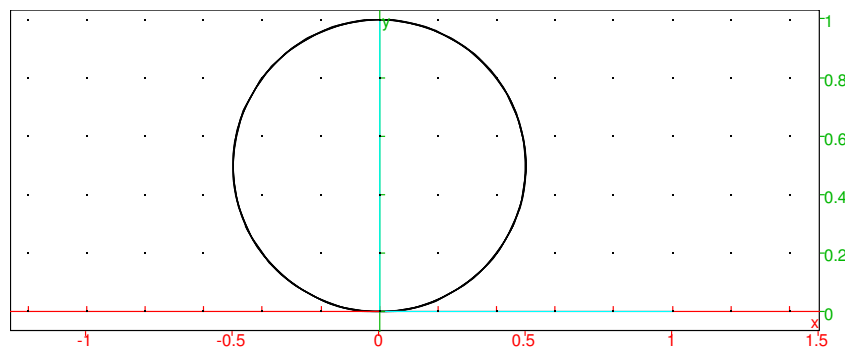
On peut donc conjecturer que l'image de la droite d'équation $x = 1$ est le cercle de centre $A\left(\frac{1}{2}; 0\right)$ et de rayon $\frac{1}{2}$.

4. Soit un point $M(re^{i\theta})$ sur la droite d'équation $y = 1$. Alors, $\sin \theta = \frac{1}{r}$ et donc $f(z) = \sin \theta e^{-i\theta}$.

En tapant sous Xcas :

```
plotparam(sin(t)*cos(t)+i*sin(t)*sin(t),t)
```

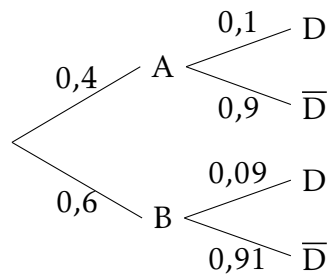
on obtient :



On peut donc conjecturer que l'image de la droite d'équation $y = 1$ est le cercle de centre $B\left(0; \frac{1}{2}\right)$ et de rayon $\frac{1}{2}$.

Exercice 6

1. (a) L'arbre pondéré traduisant la situation est le suivant :



- (b) La probabilité demandée est $P(A \cap D)$.

$$\begin{aligned} P(A \cap D) &= P_A(D) \times P(A) \\ &= 0,1 \times 0,4 \end{aligned}$$

$$\boxed{P(A \cap D) = 0,04}$$

- (c) D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} P(D) &= P(A \cap D) + P(B \cap D) \\ &= 0,04 + 0,6 \times 0,09 \end{aligned}$$

$$\boxed{P(D) = 0,094}$$

- (d) La probabilité demandée est $P_D(A)$.

$$\begin{aligned} P_D(A) &= \frac{P(A \cap D)}{P(D)} \\ &= \frac{0,04}{0,094} \end{aligned}$$

$$\boxed{P_D(A) \approx 0,425}$$

2. (a) Les 10 tirages sont assimilés à des tirages successifs indépendants et avec remise. Chaque tirage donne deux issues seulement : succès (la pièce choisie est conforme) ou échec (elle ne l'est pas). C'est donc un schéma de Bernoulli répété 10 fois indépendamment : X suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 1 - 0,094 = 0,906$.

- (b) $P(X \geq 5) = 1 - P(X < 4)$
 $= 1 - 0,00010362860317$

$$\boxed{P(X \geq 5) \approx 0,999896371397}$$