

Exercice 1 (suites) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x(1 - x)$$

et la suite (u_n) définie par son premier terme $u_1 = 1$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = u_n - u_n^2.$$

1. Montrer que f est strictement croissante sur $\left[0; \frac{1}{2}\right]$.

2. Montrer que pour tout entier naturel positif k ,

$$\frac{k-1}{k^2} \leq \frac{1}{k+1}.$$

3. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n non nul,

$$0 \leq u_n \leq \frac{1}{n}.$$

4. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Exercice 2 (limites de fonctions) Calculer les limites de fonctions suivantes.

1. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{2x+3} - 3}{x - 3}$

3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + x \cos(x^2)}{1 + x^2}$

2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cos(x) - x}{\sin(x) + 2x}$

4. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{5x^2 - 7x - 6}{-3x^2 + 2x + 8}$

Exercice 3 (étude de fonction) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{5\}$ par:

$$f(x) = \frac{3x^2 - 5x + 2}{x - 5}.$$

1. Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

2. Calculer $\lim_{\substack{x \rightarrow 5 \\ x < 5}} f(x)$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 5 \\ x > 5}} f(x)$.

3. Des questions précédentes, peut-on conclure que la courbe représentative de f admet des asymptotes (horizontales ou verticales) ? Justifier.

4. On cherche à déterminer les réels a , b et c tels que:

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x - 5}.$$

(a) Justifier que $\lim_{x \rightarrow 5} (x - 5)f(x) = c$.

Déterminer alors la valeur de c .

(b) Déterminer les valeurs de a et b .

5. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (3x + 10)]$.

Donner une interprétation graphique de ce dernier résultat.

6. Montrer que $f'(x) = \frac{3x^2 - 30x + 23}{(x - 5)^2}$.

7. En déduire un tableau de variations de f .