

Disponible sur *mathweb.fr*

116 exercices corrigés de mathématiques pour Terminale ES

Enseignement obligatoire et de spécialité

Stéphane PASQUET

12 juin 2018

Sommaire

Disponible sur <http://www.mathweb.fr>

12 juin 2018

Enseignement obligatoire

I Suites	2
I.1 Révisions de Première	2
I.2 Deux suites liées	2
I.3 Deux suites liées	3
I.4 Suite géométrique (Pondichéry 2013)	3
I.5 Suite géométrique (Polynésie 2013)	4
I.6 Suite arithmétique et suite géométrique	5
I.7 Suite arithmétique et suite géométrique	6
I.8 Suite arithmético-géométrique (Liban 2013)	7
I.9 Dans une association	8
I.10 Les cabris, c'est fini?	8
I.11 Limite et graphique	9
I.12 Flux migratoires d'une ville	9
II Continuité & dérivabilité	21
II.1 Fonction polynôme de degré 3	21
II.2 Intersection d'une courbe avec l'axe des abscisses	21
II.3 Tableau de variation	22
II.4 Nombre dérivé	22
II.5 Image, nombre dérivé, équation et tableau de signes	23
II.6 Image, nombre dérivé, équation et tableau de signes	23
II.7 Détermination de coefficients dans une expression	24
II.8 Détermination de coefficient dans une expression	24
II.9 Étude de $f(x) = \frac{x^3}{x^2-3}$	25
II.10 Détermination d'un paramètre pour tangente parallèle	25
II.11 Étude de la fonction $f : x \mapsto \frac{x^2-x-15}{x^2-2x+1}$	25
II.12 Étude complète de $f(x) = \frac{x^3+x-2}{x+1}$ avec fonction auxiliaire	26
II.13 Étude de $f(x) = \frac{2x^2+3x-9}{3-x}$	26
III Fonction exponentielle	37
III.1 Simplification d'écritures	37
III.2 Équations	37
III.3 Inéquations	37
III.4 Dérivées de fonctions exponentielles	38

III.5	À partir d'un graphique	38
III.6	Modélisation du taux d'équipement en smartphones	39
III.7	Taux de malades après injection d'un antidote	39
III.8	Prendre des initiatives	40
III.9	Étude de la fonction $3x + 1 + xe^{-x}$ (type bac)	40
IV	Logarithme népérien	51
IV.1	Simplification d'écritures	51
IV.2	Équations	51
IV.3	Inéquations	51
IV.4	Détermination de coefficients et équation de tangente	52
IV.5	Détermination de coefficients (le retour)	52
IV.6	Dérivation	52
IV.7	Étude de $x^2 + x + 1 - \frac{\ln x}{x}$ avec fonction auxiliaire	53
IV.8	Étude de $\frac{\ln x - x}{x+1}$ avec fonction auxiliaire	53
IV.9	Étude de la fonction $x^2 \ln(x) - 3x^2 + 5x - 1$	53
IV.10	Fonctions $x - \ln x$ et $x - \ln^2 x$	54
IV.11	Étude de la fonction $f(x) = \ln\left(\frac{x^2 + 2}{x^2 + 1}\right)$	55
IV.12	Étude de la fonction $1 - 2\ln x$	55
V	Convexité	71
V.1	Fonction $x^2 \ln(x) - 3x^2 + 5x - 1$	71
V.2	Convexité d'une fonction	71
V.3	Existence d'un point d'inflexion	71
V.4	Lectures graphiques	71
V.5	Lectures graphiques de f , f' et f''	73
V.6	La rumeur	74
VI	Intégration	81
VI.1	Calculs de primitives	81
VI.2	Calculs d'intégrales	81
VI.3	Une intégrale avec le logarithme népérien	81
VI.4	Aire sous une courbe (1)	82
VI.5	Aire sous une courbe (2)	83
VI.6	Aire entre deux courbes	83
VI.7	Prix moyen d'une machine-outil	84
VI.8	Population moyenne	84
VI.9	Fonction $x \mapsto \frac{1}{x \ln x}$	84
VII	Probabilités	92
VII.1	Dans un lycée	92
VII.2	Bac Asie juin 2008	93
VII.3	Union et intersection	93
VII.4	Parc informatique d'un lycée	94
VII.5	Une usine fabrique des sacs	95
VII.6	Loi binomiale & fonction « random »	95
VII.7	Lecteurs MP3 défectueux	96
VII.8	Société de sondage	97
VII.9	3 classes jouent	97
VII.10	Le tireur à l'arc	98

VII.11 Une histoire de montres	99
--	----

VIII Lois continues 112

VIII.1 À la caisse d'un supermarché	112
VIII.2 Temps de trajet	112
VIII.3 Feu tricolore	113
VIII.4 La partie de jeu vidéo	113
VIII.5 La livraison à domicile	113
VIII.6 Les premiers mots de la vie	114
VIII.7 Vaches laitières de race « Française Frisonne Pis Noir »	114
VIII.8 Test de conformité	114
VIII.9 Tests de Q.I.	115
VIII.10 Durée de vie d'un appareil	115
VIII.11 Trouver la bonne courbe	116
VIII.12 Trouver la moyenne et l'écart-type	117

IX Intervalle de fluctuation et estimation 125

IX.1 Les tickets du supermarché	125
IX.2 Contrôle de production	125
IX.3 Scénario catastrophe	125
IX.4 Extrait du bac 2016, Métropole	126
IX.5 Extrait du bac 2016, Amérique du Nord	126
IX.6 Le retour de Marisol	126

Enseignement de spécialité

X Matrices 132

X.1 Somme et différence de matrices	132
X.2 Produit de matrices	132
X.3 Recherche de matrices	133
X.4 Avec la calculatrice	133
X.5 Est-elle son inverse ?	133
X.6 Matrice avec paramètre	133
X.7 Résolution de systèmes linéaires	134
X.8 Trouver les coefficients d'un polynôme	134
X.9 Trouver les coefficients d'une fonction	134
X.10 Modèle fermé de Léontief	134

XI Graphes non orientés 141

XI.1 Les maisons	141
XI.2 Les maisons	141
XI.3 Dessiner sans lever la main	142
XI.4 Dans un parc d'attractions	142
XI.5 Dans un parc d'attractions (2)	142
XI.6 Union Européenne	143
XI.7 La tournée de la chanteuse	143
XI.8 Chemin le plus court	143
XI.9 Le politicien	144

XII Graphes orientés & probabilistes	154
XII.1 Site internet	154
XII.2 Le jeu de Fan Tan (Matrice, longueur d'une chaîne)	154
XII.3 Les entreprises de couches culottes	155
XII.4 Lucas le glandeur	155
XII.5 La côte de popularité de Squeezie	156
XII.6 Fumeurs et non-fumeurs	156
XII.7 Norman faisait des vidéos	157

Règles de navigation

Disponible sur <http://www.mathweb.fr>

12 juin 2018

Bonjour.

Avant toutes choses, je vous remercie d'avoir acquis cet ouvrage. J'espère qu'il vous satisfera pleinement.

J'ai souhaité créer ici un document dans lequel il est facile de naviguer. C'est la raison pour laquelle :

- À chaque énoncé d'exercices, vous pouvez cliquer sur le numéro de la page où se trouve le corrigé pour vous y rendre directement ;
- De même, quand vous êtes sur un corrigé, vous pouvez par un simple clic revenir à l'énoncé de l'exercice concerné ;
- De plus, à tout moment, vous pouvez retourner au sommaire en cliquant sur le petit carré ■ qui se trouve devant chaque titre.

Cette édition a été vérifiée avec attention. Cependant, l'erreur est humaine et malgré ma vigilance, il se pourrait qu'il y ait quelques erreurs. Si tel est le cas, ou si vous avez un doute, contactez-moi à l'aide du formulaire de contact sur mon site :

<http://www.mathweb.fr>

Dans ce cas, n'oubliez pas de préciser votre email (celui avec lequel vous avez acquis cet ouvrage) et le titre de l'ouvrage.

Stéphane Pasquet

Avant-propos

Disponible sur <http://www.mathweb.fr>

12 juin 2018

Cet ouvrage a été vérifié et complété le 12 juin 2018 afin de coller au programme de Terminale ES en vigueur.

Il n'existe qu'au format numérique, donc inutile de le chercher en librairie.

Vous n'y trouverez pas de rappels de cours sauf dans quelques corrigés, quand cela est nécessaire. En effet, j'estime qu'il y a assez de cours sur Internet pour que le lecteur ou la lectrice puisse trouver son bonheur ailleurs, y compris sur mon site.

Si vous avez quelques suggestions d'amélioration, ou si vous pensez avoir vu une erreur dans la correction d'un exercice, contactez moi sur la page de contact de mon site :

<https://www.mathweb.fr>

Bon travail !

Stéphane Pasquet



Première partie

Enseignement obligatoire

Suites

Disponible sur <http://www.mathweb.fr>

A Exercices d'application du cours

R Exercices de réflexion

✌ Exercice & corrigé relus avec attention pour éviter les erreurs

12 juin 2018

Suites géométriques

■ Exercice 1. Révisions de Première

★★★★☆

A

Corrigé page 10 ✌

(Source : tes-suites-10)

On considère la suite (u_n) de premier terme $u_0 = 0,5$ et telle que pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = 0,7 \times u_n.$$

- 1 Préciser la nature de la suite (u_n) .
- 2 Exprimer alors u_n en fonction de n .
- 3 Donner une valeur approchée de u_{15} au millième.

■ Exercice 2. Deux suites liées

★★★★☆

A

Corrigé page 10 ✌

(Source : tes-suites-11)

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = 1,2u_n \end{cases} \quad \text{et} \quad v_n = 10u_n.$$

- 1 Exprimer u_n en fonction de n .
- 2 Calculer v_0 , v_1 et v_2 .
- 3 Exprimer v_n en fonction de n .
Montrer que (v_n) est géométrique. Préciser alors sa raison.

■ Exercice 3. Deux suites liées

★★★★☆ R

(Source : tes-suites-12)

Corrigé page 11

On considère l'algorithme suivant :

Algorithme

Entrées

N prend la valeur 0

U prend la valeur 10

Traitement

Tant que $U \leq 50$

N prend la valeur $N+1$

U prend la valeur $U \times 1,5$

Fin du Tant que

Sortie

Afficher N

- 1 Compléter le tableau suivant à partir de cet algorithme, en ajoutant autant de colonnes nécessaires.

Valeurs de N	0	1	2	...
Valeurs de U	10	...	...	...
$U \leq 50$?	Oui	...		

- 2 Quel est le rôle de cet algorithme ?
- 3 Une firme possède 10 000 points de vente à travers le monde au 12 juin 2018. Chaque année, ce nombre est multiplié par 1,5.

Au bout de combien d'années la firme aura plus de 50 000 points de vente dans le monde ?

■ Exercice 4. Suite géométrique (Pondichéry 2013)

★★★★☆ R

(Source : tes-suites-01)

Corrigé page 11

Le 1^{er} janvier 2000, un client a placé 3 000 € à intérêts composés au taux annuel de 2,5 %.

On note C_n le capital du client au 1^{er} janvier de l'année 2000 + n , où n est un entier naturel.

- 1 Calculer C_1 et C_2 . Arrondir les résultats au centime d'euro.
- 2 Exprimer C_{n+1} en fonction de C_n . En déduire que, pour tout nombre entier naturel n , on a la relation :

$$C_n = 3000 \times 1,025^n.$$

3 On donne l'algorithme suivant :

Algorithme 1

Entrées
Saisir un nombre S supérieur à 3 000

Traitement
Affecter à n la valeur 0. Initialisation
Affecter à U la valeur 3 000. Initialisation
Tant que $U \leq S$
 n prend la valeur $n+1$
 U prend la valeur $U \times 1,025$
Fin du Tant que

Sortie
Afficher le nombre $2000+n$

a. Pour la valeur $S = 3\,300$ saisie, recopier et compléter autant que nécessaire le tableau suivant. Les résultats seront arrondis à l'unité.

Valeur de n	0	1	...	
Valeur de U	3 000			
Condition $U \leq S$	vrai			

b. En déduire l'affichage obtenu quand la valeur de S saisie est 3 300.

c. Dans le contexte de cet exercice, expliquer comment interpréter le nombre obtenu en sortie de cet algorithme quand on saisit un nombre S supérieur à 3 000.

4 Au 1^{er} janvier 2013, le client avait besoin d'une somme de 5 000 €. Montrer que le capital de son placement n'est pas suffisant à cette date.

5 Déterminer, en détaillant la méthode, à partir du 1^{er} janvier de quelle année le client pourrait avoir son capital initial multiplié par 10.

■ Exercice 5. Suite géométrique (Polynésie 2013)

★★★★☆ R

(Source : tes-suites-03)

Corrigé page 12

La production des perles de culture de Tahiti est une activité économique importante pour la Polynésie Française.

Les montants réalisés à l'exportation des produits perliers de 2008 à 2011 sont donnés dans le tableau suivant, en milliers d'euros.

Années	2008	2009	2010	2011
Valeurs brutes des produits perliers (en milliers d'euros)	81 295	66 052	64 690	63 182

Source : ISPF (Institut de Statistiques de Polynésie Française)

1 Montrer que le taux d'évolution annuel moyen des montants à l'exportation des produits perliers de Polynésie entre 2008 et 2011 est $-8,06\%$ arrondi au centième.

On admet pour la suite de l'exercice, que la production continuera à baisser de 8% par an à partir de 2011.

2 On considère l'algorithme suivant :

Algorithme 2

Entrées
Saisir un nombre positif P

Traitement
Affecter la valeur 0 à la variable N (*Initialisation*)
Affecter la valeur 63 182 à U (*Initialisation*)
Tant que U > P
 Affecter la valeur N+1 à N
 Affecter la valeur $0,92 \times U$ à U
Fin du Tant que
Affecter la valeur N+2011 à N

Sortie
Afficher N

Si on saisit $P = 50\,000$ en entrée, qu'obtient-on en sortie par cet algorithme ? Interpréter ce résultat dans le contexte de la production de perles.

- 3 Pour prévoir les montants réalisés à l'exportation des perles de Tahiti, on modélise la situation par une suite (u_n) . On note u_0 le montant en 2011, en milliers d'euros, et u_n le montant en $2011 + n$, en milliers d'euros. On a donc $u_0 = 63\,182$ et on suppose que la valeur baisse tous les ans de 8 %.
- Montrer que (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.
 - Exprimer, pour tout entier naturel n , u_n en fonction de n .
 - Avec ce modèle, quel montant peut-on prévoir pour l'exportation des produits perliers de Polynésie Française en 2016 ? On arrondira le résultat au millier d'euros.
- 4 Calculer le montant cumulé des produits perliers exportés que l'on peut prévoir avec ce modèle à partir de 2011 (comprise) jusqu'à 2020 (comprise). On donnera une valeur approchée au millier d'euros.

■ Exercice 6. Suite arithmétique et suite géométrique



(Source : tes-suites-06)

Corrigé page 13

On souhaite comparer l'évolution de deux capitaux.

Sophie possède 800 € d'économies début janvier 2018 ; ce capital augmente de 10 % à la fin de chaque mois.

Yves possède, lui, 1 000 € d'économies début janvier 2018. Ce capital augmente de 50 € à la fin de chaque mois.

1 Étude du capital de Sophie.

On note $u_0 = 800$ le capital initial début janvier 2018.

On note u_n le capital disponible au début du n -ième mois après janvier 2018 (n entier naturel non nul).

- Démontrer que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est géométrique de raison 1,1 et de premier terme 800.

- b. Calculer la somme dont dispose Sophie au début du mois de janvier de l'année suivante (au centime d'euro près).
- c. Calculer le pourcentage d'augmentation de son capital au bout d'une année complète (arrondi à l'entier).

2 Étude du capital d'Yves.

On note v_0 le capital initial de Yves au début de janvier 2018.

On note v_n son capital disponible au début du n -ième mois après janvier 2018 (n entier naturel non nul).

- a. Quelle est la nature de la suite $(v_n)_{n \geq 0}$? Quel est son premier terme ? Quelle est sa raison ?
- b. Calculer la somme dont dispose Yves au début du mois de janvier de l'année suivante (au centime d'euro près).
- c. Calculer le pourcentage d'augmentation de son capital au bout d'une année complète (arrondi à l'entier).

3 Déterminer, à l'aide de la calculatrice, à partir de quel mois les économies de Sophie deviennent supérieures à celles de Yves.

■ Exercice 7. Suite arithmétique et suite géométrique

(Source : tes-suites-09)



Corrigé page 14

Dans une librairie, les ventes d'un livre ont été égales à 10 000 la première semaine.

1 On suppose que chaque semaine, les ventes progressent de 2 %.

On note u_n les ventes de la n -ième semaine. On a donc $u_1 = 10000$.

- a. Calculer u_2 .
- b. Quelle est la nature de la suite $(u_n)_{n \geq 1}$?
- c. En déduire une expression de u_n en fonction de n .
- d. Calculer les ventes totales effectuées au cours des 10 premières semaines.

2 On suppose maintenant que les ventes augmentent de 500 exemplaires chaque semaine.

On note v_n le nombre de ventes de la n -ième semaine. On a donc $v_1 = 10000$.

- a. Calculer v_1 .
- b. Quelle est la nature de la suite $(v_n)_{n \geq 1}$?
- c. En déduire une expression de v_n en fonction de n .
- d. Calculer les ventes totales effectuées au cours des 10 premières semaines.

3 Existe-t-il une valeur de n à partir de laquelle $u_n \geq v_n$? Dans l'affirmative, préciser cette valeur. (On pourra utiliser la calculatrice).

Suites arithmético-géométriques

■ Exercice 8. Suite arithmético-géométrique (Liban 2013)

(Source : tes-suites-02)

★★★★☆ R

Corrigé page 15

Partie A

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 10$ et pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = 0,9u_n + 1,2.$$

- 1 On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 12$.
 - a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
 - b. Exprimer v_n en fonction de n .
 - c. En déduire que pour tout entier naturel n , $u_n = 12 - 2 \times 0,9^n$.
- 2 Déterminer la limite de la suite (v_n) et en déduire celle de la suite (u_n) .

Partie B

En 2012, la ville de Bellecité compte 10 milliers d'habitants. Les études démographiques sur les dernières années ont montré que chaque année :

- 10 % des habitants de la ville meurent ou déménagent dans une autre ville ;
- 1 200 personnes naissent ou emménagent dans cette ville.

- 1 Montrer que cette situation peut être modélisée par la suite (u_n) où u_n désigne le nombre de milliers d'habitants de la ville de Bellecité l'année $2012 + n$.
- 2 Un institut statistique décide d'utiliser un algorithme pour prévoir la population de la ville de Bellecité dans les années à venir. Recopier et compléter l'algorithme ci-contre pour qu'il calcule la population de la ville de Bellecité l'année $2012 + n$.

Algorithme

Entrées

a prend la valeur 10
Choisir n

Traitement

Pour i allant de 1 à n
a prend la valeur ...

Fin du Pour

Sortie

Afficher a

- 3
 - a. Résoudre l'inéquation $12 - 2 \times 0,9^n > 11,5$.
 - b. En donner une interprétation.

■ Exercice 9. Dans une association

★★★★☆ R

(Source : tes-suites-04)

Corrigé page 17

En 2010, une association comptait 5 000 membres.

Dans cette association, il y a deux groupes nommés A et B. En 2010, le groupe A comptait 3 000 personnes et le groupe B, 2 000 personnes. On estime que d'une année à l'autre :

- 15 % des membres du groupe A vont dans le groupe B ;
- 20 % des membres du groupe B vont dans le groupe A.

On suppose que l'association refuse toute nouvelle adhésion extérieure. Ainsi, le nombre de membres reste à 5 000 chaque année.

On note (a_n) la suite représentant le nombre d'adhérents dans le groupe A et (b_n) le nombre d'adhérents dans le groupe B l'année $2010 + n$. Ainsi, $a_0 = 3000$ et $b_0 = 2000$.

1 Montrer que pour tout entier naturel n , $a_{n+1} = 0,65a_n + 1000$.

2 On pose $u_n = a_n - \frac{20000}{7}$ pour tout entier naturel n .

- Montrer que la suite (u_n) est géométrique. Préciser alors sa raison et son premier terme.
- En déduire une expression de u_n en fonction de n .

3 Déterminer alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$, puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n$. Donner une interprétation de ces résultats.

■ Exercice 10. Les cabris, c'est fini ?

★★★★☆ R

(Source : tes-suites-05)

Corrigé page 18

Dans une réserve, on a constaté une diminution annuelle constante de 10 % de l'effectif des cabris. Pour sauvegarder l'espèce, on décide d'introduire chaque année un nombre fixe K de ces cabris.

- Résoudre l'équation : $0,9x + K = x$. On exprimera la solution x en fonction de K .
 - Choisir K de façon à ce que le nombre x trouvé précédemment soit égal à 500.
 - Donner une interprétation du résultat obtenu en b) concernant la population des cabris.

2 À partir de cette question, on prend $K = 50$.

On note p_n le nombre de cabris après n années du plan de sauvegarde (qui consiste donc à introduire 50 cabris par an).

On considère que la population initiale des cabris est $p_0 = 1000$.

- Expliquer pourquoi on a : $p_{n+1} = 0,9p_n + 50$.
- On considère la suite $(t_n)_{n \geq 0}$ définie par : $t_n = p_n - 500$ pour tout entier naturel n .
Vérifier que la suite $(t_n)_{n \geq 0}$ est géométrique de raison $q = 0,9$.
Calculer t_0 . En déduire l'expression de t_n en fonction de n .
- En déduire l'expression de p_n en fonction de n . Déterminer une valeur approchée de p_{10} .

3 On prend toujours $K = 50$; on note encore p_n le nombre de cabris après n années.

On considère cette fois que la population initiale des cabris est de 100.

En expliquant votre raisonnement, déterminer une valeur approchée de p_{10} dans ce cas.

Limites

■ Exercice 11. Limite et graphique

★★★★☆ R

(Source : tes-suites-07)

Corrigé page 19

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + 3$.

1 On se propose de conjecturer graphiquement la limite de la suite (u_n) .

a. Le plan étant muni d'un repère orthonormé, tracer, pour x appartenant à l'intervalle $[0; 12]$, les droites $\mathscr{D}$ et Δ d'équations respectives :

$$y = \frac{1}{4}x + 3 \quad \text{et} \quad y = x.$$

b. Placer les 3 premiers termes de (u_n) sur l'axe des abscisses.

c. Que peut-on conjecturer pour la limite de la suite (u_n) ?

2 Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par : $v_n = u_n - 4$.

a. Déterminer v_{n+1} en fonction de v_n . En déduire la nature de la suite (v_n) .

b. Exprimer v_n en fonction de n .

c. En déduire que pour tout entier naturel n , $u_n = 4 - 3 \left(\frac{1}{4} \right)^n$.

d. Déterminer la limite de la suite (u_n) .

■ Exercice 12. Flux migratoires d'une ville

★★★★☆ R

(Source : tes-suites-08)

Corrigé page 20

Une ville possède 100 000 habitants au 1^{er} janvier 2010.

Chaque année, elle en perd 5 %, mais en gagne 500.

On note u_n le nombre d'habitants de cette ville au 1^{er} janvier de l'année $(2010 + n)$.

Ainsi, $u_0 = 100\,000$.

1 Calculer u_1 et u_2 .

2 Donner l'expression de u_{n+1} en fonction de u_n , pour un entier naturel n quelconque.

On pose $v_n = u_n - 10\,000$.

3 Montrer que (v_n) est une suite géométrique, dont on précisera la raison et le premier terme.

4 En déduire une expression de v_n en fonction de n , puis une expression de u_n en fonction de n .

5 Calculer la limite de u_n .

Interpréter ce résultat.

■ Corrigé de l'exercice 1.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

- 1 La relation de récurrence qui définit la suite (u_n) est de la forme :

$$u_{n+1} = qu_n$$

donc (u_n) est une suite géométrique de raison $q = 0,7$.

- 2 D'après le cours,

$$u_n = u_0 \times q^n$$

donc ici,

$$u_n = 0,5 \times 0,7^n$$

- 3 $u_{15} = 0,5 \times 0,7^{15} \approx 0,002$.

■ Corrigé de l'exercice 2.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

- 1 La suite (u_n) est une suite géométrique de raison $q = 1,2$ donc d'après le cours,

$$u_n = u_0 \times q^n \quad \text{soit} \quad u_n = 4 \times 1,2^n$$

- | | | |
|---|---|---|
| <p>2</p> <ul style="list-style-type: none"> $v_0 = 10 \times u_0$
 $= 10 \times 4$
 $= 40.$ | <ul style="list-style-type: none"> $v_1 = 10 \times u_1$
 $= 10 \times 4 \times 1,2^1$
 $= 40 \times 1,2$
 $= 48.$ | <ul style="list-style-type: none"> $v_2 = 10 \times u_2$
 $= 10 \times 4 \times 1,2^2$
 $= 40 \times 1,2^2$
 $= 57,6.$ |
|---|---|---|

- 3 Par définition, $v_n = 10 \times u_n$, donc :

$$v_n = 10 \times 4 \times 1,2^n \quad \text{soit} \quad v_n = 40 \times 1,2^n$$

Ainsi,

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{10 \times 1,2^{n+1}}{40 \times 1,2^n} = \frac{40 \times 1,2^n \times 1,2^1}{40 \times 1,2^n} = 1,2.$$

Par conséquent, (v_n) est une suite géométrique de raison 1,2 et de premier terme $v_0 = 40$.

■ Corrigé de l'exercice 3.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

1	Valeurs de N	0	1	2	3	4
	Valeurs de U	10	15	22,5	33,75	50,625
	$U \leq 50$?	Oui	Oui	Oui	Oui	Non

- 2 L'algorithme affiche la première valeur de N pour laquelle la valeur de U dépasse strictement 50.
- 3 Considérons la suite (u_n) définie par $u_0 = 10$ et $u_{n+1} = 1,5u_n$. Alors, u_n représente le nombre de points de vente de la firme (exprimé en millier) lors de l'année 2018+ n .
- D'après ce qui précède, $u_n > 50$ à partir de $n = 4$, donc c'est au bout de 4 années que la firme possédera plus de 50 000 points de vente.

■ Corrigé de l'exercice 4.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

1 $C_1 = C_0 \times \left(1 + \frac{2,5}{100}\right)$ $= 3\,000 \times 1,025$ $C_1 = 3\,075$	$C_2 = C_1 \times \left(1 + \frac{2,5}{100}\right)$ $= 3\,075 \times 1,025$ $C_2 = 3\,151,88$
--	---

- 2 Le capital à l'année $(n+1)$ est obtenu en ajoutant 2,5 % du capital précédent, soit 2,5 % de C_n .

On doit donc multiplier C_n par $\left(1 + \frac{2,5}{100}\right)$. D'où la relation de récurrence :

$C_{n+1} = C_n \times 1,025$

De cette relation, on déduit que la suite (C_n) est géométrique de raison $q = 1,025$ et de premier terme $C_0 = 3\,000$. Donc, d'après la formule du cours

$$C_n = C_0 \times q^n$$

$C_n = 3\,000 \times 1,025^n$

3 a.	Valeur de n	0	1	2	3	4
	Valeur de U	3 000	3 075	3 152	3 231	3 311
	Condition $U \leq S$	vrai	vrai	vrai	vrai	faux

- b. L'algorithme affiche donc, pour $S = 3\,300$, la valeur 2004 car $n = 4$ est la première valeur de n pour laquelle C est strictement supérieur à 3 300.
- c. Dans le contexte de cet exercice, l'algorithme affiche l'année à partir de laquelle le capital placé sera strictement supérieur à la valeur S donnée.

- 4 D'après la formule donnée à la question 2,

$$C_{13} = 3\,000 \times 1,025^{13} \approx 4\,135,53.$$

Ainsi, avec un capital initial de 3 000 €, le capital en 2013 est d'environ 4 135,53 €, et non 5 000 € comme souhaité.

Le capital initial n'est donc pas suffisant.

5 On souhaite trouver n tel que :

$$C_n \geq 10C_0,$$

c'est-à-dire :

$$C_0 \times 1,025^n \geq 10C_0,$$

soit, en simplifiant par C_0 :

$$1,025^n \geq 10.$$

En prenant le logarithme népérien des deux membres, on obtient :

$$\begin{aligned} \ln(1,025^n) &\geq \ln 10 \\ \Leftrightarrow n \ln(1,025) &\geq \ln 10 \\ \Leftrightarrow n &\geq \frac{\ln 10}{\ln 1,025} \\ \Leftrightarrow n &\geq 93,25 \end{aligned}$$

Ainsi, à partir du 1^{er} janvier 2094, le client pourrait avoir son capital initial multiplié par 10.

■ Corrigé de l'exercice 5.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

1 Notons t le taux annuel moyen des montants à l'exportation des produits perliers de Polynésie entre 2008 et 2011. Alors, nous devons avoir : $63\,182 \approx 81\,295 \times (1+t)^3$ car il y a eu 3 évolutions successives entre 2008 et 2011.

Calculons alors le membre de droite lorsque $t = -0,0806$:

$$\begin{aligned} 81\,295 \times (1 - 0,0806)^3 &\approx 81\,295 \times (0,9194)^3 \\ &\approx 81\,295 \times 0,777\,165\,473 \\ &\approx 63\,180. \end{aligned}$$

On peut donc estimer que $t = -8\%$ est le taux annuel moyen cherché.

Autre méthode (avec la fonction exponentielle) : on peut partir de l'équation :

$$63\,182 \approx 81\,295 \times (1+t)^3$$

et chercher t :

$$\begin{aligned} 63\,182 \approx 81\,295 \times (1+t)^3 &\Leftrightarrow \frac{63\,182}{81\,295} = (1+t)^3 \\ &\Leftrightarrow \ln\left(\frac{63\,182}{81\,295}\right) = \ln[(1+t)^3] \\ &\Leftrightarrow -0,252\,065\,064 \approx 3 \ln(1+t) \\ &\Leftrightarrow -0,084\,021\,688 \approx \ln(1+t) \\ &\Leftrightarrow e^{-0,084\,021\,688} \approx 1+t \\ &\Leftrightarrow t \approx e^{-0,084\,021\,688} - 1 \\ &\Leftrightarrow t \approx -0,080\,588\,684 \\ &\Leftrightarrow t \approx -0,0806 \end{aligned}$$

Cette méthode est plus précise.

- 2 « P » intervient uniquement dans la condition du « Tant que » donc on voit que l'on exécute la boucle tant que la valeur calculée U est strictement supérieure à P.

On peut faire un tableau des différentes valeurs de U calculées jusqu'à ce que la condition ne soit plus remplie :

N	0	1	2	3
U	63 182	58 127,44	53 477,24	49 199,07
U > P	vrai	vrai	vrai	faux

L'algorithme affiche donc la valeur « 3 ».

Cela signifie qu'à partir de 2014 (i.e. 2011 + 3), la production est inférieure à 50 000 milliers d'euros.

- 3 a. Par définition, $u_{n+1} = 0,92u_n$ car il y a une perte de 8 % par an.
Donc (u_n) est géométrique de raison $q = 0,92$ et de premier terme $u_0 = 63\,182$.

b. D'après le cours, on a :

$$u_n = u_0 \times q^n = 63\,182 \times 0,92^n.$$

c. En 2016, $n = 5$ et :

$$u_5 = 63\,182 \times 0,92^5 \approx 41\,642.$$

On peut donc prévoir 41 642 milliers d'euros de production en 2016.

- 4 On cherche ici :

$$\begin{aligned} u_0 + u_1 + \dots + u_9 &= u_0 \times \frac{1 - q^{10}}{1 - q} \\ &= 63\,182 \times \frac{1 - 0,92^{10}}{1 - 0,92} \\ &\approx 446\,706. \end{aligned}$$

Le montant cumulé des produits perliers exportés de 2011 à 2020 est estimé à 446 706 €.

■ Corrigé de l'exercice 6.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

1 Étude du capital de Sophie.

a. Le premier terme est le capital initial, soit $u_0 = 800$.

Le capital augmente de 10 % par mois, donc $u_{n+1} = 1,1u_n$.

La suite (u_n) est donc géométrique de premier terme 800 et de raison 1,1.

b. u_1 est la somme disponible en février 2018, u_2 est la somme disponible début mars 2018, etc. Donc la somme dont dispose Sophie début janvier de l'année 2018 + 1 est u_{12} car il s'est écoulé 12 mois entre temps :

$$u_{12} = u_0 \times q^{12} = 800 \times (1,1)^{12} \approx 2\,510,74.$$

Sophie dispose donc de 2 510,74 € début janvier de l'année suivante.

c. Le pourcentage d'augmentation est :

$$\frac{2\,510,74 - 800}{800} \times 100 \approx 213,84\%.$$

2 Étude du capital de Yves.

- a. Le capital initial est $v_0 = 1\,000$ et il ajoute 50 € chaque mois, donc $v_{n+1} = v_n + 50$.
Ainsi, la suite (v_n) est arithmétique de raison $r = 50$ et de premier terme $v_0 = 1\,000$.
- b. $v_{12} = v_0 + 12r = 1\,000 + 12 \times 50 = 1\,600$.
Ainsi, Yves disposera de $1\,600$ euro dans 1 an.
- c. Le pourcentage d'augmentation sur un an est :

$$\frac{1\,600 - 1\,000}{1\,000} \times 100 = 6\%.$$

3 Les économies de Sophie sont supérieures à celles de Yves quand :

$$\begin{aligned} 800 \times (1,1)^n &> 1\,000 + 50n \\ \iff 800 \times (1,1)^n - 1\,000 - 50n &> 0 \end{aligned}$$

On construit alors un tableau de valeurs de l'expression $800 \times (1,1)^n - 1\,000 - 50n$ afin de savoir la première valeur de n pour laquelle elle est strictement positive.

On trouve $n = 5$.

Ainsi, au mois de juin 2018, les économies de Sophie seront supérieures à celles de Yves.

■ Corrigé de l'exercice 7.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

- 1 a. On a : $u_2 = u_1 \times \left(1 + \frac{2}{100}\right)$
 $= 10\,000 \times 1,02$
 $= 10\,200.$

Les ventes de la deuxième semaine s'élèvent donc à $10\,200$.

- b. Pour déterminer u_n , on doit le multiplier par $1,02$ car u_n subit une augmentation de 2% chaque semaine. Ainsi,

$$u_{n+1} = 1,02u_n.$$

La suite est donc géométrique de premier terme $u_1 = 10\,000$ et de raison $q = 1,02$.

- c. La suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est géométrique donc :

$$u_n = u_1 \times q^{n-1}$$

$$u_n = 10\,000 \times (1,02)^{n-1}$$

- d. Les ventes totales au cours des 10 premières semaines sont :

$$\begin{aligned} u_1 + u_2 + \dots + u_{10} &= 10\,000 \times \frac{1 - (1,02)^{10}}{1 - 1,02} \\ &\approx 109\,497,209\,997\,379. \end{aligned}$$

Le nombre total de ventes s'élève donc à environ $109\,497$.

- 2 a. On a : $v_2 = v_1 + 500$
 $= 10\,500.$

Le nombre de ventes au cours de la deuxième semaine est $10\,500$.

b. Chaque semaine, le nombre de ventes augmente de 500.

La suite $(v_n)_{n \geq 1}$ est donc arithmétique de premier terme $v_1 = 10\,000$ et de raison $r = 500$.

c. D'après le cours, on a :

$$\begin{aligned}v_n &= v_1 + (n-1)r \\v_n &= 10\,000 + 500(n-1) \\v_n &= 10\,000 + 500n - 500 \\v_n &= 9\,500 + 500n\end{aligned}$$

d. Les ventes totales au cours des 10 premières semaines sont :

$$\begin{aligned}v_1 + v_2 + \dots + v_{10} &= 10 \times \frac{u_0 + u_{10}}{2} \\&= 10 \times \frac{10\,000 + (9\,500 + 500 \times 10)}{2} \\&= 10 \times \frac{19\,500 + 5\,000}{2} \\&= 122\,500.\end{aligned}$$

Au cours des 10 premières semaines, le livre s'est vendu à 122 500 exemplaires.

3 Pour savoir s'il existe un entier n à partir duquel $u_n \geq v_n$, on doit tenter de résoudre l'inéquation :

$$10\,000 \times (1,02)^{n-1} \geq 9\,500 + 500n.$$

On ne peut pas la résoudre algébriquement donc on s'aide de la calculatrice ou d'un tableur pour afficher les termes successifs de u_n et v_n .

On s'aperçoit alors que :

- pour $n = 82$, $u_{82} \approx 50\,724$ et $v_{82} = 51\,000$;
- pour $n = 83$, $u_{83} \approx 51\,738$ et $v_{83} = 51\,500$.

Ainsi, à partir de $n = 83$, $u_n \geq v_n$.

■ Corrigé de l'exercice 8.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

Partie A

1 a. Pour tout entier naturel n , on a : $v_n = u_n - 12$ donc, au rang $n+1$, on a :

$$\begin{aligned}v_{n+1} &= u_{n+1} - 12 \\&= 0,9u_n + 1,2 - 12 \\&= 0,9u_n - 10,8 \\&= 0,9 \left(u_n - \frac{10,8}{0,9} \right) \quad (\text{on a factorisé par } 0,9) \\&= 0,9(u_n - 12) \\&= 0,9v_n.\end{aligned}$$

Ainsi, $v_{n+1} = 0,9v_n$, ce qui signifie que (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 0,9$ et de premier terme :

$$v_0 = u_0 - 12 = 10 - 12 = -2.$$

b. D'après la formule du cours, la suite (v_n) étant géométrique de raison $q = 0,9$, on a :

$$v_n = v_0 \times q^n$$

$$v_n = -2 \times 0,9^n$$

c. On sait que :

$$v_n = u_n - 12$$

donc :

$$u_n = v_n + 12$$

$$u_n = -2 \times 0,9^n + 12$$

$$u_n = 12 - 2 \times 0,9^n$$

2 (v_n) est une suite géométrique dont la raison est strictement comprise entre 0 et 1. Donc,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$$

On en déduit alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 12$$

Partie B

1 Si u_n désigne le nombre de milliers d'habitants de la ville en $2012 + n$, alors :

- « 10% des habitants de la ville meurent ou déménagent dans une autre ville » signifie qu'il reste 90% des habitants d'une année sur l'autre, donc :

$$u_{n+1} = 0,9u_n$$

- « 1 200 personnes naissent ou emménagent dans cette ville » signifie que 1,2 millier d'habitants sont à ajouter, d'où :

$$u_{n+1} = 0,9u_n + 1,2.$$

2 **Algorithme: complété**

Entrées

a prend la valeur 10

Choisir n

Traitement

Pour i allant de 1 à n

a prend la valeur $0,9 \times a + 1,2$

Fin du Pour

Sortie

Afficher a

$$\begin{aligned}
3 \quad a. \quad 12 - 2 \times 0,9^n > 11,5 &\iff -2 \times 0,9^n > -0,5 \\
&\iff 0,9^n < \frac{-0,5}{-2} \\
&\iff 0,9^n < 0,25 \\
&\iff \ln(0,9^n) < \ln(0,25) \\
&\iff n \ln(0,9) < \ln(0,25) \\
&\iff n > \frac{\ln(0,25)}{\ln(0,9)} \quad \text{car } \ln(0,9) < 0
\end{aligned}$$

$$12 - 2 \times 0,9^n > 11,5 \iff n > 13,2$$

b. Résoudre l'inéquation $12 - 2 \times 0,9^n > 11,5$ revient à chercher les valeurs de n telles que la population de Bellecité est strictement supérieure à 11 500.

Le résultat précédent montre que courant 2025, cette population dépassera 11 500 habitants.

■ Corrigé de l'exercice 9.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

$$\begin{aligned}
1 \quad a_{n+1} &= 0,85a_n + 0,2b_n \\
&= 0,85a_n + 0,2(5000 - a_n) \quad (\text{car } a_n + b_n = 5000) \\
&= 0,85a_n + 1000 - 0,2a_n \\
\boxed{a_{n+1} &= 0,65a_n + 1000}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2 \quad a. \quad u_n &= a_n - \frac{20000}{7} \text{ donc :} \\
u_{n+1} &= a_{n+1} - \frac{20000}{7} \\
&= 0,65a_n + 1000 - \frac{20000}{7} \\
&= 0,65a_n + \frac{7000}{7} - \frac{20000}{7} \\
&= 0,65a_n - \frac{13000}{7} \\
&= 0,65 \left(a_n - \frac{13000}{7} \times \frac{1}{0,65} \right) \\
&= 0,65 \left(a_n - \frac{20000}{7} \right) \quad (\text{la calculatrice est ton amie ici !}) \\
&= 0,65u_n.
\end{aligned}$$

Ainsi, (u_n) est une suite géométrique de raison 0,65.

On peut aussi préciser que :

$$\begin{aligned}
u_0 &= a_0 - \frac{20000}{7} \\
&= 3000 - \frac{20000}{7} \\
&= \frac{21000}{7} - \frac{20000}{7} \\
\boxed{u_0 &= \frac{1000}{7}}
\end{aligned}$$

b. D'après la formule du cours, si q désigne la raison de la suite géométrique, on a :

$$u_n = u_0 \times q^n$$

$$u_n = \frac{1000}{7} \times (0,65)^n$$

3 $0,65 < 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(a_n - \frac{20000}{7} \right) = 0$, ce qui signifie que $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \frac{20000}{7}$.

De plus, $b_n = 5000 - a_n$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 5000 - \frac{20000}{7}$, soit $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \frac{15000}{7}$.

Cela signifie qu'à longs termes, le groupe A comportera environ 2 857 personnes et le groupe B, 2 143.

■ Corrigé de l'exercice 10.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

1 a. $0,9x + K = x \iff 0,1x = K$
 $\iff x = 10K$

b. $x = 500 \iff -10K = 500 \iff K = 50$

c. Cette dernière valeur signifie que l'on doit introduire chaque année 50 cabris pour que l'effectif des cabris reste constant.

2 a. On sait que d'une année sur l'autre, l'effectif baisse de 10%, donc il reste 90% de cabris (d'où la présence du 0,9 devant p_n).

Mais on sait aussi que l'on ajoute 50 cabris chaque année, d'où l'ajout de 50.

$$\begin{aligned} b. \quad t_{n+1} &= p_{n+1} - 500 \\ &= 0,9p_n + 50 - 500 \\ &= 0,9p_n - 450 \\ &= 0,9 \left(p_n - \frac{450}{0,9} \right) \\ &= 0,9(p_n - 500) \\ &= 0,9t_n. \end{aligned}$$

Ainsi, la suite $(t_n)_{n \geq 0}$ est une suite géométrique de raison 0,9 et de premier terme :

$$t_0 = p_0 - 500 = 1000 - 500 = 500.$$

Donc, $t_n = t_0 \times (0,9)^n$, soit $t_n = 500 \times (0,9)^n$ pour tout entier naturel n .

c. On sait que :

$$t_n = p_n - 500,$$

donc :

$$p_n = t_n + 500 = 500 \times (0,9)^n + 500.$$

Ainsi, $p_n = 500[(0,9)^n + 1]$, pour tout entier naturel n .

$$\text{Donc } p_{10} = 500[(0,9)^{10} + 1] \approx 674$$

3 Si $p_0 = 100$, alors

$$t_0 = 100 - 500 = -400$$

et donc

$$t_n = -400 \times (0,9)^n.$$

Alors,

$$p_n = -400 \times (0,9)^n + 500.$$

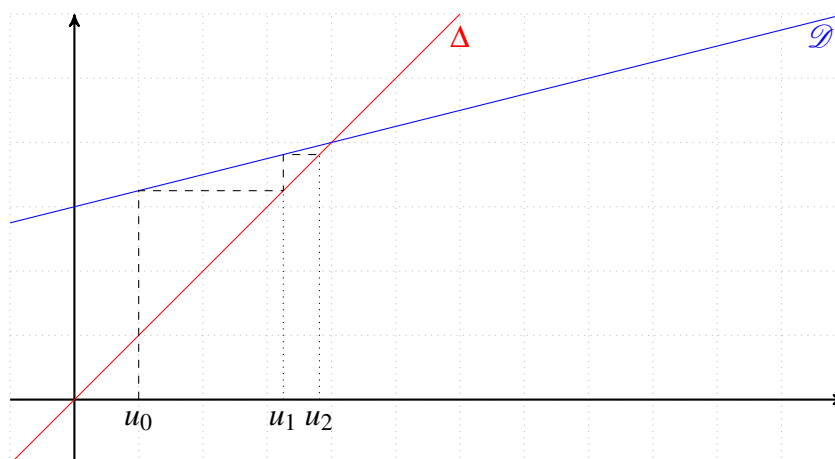
Ainsi,

$$p_{10} = -400 \times (0,9)^{10} + 500 \approx 360$$

■ Corrigé de l'exercice 11.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

1 a. Nous avons le graphique suivant, où l'unité est le carreau :



b. Voir graphique précédent.

c. Nous pouvons conjecturer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ est l'abscisse du point d'intersection des droites $\mathcal{D}$ et Δ , soit ici $x = 4$.

$$\begin{aligned} 2 \quad a. \quad v_{n+1} &= u_{n+1} - 4 \\ &= \frac{1}{4}u_n + 3 - 4 \\ &= \frac{1}{4}u_n - 1 \\ &= \frac{1}{4}\left(u_n - \frac{1}{\frac{1}{4}}\right) \\ &= \frac{1}{4}(u_n - 4) \\ &= \frac{1}{4}v_n. \end{aligned}$$

La suite (v_n) est donc géométrique de raison $\frac{1}{4}$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 4 = -3$.

b. La suite (v_n) est géométrique donc $v_n = v_0 \times q^n$, donc $v_n = -3 \left(\frac{1}{4}\right)^n$.

Or, $v_n = u_n - 4$, donc $u_n = v_n + 4$, soit
$$u_n = 4 - 3 \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

c. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$ car $0 < \frac{1}{4} < 1$, donc
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 4$$

■ Corrigé de l'exercice 12.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

$$\begin{aligned}
 1 \quad u_1 &= 0,95u_0 + 500 & u_2 &= 0,95u_1 + 500 \\
 &= 0,95 \times 100\,000 + 500 & &= 0,95 \times 95\,500 + 500 \\
 &= 95\,500. & &= 91\,225.
 \end{aligned}$$

- 2 Chaque année, on perd 5 % des habitants ; donc à ce stade, $u_{n+1} = 0,95u_n$.
 Mais on ajoute 500 habitants donc : $u_{n+1} = 0,95u_n + 500$.

- 3 D'après la définition de v_n , on a :

$$\begin{aligned}
 v_{n+1} &= u_{n+1} - 10\,000 \\
 &= 0,95u_n + 500 - 10\,000 \\
 &= 0,95u_n - 9\,500 \\
 &= 0,95 \left(u_n - \frac{9\,500}{0,95} \right) \\
 &= 0,95(u_n - 10\,000) \\
 &= 0,95v_n.
 \end{aligned}$$

Ainsi, (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 0,95$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 10\,000$, soit $v_0 = 90\,000$.

- 4 (v_n) est une suite géométrique de raison 0,95 donc :

$$v_n = v_0 \times q^n = 90\,000 \times (0,95)^n.$$

Or,

$$v_n = u_n - 10\,000,$$

donc :

$$u_n = v_n + 10\,000.$$

On a alors :

$$u_n = 90\,000 \times (0,95)^n + 10\,000$$

- 5 $0 < 0,95 < 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} (0,95)^n = 0$.

Ainsi, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (90\,000 \times (0,95)^n) = 0$ et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = 10\,000$.

Ceci signifie que si rien ne change au fil du temps, la population de cette ville se rapprochera de 10 000 habitants.

Continuité & dérivabilité

Disponible sur <http://www.mathweb.fr>

A Exercices d'application du cours

R Exercices de réflexion

✌ Exercice & corrigé relus avec attention pour éviter les erreurs

12 juin 2018

Théorème des valeurs intermédiaires

■ Exercice 1. Fonction polynôme de degré 3

★★★★☆ **A**

Corrigé page 27 ✌

(Source : tes-contder-01)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1.$$

- 1 Montrez que f est strictement croissante sur $[1; 2]$.
- 2 Montrez qu'il existe une unique solution α à l'équation $f(x) = 0$.
- 3 Donnez une valeur approchée de α à 0,1 près.

■ Exercice 2. Intersection d'une courbe avec l'axe des abscisses

★★★★☆ **A**

Corrigé page 28 ✌

(Source : tes-contder-02)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x} + x^2 + x.$$

- 1 Soit $g(x) = -1 + 2x^3 + x^2$.
Calculer $g'(x)$, puis en déduire les variations de g .
- 2 Montrer alors que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α comprise entre 0 et 1, dont on donnera une valeur approchée au millièmè près.
- 3 Montrer que la courbe représentative de la fonction f coupe l'axe des abscisses en un unique point, dont on donnera une valeur approchée de son abscisse au dixièmè près.

Lectures graphiques

■ Exercice 3. Tableau de variation

★☆☆☆☆

A

(Source : tes-contder-03)

Corrigé page 29

On donne le tableau de variation d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $]2; +\infty[$. On note f' la fonction dérivée de f sur l'intervalle $]2; +\infty[$.

On appelle $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

x	2	3	10	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
f	$-\infty$	6	-5	4	

On suppose de plus que $f(5) = 0$ et que $f'(5) = -2$.

À l'aide du tableau de variation, répondre aux questions suivantes.

Aucune justification n'est demandée.

- 1 Donner une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 3.
- 2 Quel est le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 4$ sur l'intervalle $]2; +\infty[$?

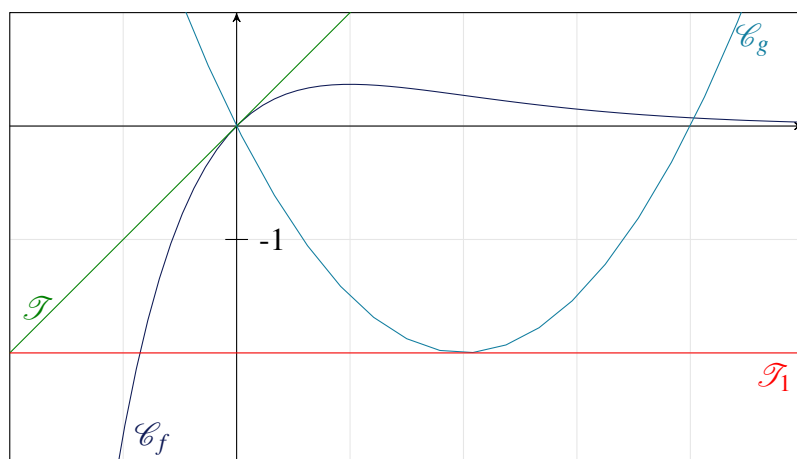
■ Exercice 4. Nombre dérivé

★☆☆☆☆

A

(Source : tes-contder-04)

Corrigé page 29



- $\mathcal{T}$ est la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.
- $\mathcal{T}_1$ est la tangente à $\mathcal{C}_g$ au point d'abscisse 2.
- $\mathcal{C}_g$ et $\mathcal{C}_f$ se coupent en deux points d'abscisses respectives 0 et 4.

À l'aide du graphique ci-dessus, répondez aux questions suivantes.

- 1 Que vaut $f'(0)$? $g'(2)$?
- 2 Résoudre l'inéquation $f(x) \geq g(x)$ sur $[-2; 5]$.

■ Exercice 5. Image, nombre dérivé, équation et tableau de signes

★★★★★

A

(Source : tes-contder-07)

Corrigé page 29

Une fonction f est représentée par la courbe $\mathcal{C}$ ci-contre.

$\mathcal{D}$ est la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.

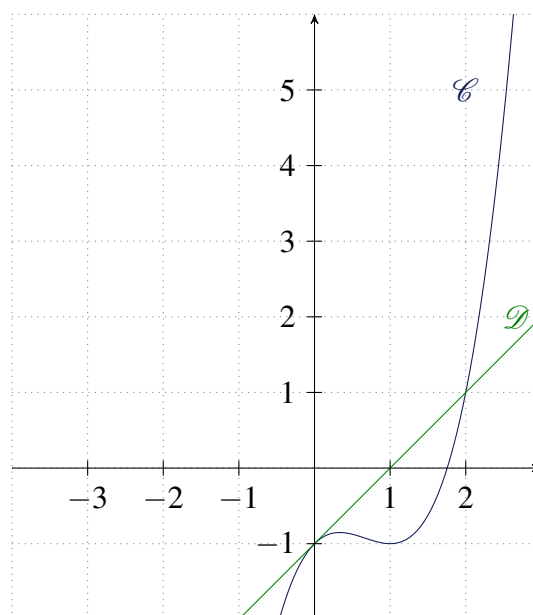
Le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse 1 est un minimum local.

Répondre aux questions suivantes par lectures graphiques :

- 1 Donner la valeur de $f(0)$ et $f'(0)$.
- 2 Donner la valeur de $f'(1)$.
- 3 Donner, sur $[-3; 3]$, les solutions de l'équation :

$$f(x) = x - 1.$$

- 4 Dresser un tableau de signes de la fonction f' .



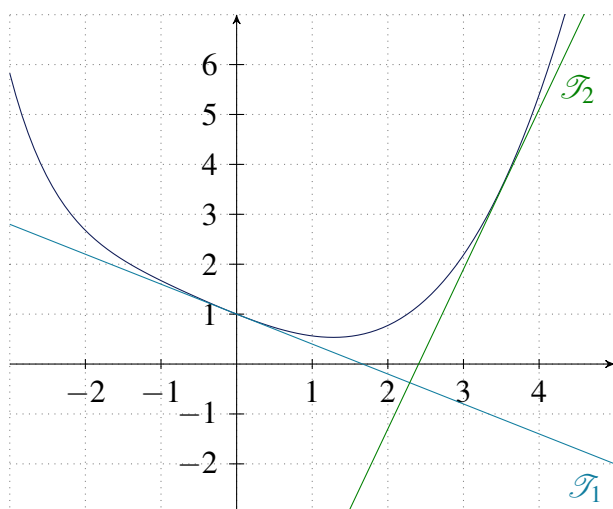
■ Exercice 6. Image, nombre dérivé, équation et tableau de signes

★★★★★

A

(Source : tes-contder-08)

Corrigé page 30



La courbe ci-contre représente une fonction f sur $[-3; 5]$.

La droite $\mathcal{T}_1$ est tangente à la courbe au point d'abscisse 0.

La droite $\mathcal{T}_2$ est tangente à la courbe au point d'abscisse 3,5.

- 1 Déterminer $f(0)$, $f'(0)$.
- 2 Avec la précision que permet le graphique, déterminer $f(3,5)$ et $f'(3,5)$.
- 3 Dresser un tableau de signes de f' avec la précision que permet le graphique.

■ Exercice 7. Détermination de coefficients dans une expression

★★★★☆

R

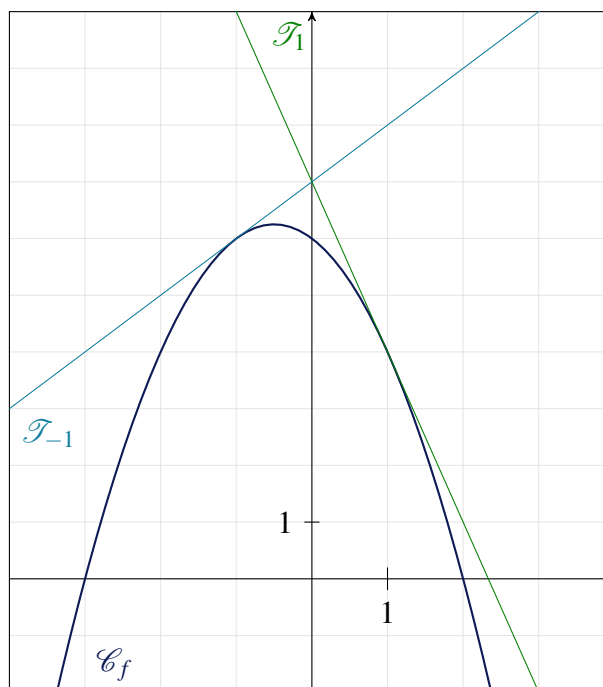
(Source : tes-contder-05)

Corrigé page 30

On a représenté ci-contre la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ d'une fonction f ainsi que deux de ses tangentes $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_{-1}$.

On sait que $f(x) = ax^2 + bx + c$.

- 1 Par lecture graphique, donner la valeur de $f(0)$.
En déduire la valeur de c .
- 2 Exprimer $f'(x)$ en fonction de a et b .
- 3 Par lecture graphique, donner la valeur des nombres $f'(1)$ et $f'(-1)$.
En déduire les valeurs de a et b .
- 4 Par lecture graphique, résoudre l'équation $f(x) = 0$. Retrouver ce résultat par le calcul.



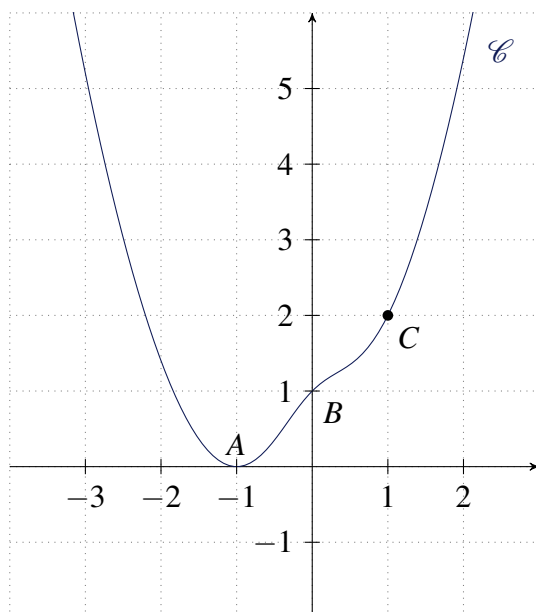
■ Exercice 8. Détermination de coefficient dans une expression

★★★★☆

R

(Source : tes-contder-06)

Corrigé page 30



La courbe $\mathcal{C}$ ci-contre est celle d'une fonction f telle que :

$$f(x) = ax^2 + bx + c + \frac{d}{x^2 + 1}.$$

On sait :

- Condition (1) : que les points $A(-1; 0)$, $B(0; 1)$, $C(1; 2)$ appartiennent à $\mathcal{C}$;
- Condition (2) : l'axe des abscisses est tangente à $\mathcal{C}$ au point A .

- 1 Exprimez en fonction de a , b , c et d la dérivée $f'(x)$ de $f(x)$.
Quelle équation peut-on alors écrire à partir de la condition (2) ?
- 2 Écrivez, en fonction de a , b , c et d , les trois équations que permet d'établir la condition (1).
- 3 Trouvez alors, à l'aide des 4 équations établies, la valeur de a , b , c et d .

Étude générale de fonctions

■ Exercice 9. Étude de $f(x) = \frac{x^3}{x^2-3}$

★★★★☆

A

(Source : tes-contder-11)

Corrigé page 31

On considère la fonction f définie pour tout réel x différent de $-\sqrt{3}$ et de $\sqrt{3}$ par :

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2-3}.$$

- 1 Déterminer sa dérivée $f'(x)$.
- 2 En déduire les variations de f sur $[-5; 5]$. Dressez un tableau de variations de f sans indiquer les valeurs des images.
- 3 Donnez une équation de la tangente à la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de f au point d'abscisse 1.

■ Exercice 10. Détermination d'un paramètre pour tangente parallèle

★★★★☆

R

(Source : tes-contder-10)

Corrigé page 32

On considère courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{2x}{x^2+3x+a}.$$

Déterminez la valeur de a telle que $\mathcal{C}_f$ admette une tangente parallèle à la droite d'équation $y = x + 6$ en 0.

■ Exercice 11. Étude de la fonction $f : x \mapsto \frac{x^2-x-15}{x^2-2x+1}$

★★★★☆

A

(Source : tes-contder-09)

Corrigé page 33

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{x^2-x-15}{x^2-2x+1}.$$

- 1 Déterminer le domaine de définition de f . On le notera $\mathcal{D}$.
- 2 Montrer que la dérivée de f est :

$$f'(x) = \frac{-x^2+32x-31}{(x-1)^4}.$$

- 3 En déduire alors le signe de $f'(x)$ sur $\mathcal{D}$, puis les variations de f sur $\mathcal{D}$.

■ Exercice 12. Étude complète de $f(x) = \frac{x^3+x-2}{x+1}$ avec fonction auxiliaire

★★★★☆ R

(Source : tes-contder-12)

Corrigé page 34

Partie A

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = 2x^3 + 3x^2 + 3.$$

- 1 Calculer $g(0)$, $g(-1)$ et $g(-2)$.
- 2 Étudier les variations de g sur $\mathbb{R}$.
- 3 Montrer qu'il existe une unique solution à l'équation $g(x) = 0$ sur $] -2; -1[$. On notera cette solution α .
Montrer que α est la seule solution à l'équation $g(x) = 0$ sur $\mathbb{R}$.
- 4 Déterminer une valeur approchée de α à 0,1 près.
- 5 Donner le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par :

$$f(x) = \frac{x^3 + x - 2}{x + 1}.$$

- 1 Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^2}$, où g est la fonction introduite dans la partie A.
- 2 Dresser un tableau de variation complet de f .
- 3 Calculer une valeur approchée de $f(\alpha)$ à 0,1 près. Montrez alors que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ que l'on trouvera.
- 4 Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de f en 0.

■ Exercice 13. Étude de $f(x) = \frac{2x^2+3x-9}{3-x}$

★★★★☆ R

(Source : tes-contder-13)

Corrigé page 35

On considère la fonction f , de courbe représentative $\mathcal{C}$, définie sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ par :

$$f(x) = \frac{2x^2 + 3x - 9}{3 - x}.$$

- 1 Calculer $f'(x)$. En déduire les variations de f sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$.
- 2 Déterminer les solutions de l'équation $f(x) = 0$.
- 3 Déterminer une équation de la tangente $\mathcal{T}$ à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 1.
- 4 Existe-t-il d'autres points en lesquels la tangente à $\mathcal{C}$ est parallèle à $\mathcal{T}$?
Si oui, préciser leurs coordonnées.

■ Corrigé de l'exercice 1.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

- 1 La dérivée de f est : $f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$. D'après le cours, son discriminant est :

$$\Delta = b^2 - 4ac = 16 - 12 = 4,$$

donc les deux racines de $f'(x)$ sont :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4 - 2}{6} = \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4 + 2}{6} = 1.$$

On en déduit le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$	1	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$-\infty$	$-\frac{23}{27}$	-1	$+\infty$	

- $f\left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 - 2\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{3} - 1 = \frac{1}{27} - \frac{2}{9} - \frac{2}{3} = \frac{1-6-18}{27} = -\frac{23}{27}.$
- $f(1) = -1.$

- 2 On constate que f est strictement croissante sur $[1; +\infty[$, donc sur $[1; 2]$.

De plus, f est continue sur $[1; 2]$, $f(1) = -1 < 0$ et $f(2) = 1 > 0$. Or, $0 \in [-1; 1]$.

Ainsi, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe une unique valeur $\alpha \in [1; 2]$ telle que $f(\alpha) = 0$.

- 3 À l'aide de la calculatrice, on montre que $1,75 < \alpha < 1,76$.
Ainsi, $\alpha \approx 1,8$.

■ Corrigé de l'exercice 2.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

1 $g(x) = -1 + 2x^3 + x^2$.
 $g'(x) = 6x^2 + 2x = 2x(3x + 1)$.

Ainsi,

$$\begin{aligned} g'(x) = 0 &\iff 2x = 0 \text{ ou } 3x + 1 = 0 \\ &\iff x = 0 \text{ ou } 3x = -1 \\ &\iff x = 0 \text{ ou } x = -\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

On en déduit donc le tableau suivant :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	0	$+\infty$	
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\nearrow \approx -0,96$ $\searrow -1$ $\nearrow$				

2 $g(1) = 2$, donc $0 \in [g(0); g(1)]$.

De plus, g est continue et strictement croissante sur $[0; 1]$ donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[0; 1]$.

À la calculatrice, on trouve $\alpha \approx 0,657$.

3 La courbe représentative de la fonction f coupe l'axe des abscisses signifie que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution.

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{1}{x^2} + 2x + 1 \\ &= \frac{-1 + 2x^3 + x^2}{x^2} \\ &= \frac{g(x)}{x^2}. \end{aligned}$$

Donc $f'(x)$ est du signe de $g(x)$.

Or, d'après les questions précédentes, $g(x) \leq 0$ pour $x \leq \alpha$. On a alors :

x	$-\infty$	-2	-1	0	α	$+\infty$
$f'(x)$		-	-	0	+	
f		$1,5$	-1		$\approx 2,6$	

En calculant $f(-2)$ et $f(-1)$, on voit que $0 \in [f(-1); f(-2)]$. De plus, f est continue et strictement décroissante sur $[-2; -1]$ donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $[-2; -1]$.

Le tableau de variations de f nous indique de surcroît que la courbe représentative de f ne coupe pas l'axe des abscisses sur $]0; +\infty[$ car f atteint son minimum pour $x = \alpha$ et ce minimum est strictement positif.

On peut donc conclure que la courbe représentative de f ne coupe qu'une seule fois l'axe des abscisses, et que l'abscisse du point d'intersection est dans $] -2; -1[$.

À la calculatrice, on trouve que l'abscisse de ce point est à peu près égale à $-1,5$.

■ Corrigé de l'exercice 3.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

- 1 La tangente à $\mathcal{C}$ en $x = 3$ est horizontale ; comme $f(3) = 6$, son équation est : $y = 6$.
- 2 Il y a deux solutions à l'équation $f(x) = 4$: l'une sur l'intervalle $]2; 3[$ et l'autre sur l'intervalle $]3; 10[$.

■ Corrigé de l'exercice 4.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

- 1 $f'(0) = 1$ car $f'(0)$ représente le coefficient directeur de la tangente $\mathcal{T}$. Et pour calculer le coefficient directeur de cette droite, on considère deux points qui sont sur cette droite : par exemple, $A(-1; -1)$ et $O(0; 0)$.

$$f'(0) = \frac{y_O - y_A}{x_O - x_A} = \frac{0 - (-1)}{0 - (-1)} = 1.$$

$g'(2) = 0$ car la tangente à $\mathcal{C}_g$ est horizontale, et comme toute droite horizontale, elle a un coefficient directeur nul.

- 2 $f(x) \geq g(x) \iff x \in [0; 4]$ car c'est sur cet intervalle que $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{C}_g$.

■ Corrigé de l'exercice 5.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

- 1 $f(0)$ est l'ordonnée du point de $\mathcal{C}$ d'abscisse 0 : c'est le point d'intersection de la courbe avec l'axe des ordonnées. Donc **$f(0) = -1$** .

$f'(0)$ correspond au coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0. C'est donc le coefficient directeur de $\mathcal{D}$. Donc **$f'(0) = 1$** (les points de coordonnées $(0; -1)$ et $(1; 0)$ sont sur la droite donc le coefficient directeur est $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{0 - (-1)}{1 - 0} = 1$).

- 2 L'énoncé dit que le point de la courbe d'abscisse 1 est un minimum local. Donc **$f'(1) = 0$** .
- 3 $\mathcal{D}$ a pour équation $y = x - 1$ (coefficient directeur égal à 1 et coupe l'axe des ordonnées en -1). Donc l'équation revient à trouver les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{C}$.
Les solutions sont donc $x = 0$ et $x = 2$.
- 4 La fonction f est croissante jusqu'à $\frac{1}{3}$, puis décroissante jusqu'à 1, puis croissante, d'où le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$		1	$+\infty$
f'	+	0	-	0	+

■ Corrigé de l'exercice 6.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

- 1 $f(0) = 1$ (cela correspond à l'ordonnée du point d'abscisse 0 qui est sur la courbe).

$f'(0) = -\frac{3}{5}$. Pour déterminer cette valeur, on prend deux points de la tangente à la courbe passant par le point d'abscisse $x = 0$. Les points $A(0; 1)$ et $B(5; -2)$ sont sur cette tangente. On calcule alors la pente de cette droite :

$$f'(0) = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-2 - 1}{5 - 0} = -\frac{3}{5}.$$

- 2 $f(3,5) \approx 3,5$ et $f'(3,5) \approx 3,2$.

3	x	$-\infty$	1,5	$+\infty$
	f'	-	0	+

■ Corrigé de l'exercice 7.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

- 1 $f(0) = 6$ car $\mathcal{C}_f$ coupe l'axe des ordonnées en un point d'ordonnée égale à 6.

De plus, $f(0) = a \times 0^2 + b \times 0 + c = c$. Donc $c = 6$.

- 2 $f'(x) = 2ax + b$.

- 3 $f'(1) = -3$ car le coefficient directeur de $\mathcal{T}_1$ est égal à -3 .

$f'(-1) = 1$ car le coefficient directeur de $\mathcal{T}_{-1}$ est égal à 1.

$f'(1) = 2a + b = -3$ et $f'(-1) = -2a + b = 1$. D'où :

$$\begin{cases} 2a + b = -3 \\ -2a + b = 1 \end{cases} \implies (2a + b) + (-2a + b) = -3 + 1 \implies 2b = -2 \implies b = -1.$$

alors,

$$2a + b = -3 \implies 2a + (-1) = -3 \implies 2a = -3 + 1 = -2 \implies a = -1.$$

- 4 L'équation $f(x) = 0$ admet pour solutions -3 et 2 . En effet, $\mathcal{C}_f$ coupe l'axe des abscisses en deux points d'abscisses respectives -3 et 2 .

$f(x) = -x^2 - x + 6$ donc son discriminant est $\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \times (-1) \times 6 = 1 + 24 = 25$, d'où deux racines :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 - 5}{-2} = \frac{-4}{-2} = 2$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 + 5}{-2} = \frac{6}{-2} = -3.$$

■ Corrigé de l'exercice 8.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

- 1 $f'(x) = 2ax + b - \frac{2dx}{(x^2 + 1)^2}$.

La condition (2) permet d'écrire : $f'(-1) = 0$, soit :

$$-2a + b + \frac{1}{2}d = 0.$$

2 La condition (1) permet d'écrire :

$$\blacktriangleright A(-1;0) \in \mathcal{C} \implies f(-1) = 0 \implies a - b + c + \frac{1}{2}d = 0$$

$$\blacktriangleright B(0;1) \in \mathcal{C} \implies f(0) = 1 \implies c + d = 1$$

$$\blacktriangleright C(1;2) \in \mathcal{C} \implies f(1) = 2 \implies a + b + c + \frac{1}{2}d = 2$$

3 Nous avons alors le système suivant :

$$\begin{cases} -2a + b + \frac{1}{2}d = 0 & (E_1) \\ c + d = 1 & (E_2) \\ a - b + c + \frac{1}{2}d = 0 & (E_3) \\ a + b + c + \frac{1}{2}d = 2 & (E_4) \end{cases}$$

En faisant $(E_4) - (E_3)$, on arrive à l'équation :

$$(E_4) - (E_3) : 2b = 2$$

Ainsi, $b = 1$, d'où le système suivant :

$$\begin{cases} -2a + \frac{1}{2}d = -1 & (E'_1) \\ c + d = 1 & (E'_2) \\ a + c + \frac{1}{2}d = 1 & (E'_3) \end{cases}$$

En faisant $(E'_3) - (E'_2)$, on a :

$$(E'_3) - (E'_2) : a - \frac{1}{2}d = 0$$

Soit : $d = 2a$. L'équation (E'_1) est donc équivalente à :

$$-d + \frac{1}{2}d = -1$$

Soit : $d = 2$ et donc $a = 1$. L'équation (E'_2) donne alors : $c + 2 = 1$, soit $c = -1$.

Finalement, on a :
$$f(x) = x^2 + x - 1 + \frac{2}{x^2 + 1}.$$

■ Corrigé de l'exercice 9.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

1 f est de la forme $\frac{u}{v}$ avec :

$$\begin{aligned} u(x) &= x^3 & u'(x) &= 3x^2 \\ v(x) &= x^2 - 3 & v'(x) &= 2x \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{3x^2(x^2 - 3) - x^3 \times 2x}{(x^2 - 3)^2} \\ &= \frac{3x^4 - 9x^2 - 2x^4}{(x^2 - 3)^2} \end{aligned}$$

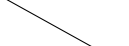
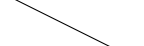
$$f'(x) = \frac{x^2(x^2 - 9)}{(x^2 - 3)^2}$$

2 $x^2 \geq 0$ et $(x^2 - 3)^2 > 0$. De plus,

$$x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$$

donc les racines sont 3 et -3 .

On en déduit alors le tableau suivant :

x	-5	-3	$-\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	3	$+5$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
f							

3 L'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 1 est donnée par la formule :

$$y = f'(1)(x - 1) + f(1)$$

- $f'(1) = \frac{1^2(1^2 - 9)}{(1^2 - 3)^2} = \frac{-8}{4} = -2.$
- $f(1) = \frac{1^3}{1^2 - 3} = -\frac{1}{2}.$

Donc, une équation de la tangente en 1 est :

$$y = -2(x - 1) - \frac{1}{2}$$

soit :

$$y = -2x + \frac{3}{2}$$

■ Corrigé de l'exercice 10.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

La tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0 est parallèle à la droite d'équation $y = x + 6$ si elles ont le même coefficient directeur, c'est-à-dire si $f'(0) = 1$.

$f(x)$ est de la forme $\frac{u}{v}$ avec :

$$\begin{aligned} u(x) &= 2x & u'(x) &= 2 \\ v(x) &= x^2 + 3x + a & v'(x) &= 2x + 3 \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2(x^2 + 3x + a) - 2x(2x + 3)}{(x^2 + 3x + a)^2} \\ &= \frac{2x^2 + 6x + 2a - 4x^2 - 6x}{(x^2 + 3x + a)^2} \\ &= \frac{2a - 2x^2}{(x^2 + 3x + a)^2}. \end{aligned}$$

Donc :

$$f'(0) = \frac{2a}{a^2} = \frac{2}{a} \quad (a \neq 0).$$

Ainsi, $f'(0) = 1$ signifie que $\underline{2 = a}$.

■ Corrigé de l'exercice 11.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

1 $f(x)$ est défini quand $x^2 - 2x + 1 \neq 0$.

Or, $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$.

Donc $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ que l'on peut aussi écrire : $\mathcal{D} =]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$.

2 $f(x)$ est de la forme $\frac{u(x)}{v(x)}$ avec :

$$u(x) = x^2 - x - 15$$

$$u'(x) = 2x - 1$$

$$v(x) = x^2 - 2x + 1$$

$$v'(x) = 2x - 2$$

D'où :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(u'v - uv')(x)}{v^2(x)} \\ &= \frac{(2x - 1)(x^2 - 2x + 1) - (2x - 2)(x^2 - x - 15)}{[(x - 1)^2]^2} \\ &= \frac{2x^3 - 4x^2 + 2x - x^2 + 2x - 1 - (2x^3 - 2x^2 - 30x - 2x^2 + 2x + 30)}{(x - 1)^4} \\ &= \frac{2x^3 - 5x^2 + 4x - 1 - 2x^3 + 4x^2 + 28x - 30}{(x - 1)^4} \end{aligned}$$

$$f'(x) = \frac{-x^2 + 32x - 31}{(x - 1)^4}$$

3 Le signe de $f'(x)$ est le même que le polynôme $P(x) = -x^2 + 32x - 31$ car son dénominateur est toujours positif sur $\mathcal{D}$.

Le discriminant de P est :

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$= 32^2 - 4 \times (-1) \times (-31)$$

$$\Delta = 900$$

$\Delta > 0$ donc P a deux racines :

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \\ &= \frac{-32 - \sqrt{900}}{-2} \\ &= \frac{-32 - 30}{-2} \end{aligned}$$

$$x_1 = 31$$

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\ &= \frac{-32 + \sqrt{900}}{-2} \\ &= \frac{-32 + 30}{-2} \end{aligned}$$

$$x_2 = 1$$

On en déduit alors le tableau suivant :

x	$-\infty$	1	31	$+\infty$
$f'(x)$	-	+	0	-
f				

Partie A

- 1
- $g(-1) = 2 \times (-1)^3 + 3 \times (-1)^2 + 3 = 4$;
 - $g(0) = 3$;
 - $g(-2) = 2(-2)^3 + 3(-2)^2 + 3 = -16 + 12 + 3 = -1$.

- 2 La dérivée de g est :

$$g'(x) = 6x^2 + 6x = 6x(x+1).$$

Ainsi, les deux racines de $g'(x)$ sont 0 et -1 . On a alors le tableau suivant :

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$	
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$					

- 3 g est continue (car c'est un polynôme) et strictement croissante sur $]-2; -1[$.

De plus, $0 \in]g(-2); g(-1)[$.

Par conséquent, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution dans $]-2; -1[$, que l'on note α .

De plus, d'après les variations de g , sur $]-\infty; -2]$, $g(x) < g(-2)$ donc $g(x) < 0$ et sur $]-1; +\infty[$, $g(x) > 0$. Ainsi, il n'existe pas de solution à l'équation $g(x) = 0$ sur ces deux derniers intervalles.

Donc α est bien l'unique solution à l'équation $g(x) = 0$ sur $\mathbb{R}$.

- 4 À l'aide de la calculatrice, on trouve $\alpha \approx -1,9$.

- 5 D'après ce qui précède, on peut écrire :

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+

Partie B

- 1 f est de la forme $\frac{u}{v}$, avec $u(x) = x^3 + x - 2$ et $v(x) = x + 1$.

Ainsi, $f' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, avec $u'(x) = 3x^2 + 1$ et $v'(x) = 1$. Donc :

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \frac{(3x^2 + 1)(x + 1) - (x^3 + x - 2)}{(x + 1)^2} \\
 &= \frac{3x^3 + 3x^2 + x + 1 - x^3 - x + 2}{(x + 1)^2} \\
 &= \frac{2x^3 + 3x^2 + 3}{(x + 1)^2}
 \end{aligned}$$

$$f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^2}$$

- 2 Le signe de $f'(x)$ est le même que celui de $g(x)$ car $(x+1)^2 > 0$ pour $x \neq -1$. Ainsi :

x	$-\infty$	α	-1	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$

- 3 On a $\alpha \approx -1,9$ donc $f(\alpha) \approx 5,8$. On en déduit alors que sur $]-\infty; -1[$, $f(x) > 0$ donc l'équation $f(x) = 0$ n'admet aucune solution sur cet intervalle.

De plus, f est croissante sur $]\alpha; -1[$, donc $f(x) > f(\alpha)$ sur cet intervalle, donc pas de solution non plus sur cet intervalle.

Sur $]-1; +\infty[$, f est croissante mais nous n'avons aucune valeur d'image.

Cependant, si $f(x) = 0$, alors $x^3 + x - 1 = 0$ (car un quotient est nul uniquement si son numérateur l'est). Et nous remarquons que $x = 1$ est solution de cette équation (car $1^3 + 1 - 2 = 0$). Donc l'équation $f(x) = 0$ admet bien une unique solution sur son domaine de définition, et cette solution est $x = 1$.

- 4 La formule donnant l'équation réduite de la tangente au point d'abscisse a est :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

Ici, $a = 0$, $f'(0) = 3$ et $f(0) = -2$, d'où :

$$(\mathcal{T}) : y = 3x - 2.$$

■ Corrigé de l'exercice 13.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

- 1 f est de la forme $\frac{u}{v}$ avec $u(x) = 2x^2 + 3x - 9$ et $v(x) = 3 - x$.

Donc $f' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ avec $u'(x) = 4x + 3$ et $v'(x) = -1$. D'où :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(4x+3)(3-x) - (2x^2+3x-9) \times (-1)}{(3-x)^2} \\ &= \frac{12x - 4x^2 + 9 - 3x + 2x^2 + 3x - 9}{(3-x)^2} \\ &= \frac{-2x^2 + 12x}{(3-x)^2} \end{aligned}$$

$$f'(x) = \frac{2x(-x+6)}{(3-x)^2}$$

(toujours mettre $f'(x)$ sous la forme factorisée)

D'où le tableau suivant :

x	$-\infty$	0	3	6	$+\infty$
$2x$		$-$	0	$+$	
$-x+6$		$+$	$+$	0	$-$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$-$
$f(x)$		$\nearrow$	-3	$\nearrow$	-27

2 $f(x) = 0 \iff 2x^2 + 3x - 9 = 0$. Le discriminant du polynôme de degré 2 est :

$$\Delta = 9 - 4 \times 2 \times (-9) = 9 + 72 = 81 > 0.$$

Donc il existe deux solutions :

$$x_1 = \frac{-3 - \sqrt{81}}{4} = -3 \quad ; \quad x_2 = \frac{-3 + \sqrt{81}}{4} = \frac{3}{2}.$$

Ainsi, les deux solutions de l'équation $f(x) = 0$ sont -3 et $\frac{3}{2}$.

3 La formule donnant l'équation réduite de la tangente au point d'abscisse a est :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

Ici, $a = 1$, $f'(1) = \frac{2 \times (-1 + 6)}{(3 - 1)^2} = \frac{5}{2}$ et $f(1) = -2$ d'où :

$$(\mathcal{T}) : y = \frac{5}{2}(x - 1) - 2 \quad \text{soit :} \quad \boxed{(\mathcal{T}) : y = \frac{5}{2}x - \frac{9}{2}}$$

4 Supposons qu'il existe un point $M(x, f(x))$ de $\mathcal{C}$ en lequel la tangente est parallèle à $\mathcal{T}$. Alors, $f'(x) = \frac{5}{2}$ (en effet, si deux droites sont parallèles, alors elles ont le même coefficient directeur).

Il faut donc résoudre l'équation $f'(x) = \frac{5}{2}$, soit :

$$\begin{aligned} \frac{-2x^2 + 12x}{(3 - x)^2} = \frac{5}{2} &\iff (-2x^2 + 12x) \times 2 = 5(3 - x)^2 &\iff -4x^2 + 24x = 5(9 - 6x + x^2) &\iff -4x^2 + 24x \\ &&&\iff x^2 - 6x + 5 = 0. \end{aligned}$$

Le discriminant du polynôme de degré 2 est :

$$\Delta = 36 - 20 = 16$$

d'où deux solutions :

$$x_1 = \frac{6 - 4}{2} = 1 \quad ; \quad x_2 = \frac{6 + 4}{2} = 5.$$

Il existe donc bien un autre point en lequel la tangente est parallèle à $\mathcal{T}$; il s'agit du point d'abscisse 5 et donc d'ordonnée $f(5) = -28$.

La tangente à $\mathcal{C}$ au point $M(5; -28)$ est donc parallèle à $\mathcal{T}$.

Fonction exponentielle

Disponible sur <http://www.mathweb.fr>

A Exercices d'application du cours

R Exercices de réflexion

👉 Exercice & corrigé relus avec attention pour éviter les erreurs

12 juin 2018

Opérations algébriques

■ Exercice 1. Simplification d'écritures

★★★★☆ **A**

Corrigé page 42 👉

(Source : tes-exp-02)

Simplifier les écritures suivantes sous la forme d'une unique exponentielle.

1 $\frac{e^6 \times e^4}{e^{-8}}$

3 $\frac{e^{-1} \times e^3 \times e^{-2}}{(e^{-5})^{-2} \times e^{-9}}$

2 $(e^{-2} \times e^5)^3$

4 $\left(\frac{e^6}{e^3}\right)^2 \times e^{-2}$

■ Exercice 2. Équations

★★★★☆ **A**

Corrigé page 42 👉

(Source : tes-exp-03)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

1 $e^x = 1$

4 $e^{x^2} = e^{3x-2}$

2 $e^{2x} = e^{-x+6}$

5 $e^{2x} = e^{x^2+3}$

3 $e^{2x} - 2e^x + 1 = 0$

6 $e^{3x-1} = -e^{x^2+1}$

■ Exercice 3. Inéquations

★★★★☆ **A**

Corrigé page 43 👉

(Source : tes-exp-04)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

1 $e^x < 1$

3 $e^{x^2-x-3} \leq \sqrt{e}$

2 $e^{3x+1} < e^{2x-1}$

4 $\sqrt{e} \times e^{x^2} \geq e^x$

Dérivation & étude de fonctions

■ Exercice 4. Dérivées de fonctions exponentielles

(Source : tes-exp-05)

★★★★☆☆

A

Corrigé page 44

Pour chacune des fonctions f suivantes, donner la fonction dérivée f' .

1 $f(x) = e^{3x+1}$

2 $f(x) = e^{x^2+1}$

3 $f(x) = e^x + 3e^{-x}$

4 $f(x) = \exp\left(2x + \frac{1}{x}\right)$

5 $f(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$

6 $f(x) = (3x - 2)e^{-x}$

7 $f(x) = \frac{(x^2 + 1)e^x}{(x^2 - 1)e^{-x}}$

■ Exercice 5. À partir d'un graphique

(Source : tes-exp-07)

★★★★☆☆

R

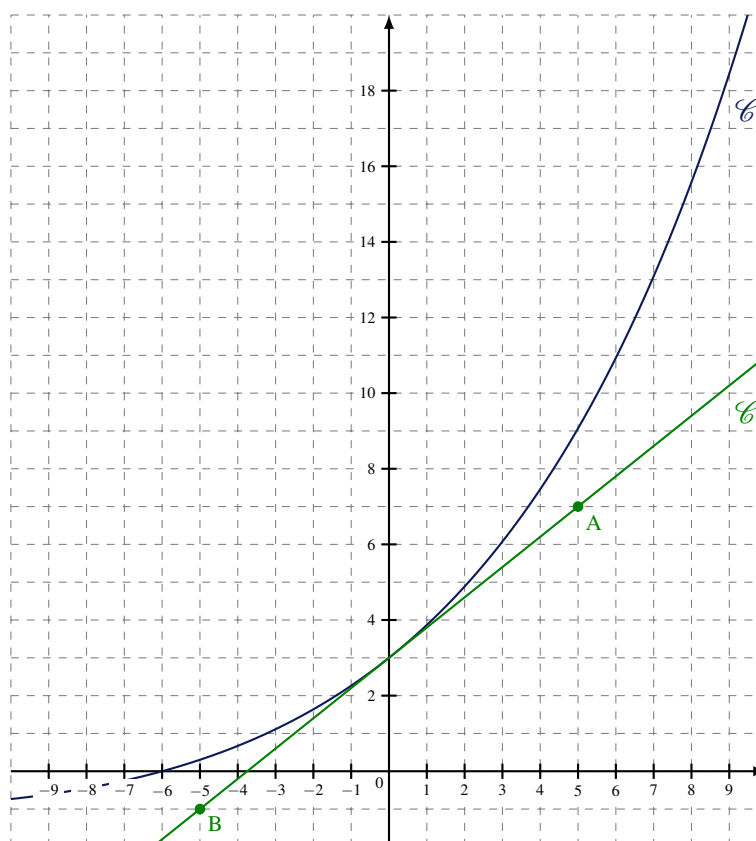
Corrigé page 46

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = (ax + b)e^{kx}$$

où a , b et k sont trois nombres réels.

La courbe représentative $\mathcal{C}$ de f est donnée ci-dessous :



$\mathcal{T}$ est la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.

Les points A et B sont sur $\mathcal{T}$.

Par lecture graphique :

- 1 Déterminer la valeur de $f(0)$.
En déduire la valeur de b .
- 2 Déterminer la solution de l'équation $f(x) = 0$.
En déduire la valeur de a .
- 3 Déterminer la valeur de $f'(0)$.
En déduire la valeur de k .

Étude de fonctions

■ Exercice 6. Modélisation du taux d'équipement en smartphones

★★★★☆ A

(Source : tes-exp-08)

Corrigé page 46

On peut modéliser le taux d'équipement en smartphones des adultes français au cours de l'année $2015 + t$ par le fonction f définie pour tout réel positif t par :

$$f(t) = \frac{1}{1 + e^{-0,5t}}.$$

- 1 Étudier le sens de variation de la fonction f .
- 2 Justifier que le taux d'équipement peut être égal à 90 %.
- 3 À partir de quelle année le taux d'équipement deviendra supérieur à 90 %.

■ Exercice 7. Taux de malades après injection d'un antidote

★★★★☆ R

(Source : tes-exp-09)

Corrigé page 47

On injecte à toutes les personnes d'un groupe d'individus infectés par un virus un antidote à l'instant $x = 0$.

Le taux de personnes ayant le virus à l'instant x est donné par la fonction f définie pour $x \geq 0$ par :

$$f(x) = e^{-x} \sqrt{x+1},$$

où x est exprimé en jour.

- 1 Déterminer les variations de f .
- 2 Soit l'algorithme suivant :

Algorithme 3

Entrées

```
x : variable réelle
f : variable réelle
f prend la valeur 1
x prend la valeur 0
```

Traitement

Tant que $f > 0.5$

x prend la valeur $x+1/24$

f prend la valeur $e^{-x}\sqrt{x+1}$

Fin du Tant que

Sortie

Afficher x

À quoi correspond la valeur affichée par cet algorithme ?

- 3** Cet algorithme affiche la valeur : 1,08333.

Indiquer au bout de combien d'heures le taux de malades est inférieur à 50 %.

- 4** À l'aide d'un tableur ou de votre calculatrice, déterminer au bout de combien de jours et d'heures ce taux sera strictement inférieur à 90 %.

■ Exercice 8. Prendre des initiatives

(Source : tes-exp-06)

★★★★☆ R

Corrigé page 48 ✎

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1 ; 1\}$ par :

$$f(x) = \frac{(x^2 + 1)e^x}{(x^2 - 1)e^{-x}}.$$

On admet que sa dérivée est (voir page 45) :

$$f'(x) = \frac{2x^4 - 4x - 2}{(x^2 - 1)^2} e^{2x}$$

Étudier les variations de f sur $\mathbb{R} \setminus \{-1 ; 1\}$ puis dresser un tableau de variation.

■ Exercice 9. Étude de la fonction $3x + 1 + xe^{-x}$ (type bac)

(Source : tes-exp-01)

★★★★☆ R

Corrigé page 48 ✎

Attention : cet exercice nécessite la connaissance du logarithme népérien et de l'intégrale.

Partie A

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 3e^x + 1 - x$.

- 1** Calculer la dérivée $g'(x)$ de $g(x)$.
- 2** Déterminer le signe de $g'(x)$ puis les variations de g sur $\mathbb{R}$.
- 3** Calculer $g(-\ln 3)$. En déduire le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x + 1 + xe^{-x}$.

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (on prendra comme unités : 5 cm en abscisses et 2 cm en ordonnées).

- 1 Montrer que la dérivée de $f(x)$ est : $f'(x) = \frac{g(x)}{e^x}$, où g est la fonction introduite dans la partie A.
- 2 En déduire le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.
- 3 Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $] -1; 0[$.
On notera α cette valeur. Donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près.
- 4 On note $\mathcal{T}$ la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0. Donner l'équation réduite de $\mathcal{T}$.

Partie C

Soit la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = 4x + 1$.

On note $\mathcal{A}(\lambda)$ l'aire du domaine Δ délimité par $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$, le point $A(0;4)$ et la droite d'équation $x = \lambda$.

- 1 Tracer $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ et $\mathcal{T}$ dans $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
- 2 Hachurer Δ pour $\lambda = 1$.
- 3
 - a. Montrer que la fonction R définie sur $\mathbb{R}$ par $R(x) = -(x+1)e^{-x}$ est une primitive de la fonction r définie par $r(x) = xe^{-x}$.
 - b. En déduire l'expression de $\mathcal{A}(\lambda)$ pour $\lambda > 0$.

■ Corrigé de l'exercice 1.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

$$\begin{aligned}
 1 \quad \frac{e^6 \times e^4}{e^{-8}} &= \frac{e^{6+4}}{e^{-8}} \\
 &= \frac{e^{10}}{e^{-8}} \\
 &= e^{10-(-8)} \\
 &= e^{10+8}
 \end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{e^6 \times e^4}{e^{-8}} = e^{18}}$$

$$\begin{aligned}
 2 \quad (e^{-2} \times e^5)^3 &= (e^{-2+5})^3 \\
 &= (e^3)^3 \\
 &= e^{3 \times 3}
 \end{aligned}$$

$$\boxed{(e^{-2} \times e^5)^3 = e^9}$$

$$\begin{aligned}
 3 \quad \frac{e^{-1} \times e^3 \times e^{-2}}{(e^{-5})^{-2} \times e^{-9}} &= \frac{e^{-1+3-2}}{e^{-5 \times (-2)} \times e^{-9}} \\
 &= \frac{e^0}{e^{10-9}} \\
 &= \frac{1}{e^1}
 \end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{e^{-1} \times e^3 \times e^{-2}}{(e^{-5})^{-2} \times e^{-9}} = e^{-1}}$$

$$\begin{aligned}
 4 \quad \left(\frac{e^6}{e^3}\right)^2 \times e^{-2} &= (e^{6-3})^2 \times e^{-2} \\
 &= e^{3 \times 2} \times e^{-2} \\
 &= e^{6-2}
 \end{aligned}$$

$$\boxed{\left(\frac{e^6}{e^3}\right)^2 \times e^{-2} = e^4}$$

■ Corrigé de l'exercice 2.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

$$\begin{aligned}
 1 \quad e^x = 1 &\iff e^x = e^0 \\
 &\iff x = 0 \quad \text{d'après la propriété } e^a = e^b \iff a = b.
 \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \mathcal{S} = \{0\}$$

$$\begin{aligned}
 2 \quad e^{2x} = e^{-x+6} &\iff 2x = -x + 6 \quad \text{d'après la propriété } e^a = e^b \iff a = b. \\
 &\iff 3x = 6 \\
 &\iff x = 2.
 \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \mathcal{S} = \{2\}$$

$$\begin{aligned}
3 \quad e^{2x} - 2e^x + 1 = 0 &\iff (e^x)^2 - 2e^x + 1 = 0 \\
&\iff (e^x - 1)^2 = 0 \quad \text{en utilisant l'identité } a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2 \\
&\iff e^x - 1 = 0 \\
&\iff e^x = 1 \\
&\iff e^x = e^0 \\
&\iff x = 0.
\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{S} = \{0\}$

$$\begin{aligned}
4 \quad e^{x^2} = e^{3x-2} &\iff x^2 = 3x - 2 \\
&\iff x^2 - 3x + 2 = 0
\end{aligned}$$

Le discriminant du polynôme $x^2 - 3x + 2$ est :

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 2 = 9 - 8 = 1 > 0$$

donc il y a deux solutions à l'équation :

$$x_1 = \frac{-(-3) - \sqrt{1}}{2 \times 1} = 1$$

et

$$x_2 = \frac{-(-3) + \sqrt{1}}{2 \times 1} = 2.$$

Donc $\mathcal{S} = \{1 ; 2\}$

$$\begin{aligned}
5 \quad e^{2x} = e^{x^2+3} &\iff 2x = x^2 + 3 \\
&\iff x^2 - 2x + 3 = 0.
\end{aligned}$$

Le discriminant du polynôme $x^2 - 2x + 3$ est :

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 3 = 4 - 12 = -8 < 0.$$

Par conséquent, l'équation n'admet aucune solution et donc $\mathcal{S} = \emptyset$.

$$6 \quad e^{3x-1} = -e^{x^2+1}.$$

Une exponentielle étant toujours strictement positive, cette équation ne peut pas avoir de solution car $e^{3x-1} > 0$ et $-e^{x^2+1} < 0$.

Donc $\mathcal{S} = \emptyset$.

■ Corrigé de l'exercice 3.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

$$1 \quad e^x < 1 \iff e^x < e^0 \iff x < 0 \text{ d'après la propriété : } e^a < e^b \iff a < b.$$

Donc $\mathcal{S} =]-\infty ; 0[$

$$2 \quad e^{3x+1} < e^{2x-1} \iff 3x+1 < 2x-1 \iff x < -2.$$

Donc $\mathcal{S} =]-\infty ; -2[$

$$\begin{aligned}
3 \quad e^{x^2-x-3} &\leq \sqrt{e} \iff e^{x^2-x-3} \leq e^{\frac{1}{2}} \\
&\iff x^2 - x - 3 \leq \frac{1}{2} \\
&\iff x^2 - x - \frac{7}{2} \leq 0 \\
&\iff 2x^2 - 2x - 7 \leq 0 \quad \text{en multipliant tout par 2.}
\end{aligned}$$

Le discriminant du polynôme $2x^2 - 2x - 7$ est :

$$\Delta = 4 + 56 = 60 > 0$$

donc il admet deux racines distinctes :

$$x_1 = \frac{2 - \sqrt{60}}{4} = \frac{2 - 2\sqrt{15}}{4} = \frac{1 - \sqrt{15}}{2}$$

et

$$x_2 = \frac{1 + \sqrt{15}}{2}.$$

De plus, le trinôme est du signe opposé au signe de « 2 » à l'intérieur des racines donc l'ensemble solution de l'inéquation est :

$$\mathcal{S} = \left[\frac{1 - \sqrt{15}}{2}; \frac{1 + \sqrt{15}}{2} \right]$$

$$\begin{aligned}
4 \quad \sqrt{e} \times e^{x^2} &\geq e^x \iff e^{\frac{1}{2}} \times e^{x^2} \geq e^x \\
&\iff e^{x^2 + \frac{1}{2}} \geq e^x \\
&\iff x^2 + \frac{1}{2} \geq x \\
&\iff x^2 - x + \frac{1}{2} \geq 0 \\
&\iff 2x^2 - 2x + 1 \geq 0 \quad \text{en multipliant tout par 2.}
\end{aligned}$$

Le discriminant du polynôme $2x^2 - 2x + 1$ est :

$$\Delta = 4 - 8 = -4 < 0$$

donc il n'admet aucune racine ; par conséquent, il est toujours du même signe que « 2 », c'est-à-dire positif.

Ainsi, $\mathcal{S} = \mathbb{R}$.

■ Corrigé de l'exercice 4.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

$$1 \quad f(x) = e^{3x+1}. f(x) \text{ est de la forme } e^{u(x)}, \text{ où } u(x) = 3x + 1 \text{ et } u'(x) = 3.$$

$$\text{Donc } f'(x) = u'(x)e^{u(x)}.$$

$$\text{Ainsi, } f'(x) = 3e^{3x+1}.$$

$$2 \quad f(x) = e^{x^2+1}. f(x) \text{ est de la forme } e^{u(x)}, \text{ où } u(x) = x^2 + 1 \text{ et } u'(x) = 2x.$$

$$\text{Donc } f'(x) = u'(x)e^{u(x)}.$$

$$\text{Ainsi, } f'(x) = 2xe^{x^2+1}$$

3 $f(x) = e^x + 3e^{-x}$ donc $f'(x) = e^x - 3e^{-x}$.

4 $f(x) = \exp\left(2x + \frac{1}{x}\right)$. $f(x)$ est de la forme $e^{u(x)}$, où $u(x) = 2x + \frac{1}{x}$ et $u'(x) = 2 - \frac{1}{x^2}$.

Donc $f'(x) = u'(x)e^{u(x)}$.

Ainsi, $f'(x) = \left(2 - \frac{1}{x^2}\right) \exp\left(2x + \frac{1}{x}\right)$

5 $f(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$. $f(x)$ est de la forme $\frac{1}{v(x)}$, avec $v(x) = 1 + e^{-x}$ et $v'(x) = -e^{-x}$.

Donc $f'(x) = -\frac{v'(x)}{[v(x)]^2}$, soit $f'(x) = \frac{e^{-x}}{(1 + e^{-x})^2}$

6 $f(x) = (3x - 2)e^{-x}$. $f(x)$ est de la forme $u(x) \times v(x)$ avec :

$$\begin{array}{ll} u(x) = 3x - 2 & u'(x) = 3 \\ v(x) = e^{-x} & v'(x) = -e^{-x} \end{array}$$

Donc $f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$ soit :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3e^{-x} + (3x - 2)(-e^{-x}) \\ &= 3e^{-x} - (3x - 2)e^{-x} \\ &= [3 - (3x - 2)]e^{-x} \\ &= (3 - 3x + 2)e^{-x} \end{aligned}$$

$$f'(x) = (5 - 3x)e^{-x}$$

7 $f(x) = \frac{(x^2 + 1)e^x}{(x^2 - 1)e^{-x}}$.

On peut écrire : $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} \times \frac{e^x}{e^{-x}}$
 $= \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} e^{2x}$.

Donc $f(x)$ est de la forme $u(x)v(x)$ avec $u(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$ et $v(x) = e^{2x}$.

$$u'(x) = \frac{2x(x^2 - 1) - 2x(x^2 + 1)}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-4x}{(x^2 - 1)^2}.$$

$$v'(x) = 2e^{2x}.$$

Ainsi, $f'(x) = \frac{-4x}{(x^2 - 1)^2} e^{2x} + 2 \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} e^{2x}$
 $= \left(\frac{-4x}{(x^2 - 1)^2} + 2 \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} \right) e^{2x}$
 $= \frac{-4x + 2(x^2 + 1)(x^2 - 1)}{(x^2 - 1)^2} e^{2x}$

$$f'(x) = \frac{2x^4 - 4x - 2}{(x^2 - 1)^2} e^{2x}$$

■ Corrigé de l'exercice 5.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

1 D'après le graphique, $f(0) = 3$.

Or, $f(0) = (a \times 0 + b)e^0 = b \times 1 = b$, donc $\underline{b = 3}$.

2 $\mathcal{C}$ coupe l'axe des abscisses en $x = -6$, ce qui signifie que $f(-6) = 0$.

Donc $f(-6) = (a \times (-6) + 3)e^{kx} = 0$. Une exponentielle n'étant jamais nulle, cela signifie que $-6a + 3 = 0$, soit $\underline{a = 0,5}$.

3 $f'(0)$ est le coefficient directeur de $\mathcal{T}$. Pour le déterminer, on calcule :

$$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-1 - 7}{-5 - 5} = 0,8.$$

Or, si $f(x) = (ax + 3)e^{kx}$ alors :

$$\begin{aligned} f'(x) &= ae^{kx} + (ax + 3) \times ke^{kx} \\ &= (a + akx + 3k)e^{kx}. \end{aligned}$$

Ainsi, $f'(0) = (a + 3k)e^0 = a + 3k$ et donc $a + 3k = 0,8$.

En remplaçant a par $0,5$, on a : $3k = 0,3$, soit $\underline{k = 0,1}$.

Finalement on trouve $\boxed{f(x) = (0,5x + 3)e^{0,1x}}$

■ Corrigé de l'exercice 6.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

1 f est de la forme $\frac{1}{v}$ donc f' sera de la forme $-\frac{v'}{v^2}$ et donc :

$$f'(t) = \frac{0,5e^{-0,5t}}{(1 + e^{-0,5t})^2}.$$

Ainsi $f'(t) > 0$ pour tout réel t , donc à plus forte raison pour $t \geq 0$.

f est donc croissante sur $[0; +\infty[$.

2 Nous cherchons ici à savoir si l'équation $f(t) = 0,9$ admet une solution sur $[0; +\infty[$.

$f(4) \approx 0,88$ et $f(5) \approx 0,92$, donc $0,9 \in [f(4); f(5)]$. De plus, f est strictement croissante et continue sur $[4; 5]$ donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe une unique solution à l'équation $f(t) = 0,9$ sur $[0; +\infty[$.

3 D'après les calculs précédents, $f(t) = 0,9$ pour $4 < t < 5$ donc c'est au cours de l'année $2015 + 4 = 2019$ que le taux d'équipement dépassera 90%.

1 f est de la forme uv , avec :

$$\begin{aligned} u(x) &= e^{-x} & u'(x) &= -e^{-x} \\ v'(x) &= \sqrt{x+1} & v'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \end{aligned}$$

donc $f'(x) = (u'v + uv')(x)$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= (-e^{-x})\sqrt{x+1} + e^{-x} \times \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \\ &= \left(\frac{1}{2\sqrt{x+1}} - \sqrt{x+1} \right) e^{-x} \\ &= \left(\frac{1}{2\sqrt{x+1}} - \sqrt{x+1} \times \frac{2\sqrt{x+1}}{2\sqrt{x+1}} \right) e^{-x} \\ &= \left(\frac{1}{2\sqrt{x+1}} - \frac{2(x+1)}{2\sqrt{x+1}} \right) e^{-x} \\ &= \left(\frac{1-2x-2}{2\sqrt{x+1}} \right) e^{-x} \\ &= \left(\frac{-2x-1}{2\sqrt{x+1}} \right) e^{-x} \\ &= -(2x+1) \frac{e^{-x}}{2\sqrt{x+1}}. \end{aligned}$$

$$\frac{e^{-x}}{2\sqrt{x+1}} > 0 \text{ et } (2x+1) > 0 \text{ (car } x \geq 0) \text{ donc } f'(x) < 0.$$

Ainsi, f est strictement décroissante pour $x \geq 0$.

2 La boucle s'exécute tant que la valeur f calculée est supérieure à 0,5. Or, $\sqrt{x+1}e^{-x}$ correspond au taux de malades restants donc la boucle s'arrêtera pour la valeur de x telle que $f(x) \leq 0,5$.

Remarquons de surcroît que x est augmenté de $\frac{1}{24}$ à chaque passage dans la boucle, ce qui correspond à 1 heure.

La valeur affichée est donc le moment (exprimé en jour décimal) où il y aura 50 % ou moins de malades par rapport au jour initial.

3 $x = 1,08333$ jour = $1,08333 \times 24$ heures = 26 heures.

Ainsi, après 26 heures, le taux de malades est inférieur à 50 %.

4 On trouve $x = 5,583333$ jours = 5 jours 14 heures.

Ainsi, après 5 jours et 14 heures, le taux de malades est inférieur à 90 %.

■ Corrigé de l'exercice 8.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

$f'(x)$ est du signe de $2x^4 - 4x - 2$, soit en factorisant par 2, du polynôme $u(x) = x^4 - 2x - 1$.

$$u'(x) = 4x^3 - 2 \quad \text{et} \quad u''(x) = 12x^2$$

donc $u''(x) \geq 0$ pour tout réel x , ce qui signifie que u' est strictement croissante.

$u'(0) = -2 < 0$ et $u'(1) = 2 > 0$. u' étant continue et strictement monotone sur $[0; 1]$, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe une unique valeur α sur $[0; 1]$ telle que $u'(\alpha) = 0$. On a donc :

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$u'(x)$	-	0	+
$u(x)$			

À l'aide de la calculatrice, on trouve $\alpha \approx 0,794$ et $u(\alpha) \approx -2,2$.

Il existe donc deux valeurs x_1 et x_2 solutions de l'équation $u(x) = 0$, l'une sur $]-\infty; \alpha[$ et l'autre sur $]\alpha; +\infty[$.

On trouve à l'aide de la calculatrice $x_1 \approx -0,475$ et $x_2 \approx 1,395$. On a alors :

x	$-\infty$	-1	x_1	1	x_2	$+\infty$		
$f'(x)$	+		+	0	-	-	0	+
$f(x)$			$\approx -0,6$			≈ 50		

■ Corrigé de l'exercice 9.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

Partie A

1 $g'(x) = 3e^x - 1$.

2 $g'(x) > 0 \iff 3e^x - 1 > 0$

$$\iff e^x > \frac{1}{3}$$

$$\iff x > \ln \frac{1}{3}$$

$$\iff x > -\ln 3$$

d'où le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	$-\ln 3$	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$			

3 $g(-\ln 3) = 3e^{\ln \frac{1}{3}} + 1 + \ln 3 = 2 + \ln 3 > 0.$

Ainsi, $g(x) > 0$ sur $\mathbb{R}$.

Partie B

1 Calculons $f'(x)$: $f(x)$ est la somme de $a(x) = 3x + 1$ et $b(x) = xe^{-x}$.

On sait que $a'(x) = 3$. De plus, $b(x)$ est de la forme $u(x) \times v(x)$ avec :

$$\begin{array}{ll} u(x) = x & u'(x) = 1 \\ v(x) = e^{-x} & v'(x) = -e^{-x} \end{array}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} b'(x) &= 1 \times e^{-x} - xe^{-x} \\ &= (1 - x)e^{-x}. \end{aligned}$$

On peut alors écrire :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3 + (1 - x)e^{-x} \\ &= 3 + \frac{1 - x}{e^x} \\ &= \frac{3e^x + 1 - x}{e^x} \end{aligned}$$

$$f'(x) = \frac{g(x)}{e^x}$$

2 On sait que $g(x) > 0$ sur $\mathbb{R}$ (d'après la partie A) donc $f'(x) > 0$ sur $\mathbb{R}$. Ainsi, f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

3 $f(-1) = -2 - e < 0$ et $f(0) = 1 > 0$.

De plus, f est strictement croissante et dérivable sur $] -1; 0[$ donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique réel α dans $] -1; 0[$ tel que $f(\alpha) = 0$.

La calculatrice nous aide à trouver : $\alpha \approx -0,23$.

4 La formule donnant l'équation réduite d'une tangente au point d'abscisse $x = a$ est :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

Donc, pour $a = 0$, on a :

$$y = f'(0)x + f(0),$$

soit :

$$\mathcal{T} : y = 4x + 1$$

Partie C

- 1 Voir graphique ci-dessous.
- 2 Voir graphique ci-dessous.
- 3 a. La dérivée de $R(x)$ est :

$$\begin{aligned}
 R'(x) &= -e^{-x} - (x+1)(-e^{-x}) \\
 &= -e^{-x} + xe^{-x} + e^{-x} \\
 &= xe^{-x} \\
 &= r(x).
 \end{aligned}$$

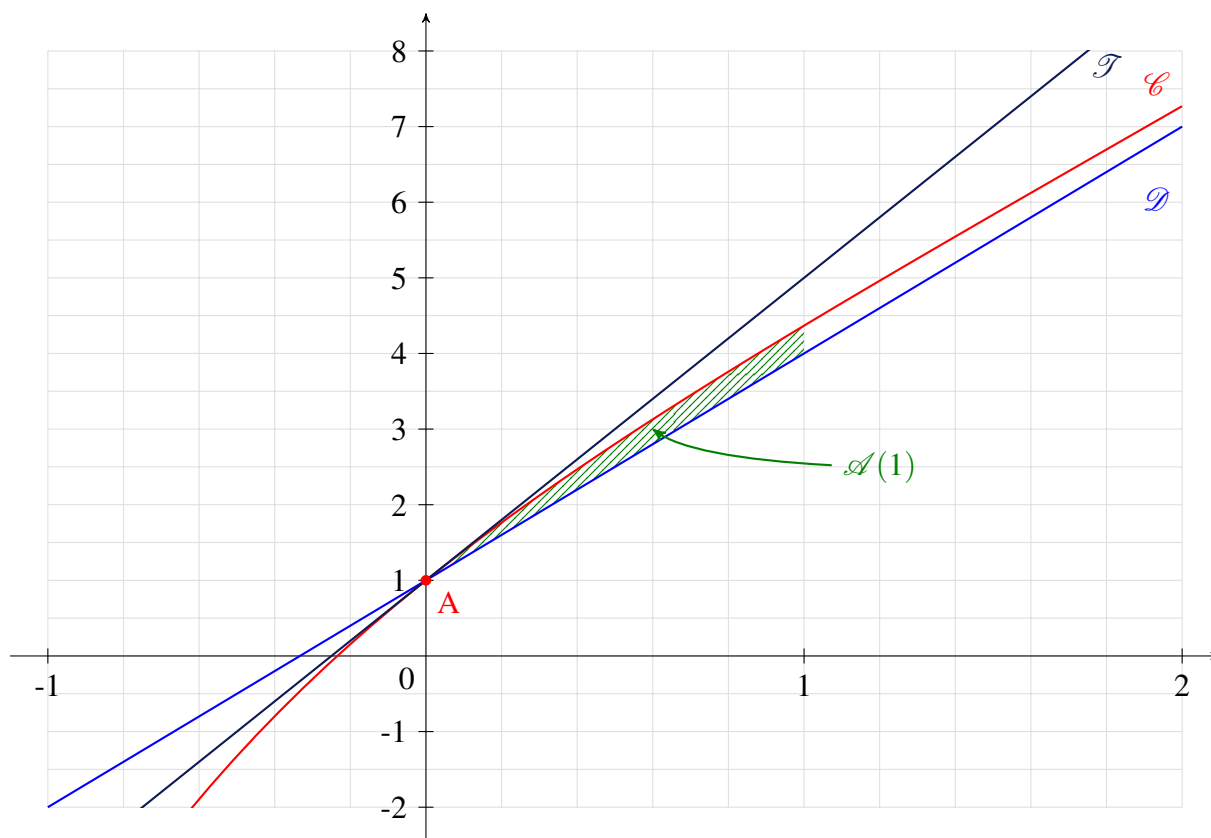
Ainsi, R est une primitive de r .

- b. $\mathcal{A}(\lambda)$ est l'aire entre $\mathcal{C}$ (courbe représentative de f) et $\mathcal{D}$ (d'équation $y = 3x + 1$) sur l'intervalle $]0; \lambda[$.

Sur cet intervalle, $f(x) \geq 3x + 1$ car $f(x) - (3x + 1) = xe^{-x} \geq 0$. Ainsi, $\mathcal{A}(\lambda)$ se calcule par l'intégrale suivante :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A}(\lambda) &= \int_0^\lambda (f(x) - (3x + 1)) \, dx \\
 &= \int_0^\lambda r(x) \, dx \\
 &= R(\lambda) - R(0) \\
 &= -(\lambda + 1)e^{-\lambda} - (-1)
 \end{aligned}$$

$\mathcal{A}(\lambda) = 1 - (\lambda + 1)e^{-\lambda}$



Logarithme népérien

Disponible sur <http://www.mathweb.fr>

A Exercices d'application du cours

R Exercices de réflexion

👉 Exercice & corrigé relus avec attention pour éviter les erreurs

12 juin 2018

Calculs algébriques

■ Exercice 1. Simplification d'écritures

★★★★☆

A

Corrigé page 57 👉

(Source : tes-ln-04)

Simplifier au maximum les écritures suivantes en les écrivant sous la forme $k \ln a$, où a est l'entier le plus petit possible.

1 $\ln 5 + \ln 3$

4 $\ln 25 - \ln 50$

2 $\ln 8 - \ln 2$

5 $\ln [5^{-2}] + 3 \ln 5$

3 $\ln 9 + \ln 3$

6 $\ln 12 + \ln 16$

■ Exercice 2. Équations

★★★★☆

A

Corrigé page 57 👉

(Source : tes-ln-05)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1 $\ln x = 3$

5 $\ln(x^2 + 1) = \ln(x^2 + 2x + 1)$

2 $\ln x = 1$

6 $\ln(2x^2 + 2x - 12) = \ln(x^2 + 3x - 10)$

3 $\ln x = e$

7 $\ln(x^2 + 3x + 5) = \ln(2x^2 - 5x + 12)$

4 $\ln(x+1) = \ln(2x+5)$

8 $(\ln x)^2 + \ln x - 6 = 0$

■ Exercice 3. Inéquations

★★★★☆

A

Corrigé page 58 👉

(Source : tes-ln-06)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

1 $\ln(-3x+4) \leq 3$

3 $(\ln x)^2 - 4 \ln x + 3 < 0$

2 $\ln(x^2 - 4) < \ln[2x(x+2)]$

4 $\ln\left(\frac{x+2}{x-2}\right) > 1$

■ Exercice 4. Détermination de coefficients et équation de tangente

★★★★☆ R

(Source : tes-ln-10)

Corrigé page 61

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = a \ln x + b$$

où a et b sont deux nombres réels non nuls.

- 1 On sait que $f'(1) = 1$ et $f(e^{-1}) = -2$. Déterminer les valeurs de a et b .
- 2 Donner l'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 1.

■ Exercice 5. Détermination de coefficients (le retour)

★★★★★ R

(Source : tes-ln-11)

Corrigé page 61

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = k \ln(ax + b)$$

où a , b et k sont trois nombres réels non nuls.

- 1 On sait que $f(1) = 1$. Montrer alors que $a + b = e^{\frac{1}{k}}$.
- 2 On sait de plus que $f'(1) = 1$. Montrer alors que $a = \frac{b}{k-1}$.
- 3 En déduire que $b = \left(\frac{k-1}{k}\right) e^{\frac{1}{k}}$ puis que $a = \frac{1}{k} e^{\frac{1}{k}}$.
- 4 Montrer que $f(0) = 1 + k \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right)$.

Dérivation & études de fonctions

■ Exercice 6. Dérivation

★★★★☆ A

(Source : tes-ln-07)

Corrigé page 62

Dériver les fonctions suivantes :

- | | |
|------------------------|--|
| 1 $f(x) = \ln x + 2$ | 5 $f(x) = \ln(x^2 + 1)$ |
| 2 $f(x) = \ln(x + 2)$ | 6 $f(x) = \ln(\ln x)$ |
| 3 $f(x) = x \ln x - x$ | 7 $f(x) = x^2 + x + 1 - \frac{\ln x}{x}$ |
| 4 $f(x) = (\ln x)^2$ | 8 $f(x) = \frac{\ln x - x}{1 + x}$ |

■ Exercice 7. Étude de $x^2 + x + 1 - \frac{\ln x}{x}$ avec fonction auxiliaire

(Source : tes-ln-08)

★★★★☆ A

Corrigé page 63

1 Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$g(x) = 2x^3 + x^2 - 1 + \ln x.$$

a. Déterminer les variations de g .

b. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution sur $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$.

On la notera α .

2 On pose $f(x) = x^2 + x + 1 - \frac{\ln x}{x}$. D'après la question 7 de l'Exercice 6, on sait que $f'(x) = 2x + 1 - \frac{1 - \ln x}{x^2}$.

a. Montrer que $f'(x)$ est du même signe que $g(x)$ sur $]0; +\infty[$.

b. En déduire les variations de f sur $]0; +\infty[$, puis montrer que $f(x) > 0$ sur $]0; +\infty[$.

■ Exercice 8. Étude de $\frac{\ln x - x}{x+1}$ avec fonction auxiliaire

(Source : tes-ln-09)

★★★★☆ R

Corrigé page 64

On pose $f(x) = \frac{\ln x - x}{x+1}$. On a montré à la question 8 de l'Exercice 6 que :

$$f'(x) = \frac{1 - x \ln x}{x(x+1)^2}.$$

On se propose ici d'étudier la fonction f sur $]0; +\infty[$.

On pose alors $g(x) = 1 - x \ln x$.

1 Calculer $g'(x)$.

2 Étudier le signe de $g'(x)$, puis en déduire les variations de g sur $]0; +\infty[$.

3 Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[1; 2]$.

On admettra que $g(x) > 0$ sur $]0; e^{-1}]$.

4 En déduire le signe de $f'(x)$ puis les variations de f sur $]0; +\infty[$.

■ Exercice 9. Étude de la fonction $x^2 \ln(x) - 3x^2 + 5x - 1$

(Source : tes-ln-12)

★★★★☆ R

Corrigé page 65

On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = x^2 \ln(x) - 3x^2 + 5x - 1.$$

1 Montrer que $f''(x) = 2 \ln x - 3$.

2 Calculer $f'(1)$ et donner une valeur approchée de $f'(10)$; en déduire le signe de $f'(x)$ sur $]0; +\infty[$.

3 En déduire les variations de f sur $]0; +\infty[$ (faites ici preuve d'initiative).

■ Exercice 10. Fonctions $x - \ln x$ et $x - \ln^2 x$

★★★★☆ R

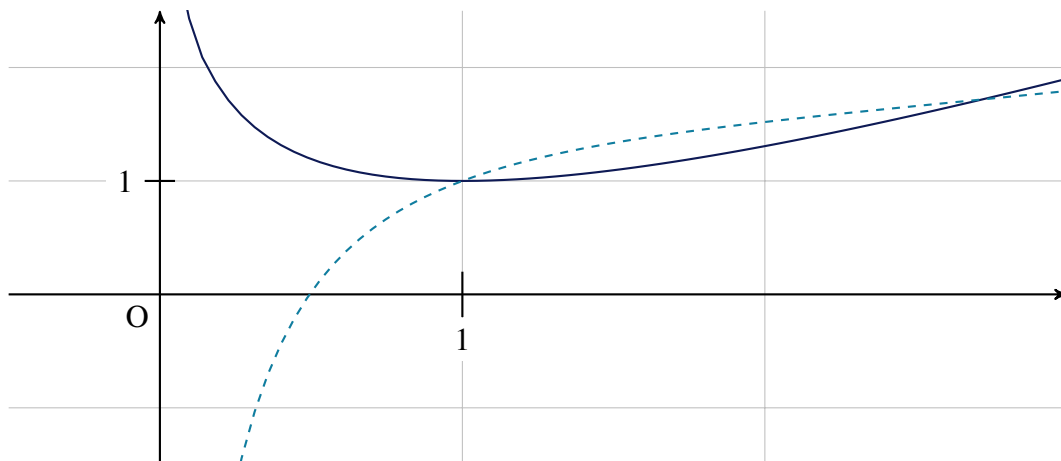
(Source : tes-ln-02)

Corrigé page 66

On considère sur $]0;3]$ les deux fonctions :

$$f(x) = x - \ln x \quad \text{et} \quad g(x) = x - (\ln x)^2.$$

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f , et Γ celle de g dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (le symbole « Γ » se lit « Gamma majuscule »).



Partie A : Étude des fonctions f et g

- 1 On désigne par f' la fonction dérivée de f sur $]0;3]$.
Calculer $f'(x)$ et dresser un tableau de variations de f sur $]0;3]$.
- 2 On désigne par g' la fonction dérivée de g sur $]0;3]$. Calculer $g'(x)$.
En admettant que $(x - 2\ln x)$ est positif sur $]0;3]$, en déduire que g est strictement croissante sur $]0;3]$.
- 3 Désigner, sur le graphique, la courbe $\mathcal{C}$ et la courbe Γ .

Partie B : Position relative des deux courbes

- 1
 - a. Résoudre dans $]0;3]$ l'équation $g(x) = f(x)$.
 - b. En déduire les coordonnées des points d'intersection M et N des courbes $\mathcal{C}$ et Γ .
Placer M et N sur le graphique
- 2
 - a. Résoudre sur $]0;3]$ l'inéquation $g(x) \geq f(x)$.
 - b. En déduire la position relative des courbes $\mathcal{C}$ et Γ sur l'intervalle $[1; e]$.

Partie C : Calcul d'aire

On désigne par $\mathcal{D}$ l'ensemble des points $M(x; y)$ du plan tels que :

$$(1 \leq x \leq e) \quad \text{et} \quad (f(x) \leq y \leq g(x))$$

et par $\mathcal{A}$ son aire.

1 Hachurer $\mathcal{D}$ sur le graphique.

2 Soit la fonction H définie sur $[1; e]$ par $H(x) = -x(\ln x)^2 + 3x \ln x - 3x$.

a. Vérifier que la fonction H est une primitive de la fonction $g - f$ sur $[1; e]$.

On admet que, en unités d'aire, on a $\mathcal{A} = H(e) - H(1)$.

b. Calculer, en unités d'aire, la valeur exacte de $\mathcal{A}$.

c. En donner une valeur approchée au mm^2 près par excès sachant que l'unité graphique est 5 cm en abscisses et 2 cm en ordonnées.

■ Exercice 11. Étude de la fonction $f(x) = \ln \left(\frac{x^2 + 2}{x^2 + 1} \right)$

★★★★☆

A

(Source : tes-ln-03)

Corrigé page 68

Soit la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par : $f(x) = \ln \left(\frac{x^2 + 2}{x^2 + 1} \right)$.

1 Calculer $f'(x)$ et trouver son signe sur $[0; +\infty[$.

2 Dresser alors un tableau de variation de f sur $[0; +\infty[$.

3 On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f .

Donner l'équation réduite de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 3.

■ Exercice 12. Étude de la fonction $1 - 2\ln x$

★★★★★

R

(Source : tes-ln-01)

Corrigé page 69

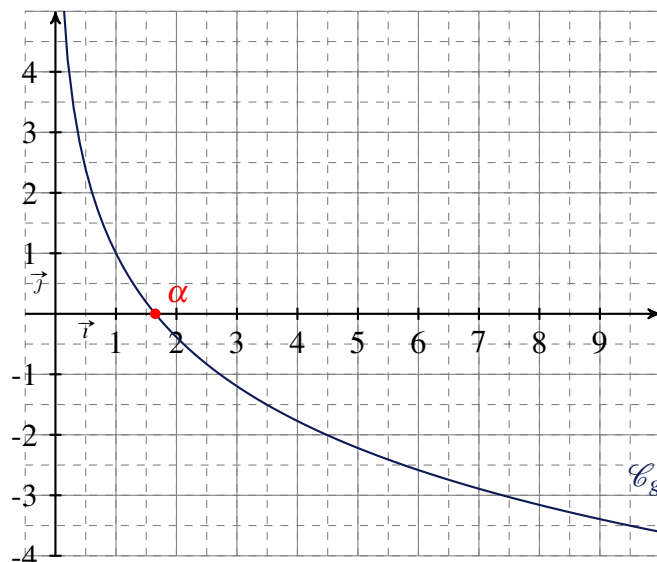
Cet exercice nécessite la connaissance des primitives et de l'intégration à partir de la question 2 de la partie B.

Partie A : Étude préliminaire

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$g(x) = 1 - 2\ln(x).$$

On donne page suivante sa courbe représentative $\mathcal{C}_g$ dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
 $\mathcal{C}_g$ coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse α .



- 1 Déterminer la valeur exacte de α .
- 2 On admet que la fonction g est strictement décroissante sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
Donner, en justifiant, le signe de $g(x)$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

Partie B : Étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2\ln(x) + 1}{x}.$$

- 1
 - a. Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.
 - b. Étudier le signe de $f'(x)$ et en déduire le tableau de variations de la fonction f .
- 2
 - a. Déterminer une primitive F de la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
On pourra remarquer que $f(x) = 2 \times \frac{1}{x} \times \ln(x) + \frac{1}{x}$.
 - b. Soit $I = \frac{1}{4} \int_1^5 f(x) dx$. Déterminer la valeur exacte de I , puis en donner une valeur approchée au centième près.

Partie C : Application économique

Dans cette partie, on pourra utiliser certains résultats de la partie B.

Une entreprise de sous-traitance fabrique des pièces pour l'industrie automobile.

Sa production pour ce type de pièces varie entre 1 000 et 5 000 pièces par semaine, selon la demande.

On suppose que toutes les pièces produites sont vendues.

Le bénéfice unitaire, en fonction du nombre de pièces produites par semaine, peut être modélisé par la fonction f définie dans la partie B, avec x exprimé en milliers de pièces et $f(x)$ exprimé en euros.

- 1 Déterminer, au centime près, la valeur moyenne du bénéfice unitaire pour une production hebdomadaire comprise entre 1 000 et 5 000 pièces.
- 2 Dans cette question, la réponse sera soigneusement justifiée. Toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.
Pour quelle(s) production(s), arrondie(s) à l'unité près, obtient-on un bénéfice unitaire égal à 1,05 €?

■ Corrigé de l'exercice 1.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

- 1 $\ln 5 + \ln 3 = \ln(5 \times 3) = \underline{\ln 15}$.
- 2 $\ln 8 - \ln 2 = \ln\left(\frac{8}{2}\right) = \ln 4 = \ln(2^2) = \underline{2 \ln 2}$.
- 3 $\ln 9 + \ln 3 = \ln(3^2) + \ln 3 = 2 \ln 3 + \ln 3 = \underline{3 \ln 3}$.
- 4 $\ln 25 - \ln 50 = \ln 25 - \ln(2 \times 25) = \ln 25 - (\ln 2 + \ln 25) = \ln 25 - \ln 2 - \ln 25 = \underline{-\ln 2}$.
- 5 $\ln[5^{-2}] + 3 \ln 5 = -2 \ln 5 + 3 \ln 5 = \underline{\ln 5}$.
- 6 $\ln 12 + \ln 16 = \ln(12 \times 16) = \underline{\ln 192}$. (aucune simplification possible car 192 n'est pas une puissance).

■ Corrigé de l'exercice 2.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

- 1 $\ln x = 3 \iff \ln x = \ln(e^3) \iff x = e^3$. Donc $\mathcal{S} = \{e^3\}$.
- 2 $\ln x = 1 \iff x = 0$ (c'est du cours !). Donc $\mathcal{S} = \{0\}$.
- 3 $\ln x = e \iff \ln x = \ln(e^e) \iff x = e^e$. Donc $\mathcal{S} = \{e^e\}$.
- 4 $\ln(x+1) = \ln(2x+5) \iff x+1 = 2x+5$ d'après la propriété : $\ln a = \ln b \iff a = b$
 $\iff 1-5 = 2x-x$
 $\iff -4 = x$.

Or, pour $x = -4$, $x+1 = -4+1 = -3 < 0$ donc $\ln(x+1)$ n'est pas défini. Ainsi, $x = -4$ ne peut pas être solution de cette équation, et donc $\mathcal{S} = \emptyset$.

- 5 $\ln(x^2+1) = \ln(x^2+2x+1) \iff x^2+1 = x^2+2x+1$
 $\iff 0 = 2x$
 $\iff x = 0$.

Pour $x = 0$, $\ln(x^2+1) = \ln(1) = 0$ et $\ln(x^2+2x+1) = \ln(1) = 0$ donc $x = 0$ est bien une solution de l'équation.

Ainsi $\mathcal{S} = \{0\}$.

$$\begin{aligned} 6 \quad \ln(2x^2 + 2x - 12) &= \ln(x^2 + 3x - 10) \iff 2x^2 + 2x - 12 = x^2 + 3x - 10 \\ &\iff x^2 - x - 2 = 0. \end{aligned}$$

Le discriminant de $x^2 - x - 2$ est $\Delta = 9$ donc il admet deux racines :

$$x_1 = \frac{1-3}{2} = -1 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{1+3}{2} = 2.$$

- Pour $x = -1$, $2x^2 + 2x - 12 = -12$ donc $\ln(2x^2 + 2x - 12)$ n'est pas défini, donc $x = -1$ n'est pas une solution de l'équation.
- Pour $x = 2$, $2x^2 + 2x - 12 = 0$ donc $\ln(2x^2 + 2x - 12)$ n'est pas défini, donc $x = 2$ n'est pas une solution de l'équation.

Ainsi, $\mathcal{S} = \emptyset$.

$$\begin{aligned} 7 \quad \ln(x^2 + 3x + 5) &= \ln(2x^2 - 5x + 12) \iff x^2 + 3x + 5 = 2x^2 - 5x + 12 \\ &\iff x^2 - 8x + 7 = 0. \end{aligned}$$

Le discriminant de $x^2 - 8x + 7$ est $\Delta = 64 - 28 = 36$ donc il admet deux racines :

$$x_1 = \frac{8-6}{2} = 1 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{8+6}{2} = 7.$$

- Pour $x = 1$, $x^2 + 3x + 5 = 9 > 0$ et $2x^2 - 5x + 12 = 9 > 0$ donc $x = 1$ est une solution de l'équation.
- Pour $x = 7$, $x^2 + 3x + 5 = 75 > 0$ et $2x^2 - 5x + 12 = 75 > 0$ donc $x = 7$ est une solution de l'équation.

Ainsi, $\mathcal{S} = \{1 ; 7\}$.

$$8 \quad (\ln x)^2 + \ln x - 6 = 0 \iff X^2 + X - 6 = 0 \text{ en posant } X = \ln x.$$

Le discriminant de $X^2 + X - 6$ est $\Delta = 25$ donc il admet deux racines :

$$X_1 = \frac{-1-5}{2} = -3 \quad \text{et} \quad X_2 = \frac{-1+5}{2} = 2.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \ln x_1 &= -3 & \text{et} & \quad \ln x_2 = 2 \\ x_1 &= e^{-3} & \text{et} & \quad x_2 = e^2 \end{aligned}$$

L'ensemble solution de l'équation est donc $\mathcal{S} = \{e^{-3} ; e^2\}$.

■ Corrigé de l'exercice 3.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

$$\begin{aligned} 1 \quad \ln(-3x+4) &\leq 3 \iff \ln(-3x+4) \leq \ln(e^3) \\ &\iff -3x+4 \leq e^3 \quad \text{d'après la propriété : } \ln a \leq \ln b \iff a \leq b \\ &\iff -3x \leq e^3 - 4 \\ &\iff x \geq \frac{4 - e^3}{3} \end{aligned}$$

avec $\frac{4 - e^3}{3} \approx -5,36$.

De plus, $\ln(-3x+4)$ est défini pour $-3x+4 > 0$, soit pour $-3x > -4$ ou encore $x < \frac{4}{3}$.

$$\text{Ainsi, } \mathcal{S} = \left[\frac{4 - e^3}{3} ; \frac{4}{3} \right[.$$

2 $\ln(x^2 - 4) < \ln[2x(x+2)]$.

• **Domaine de définition de l'inéquation.**

L'inéquation est valide quand $\ln(x^2 - 4)$ et $\ln(2x(x+2))$ existent, c'est-à-dire quand :

$$\begin{cases} x^2 - 4 > 0 \\ 2x(x+2) > 0 \end{cases}$$

→ Le polynôme $x^2 - 4$ est du second degré et admet pour racines 2 et -2 car $x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$, en tant qu'identité remarquable.
D'après le théorème du signe d'un polynôme de degré 2, $x^2 - 4$ est positif à l'extérieur des racines, donc :

$$x^2 - 4 > 0 \iff x \in]-\infty; -2[\cup]2; +\infty[.$$

→ $2x(x+2)$ est aussi un polynôme de degré 2, et a pour racines 0 et -2 donc :

$$2x(x+2) > 0 \iff x \in]-\infty; -2[\cup]0; +\infty[.$$

Ainsi, l'ensemble de définition de l'inéquation est l'intersection des deux ensembles, soit :

$$\mathcal{D} =]-\infty; -2[\cup]2; +\infty[.$$

• **Résolution de l'inéquation.**

$$\begin{aligned} \ln(x^2 - 4) < \ln[2x(x+2)] &\iff x^2 - 4 < 2x^2 + 4x \\ &\iff x^2 + 4x + 4 > 0 \\ &\iff (x+2)^2 > 0. \end{aligned}$$

Le domaine de définition étant $]-\infty; -2[\cup]2; +\infty[$, l'inégalité $(x+2)^2 > 0$ est toujours vraie sur cet ensemble.

Ainsi, $\mathcal{S} =]-\infty; -2[\cup]2; +\infty[$

3 $(\ln x)^2 - 4\ln x + 3 < 0 \iff X^2 - 4X + 3 < 0$ en posant $X = \ln x$.

Le discriminant de $X^2 - 4X + 3$ est $\Delta = 4$ donc il admet deux racines :

$$X_1 = \frac{4-2}{2} = 1 \quad \text{et} \quad X_2 = \frac{4+2}{2} = 3.$$

Donc :

$$\begin{aligned} X^2 - 4X + 3 < 0 &\iff 1 < X < 3 \\ &\iff 1 < \ln x < 3 \\ &\iff e^1 < e^{\ln x} < e^3 \\ &\iff e < x < e^3. \end{aligned}$$

Ainsi, $\mathcal{S} =]e; e^3[$.

4 $\ln\left(\frac{x+2}{x-2}\right) > 1.$

• **Domaine de définition de l'inéquation.**

Cette inéquation est définie lorsque $\frac{x+2}{x-2} > 0$.

Or, $\frac{x+2}{x-2}$ est du même signe que $(x+2)(x-2)$, qui est un polynôme de degré 2 ayant pour racines $x_1 = 2$ et $x_2 = -2$.

Ainsi,

$$\frac{x+2}{x-2} > 0 \iff x \in]-\infty; -2[\cup]2; +\infty[.$$

• **Résolution de l'inéquation.**

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{x+2}{x-2}\right) > 1 &\iff \ln\left(\frac{x+2}{x-2}\right) > \ln e \\ &\iff \frac{x+2}{x-2} > e \\ &\iff \frac{x+2}{x-2} - \frac{e(x-2)}{x-2} > 0 \\ &\iff \frac{x+2-ex+2e}{x-2} > 0 \\ &\iff \frac{(1-e)x+2(1+e)}{x-2} > 0 \end{aligned}$$

Or,

$$(1-e)x+2(1+e) > 0 \iff \underbrace{(1-e)x}_{<0} > -2(1+e) \iff x < \frac{2(1+e)}{e-1}.$$

Notons $\alpha = \frac{2(1+e)}{e-1} \approx 4,3$ d'où le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$	2	α	$+\infty$
$(1-e)x+2(1+e)$	+	+	0	-
$x-2$	-	0	+	+
$\frac{(1-e)x+2(1+e)}{x-2}$	-	+	0	-

Ainsi,

$$\frac{(1-e)x+2(1+e)}{x-2} > 0 \iff x \in]2; \alpha[.$$

Or, $]2; \alpha[$ est inclus dans $\mathcal{D}$ donc l'ensemble solution de l'inéquation de départ est :

$$\mathcal{S} = \left] 2; \frac{2(1+e)}{e-1} \right[$$

■ Corrigé de l'exercice 4.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

1 $f'(x) = \frac{a}{x}$ donc $f'(1) = 1 \iff a = 1$.

De plus, $f(e^{-1}) = -1 \iff -a + b = -2$. Comme $a = 1$, cela nous donne : $b = -2 + 1 = -1$

Finalement, on a $\boxed{f(x) = \ln x - 1}$.

2 L'équation réduite de la tangente est donnée par la formule :

$$y = f'(1)(x - 1) + f(1)$$

avec $f'(1) = 1$ et $f(1) = \ln 1 - 1 = -1$. D'où :

$$y = x - 1 - 1$$

soit :

$$\boxed{y = x - 2}$$

■ Corrigé de l'exercice 5.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

1 $f(1) = 1 \iff k \ln(a + b) = 1$

$$\iff \ln(a + b) = \frac{1}{k}$$

$$\iff \boxed{a + b = e^{\frac{1}{k}}}$$

2 $f'(x) = \frac{ka}{ax + b}$ donc $f'(1) = 1 \iff \frac{ka}{a + b} = 1$

$$\iff ka = a + b$$

$$\iff ka - a = b$$

$$\iff (k - 1)a = b$$

$$\iff \boxed{a = \frac{b}{k - 1}}$$

3 En remplaçant a par $\frac{b}{k - 1}$ dans l'égalité obtenue à la question **1**, on obtient :

$$\frac{b}{k - 1} + b = e^{\frac{1}{k}} \iff \frac{b}{k - 1} + \frac{b(k - 1)}{k - 1} = \frac{(k - 1)e^{\frac{1}{k}}}{k - 1}$$

$$\iff b + b(k - 1) = (k - 1)e^{\frac{1}{k}}$$

$$\iff bk = (k - 1)e^{\frac{1}{k}}$$

$$\iff \boxed{b = \frac{k - 1}{k} e^{\frac{1}{k}}}$$

Comme $a = \frac{b}{k - 1} = \frac{1}{k - 1} \times b$, on en déduit que $a = \frac{1}{k - 1} \times \frac{k - 1}{k} e^{\frac{1}{k}}$, soit après simplification par $k - 1$:

$$\boxed{a = \frac{1}{k} e^{\frac{1}{k}}}$$

$$\begin{aligned}
4 \quad f(0) &= k \ln b \quad \text{avec } b = \frac{k-1}{k} e^{\frac{1}{k}} = \left(1 - \frac{1}{k}\right) e^{\frac{1}{k}} \\
&= k \ln \left[\left(1 - \frac{1}{k}\right) e^{\frac{1}{k}} \right] \\
&= k \ln \left(1 - \frac{1}{k}\right) + k \ln e^{\frac{1}{k}} \\
&= k \ln \left(1 - \frac{1}{k}\right) + k \times \frac{1}{k} \\
\boxed{f(0) &= k \ln \left(1 - \frac{1}{k}\right) + 1}
\end{aligned}$$

■ Corrigé de l'exercice 6.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

$$1 \quad f'(x) = (\ln x)' + (2)' = \frac{1}{x} + 0 = \frac{1}{x}.$$

$$2 \quad f'(x) = \frac{1}{x+2} \text{ car } f \text{ est de la forme } \ln u, \text{ avec } u(x) = x+2 \text{ donc } f' \text{ est de la forme } \frac{u'}{u}.$$

3 Attention : ici, $f = u + v$ avec $u(x) = x \ln x$ et $v(x) = x$, mais u est un produit ! Il faut donc calculer sa dérivée en tant que tel :

$$u'(x) = (x)' \ln x + x(\ln x)'$$

$$\begin{aligned}
\text{On a donc : } f'(x) &= 1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x} - 1 \\
&= \ln x - 1 + 1
\end{aligned}$$

$$\boxed{f'(x) = \ln x}$$

$$4 \quad f \text{ est de la forme } u^2, \text{ avec } u(x) = \ln x, \text{ donc } f' = 2u'u.$$

$$\text{Ainsi, } f'(x) = 2 \times \frac{1}{x} \times \ln x, \text{ soit } \boxed{f'(x) = \frac{2 \ln x}{x}}.$$

$$5 \quad f \text{ est de la forme } \ln u \text{ avec } u(x) = x^2 + 1, \text{ donc } u'(x) = 2x \text{ et } f' = \frac{u'}{u}, \text{ soit } \boxed{f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}}.$$

$$6 \quad f \text{ est de la forme } \ln u \text{ avec } u(x) = \ln x, \text{ donc } u'(x) = \frac{1}{x} \text{ et } f' = \frac{u'}{u} \text{ soit } f'(x) = \frac{\frac{1}{x}}{\ln x}.$$

$$\text{On a alors } \boxed{f'(x) = \frac{1}{x \ln x}}.$$

$$7 \quad f(x) = x^2 + x + 1 - \frac{\ln x}{x}.$$

La dérivée de $g : x \mapsto x^2 + x + 1$ est $g' : x \mapsto 2x + 1$ et la dérivée de la fonction $h : x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ est de la forme $\frac{u'v - uv'}{v^2}$ car $h = \frac{u}{v}$ avec $u(x) = \ln x$ et $v(x) = x$.

$$\text{Ainsi, } h'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln x \times 1}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}.$$

$$\text{Finalement, } \boxed{f'(x) = 2x + 1 - \frac{1 - \ln x}{x^2}}.$$

8 $f(x) = \frac{\ln x - x}{1+x}$. f est de la forme $\frac{u}{v}$ avec $u(x) = \ln x - x$, $u'(x) = \frac{1}{x} - 1$, $v(x) = 1+x$ et $v'(x) = 1$.

Donc f' est de la forme $\frac{u'v - uv'}{v^2}$ donc :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\left(\frac{1}{x} - 1\right)(1+x) - (\ln x - x) \times 1}{(x+1)^2} \\ &= \frac{\frac{1}{x} + 1 - 1 - x - \ln x + x}{(x+1)^2} \\ &= \frac{\frac{1}{x} - \ln x}{(x+1)^2} \\ &= \frac{\frac{1}{x} - \frac{x \ln x}{x}}{(x+1)^2} \end{aligned}$$

$$f'(x) = \frac{1 - x \ln x}{x(x+1)^2}$$

■ Corrigé de l'exercice 7.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

1 a. $g'(x) = 6x^2 + 2x + \frac{1}{x} > 0$ sur $]0; +\infty[$ car $6x^2 > 0$, $2x > 0$ et $x > 0$ (donc $\frac{1}{x} > 0$), donc g est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

b. g est continue et strictement croissante sur $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$.

De plus, $g\left(\frac{1}{2}\right) \approx -0,7 < 0$ et $g(1) = 2 > 0$ donc $g\left(\frac{1}{2}\right) < 0 < g(2)$.

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe sur $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$ une unique valeur α telle que $g(\alpha) = 0$.

2 a. $f'(x) = 2x + 1 - \frac{1 - \ln x}{x^2} = \frac{2x^3 + x^2 - 1 + \ln x}{x^2}$.

$x^2 > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $2x^3 + x^2 - 1 + \ln x = g(x)$.

b. De ce que nous avons fait aux questions précédentes, on a :

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$		- 0 +	
f		$f(\alpha)$	

$\alpha \approx 0,637$ donc $f(\alpha) \approx 2,75 > 0$.

Or, $f(\alpha)$ est le minimum de f donc $f(x) \geq f(\alpha) > 0$.

■ Corrigé de l'exercice 8.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

- 1 g est de la forme $u - v$, avec $u(x) = 1$ et $v(x) = x \ln x$ (donc c'est un produit).

Ainsi,

$$g'(x) = 0 - 1 \times \ln x - x \times \frac{1}{x}$$

$$g'(x) = -\ln x - 1$$

- 2 $g'(x) \geq 0 \iff -\ln x - 1 \geq 0$
 $\iff -(\ln x + 1) \geq 0$
 $\iff \ln x + 1 \leq 0$
 $\iff \ln x \leq -1$
 $\iff x \leq e^{-1}$

d'où le tableau suivant :

x	0	e^{-1}	$+\infty$
$g'(x)$		+	0 -
$g(x)$			

$$\begin{aligned} g(e^{-1}) &= 1 - e^{-1} \ln(e^{-1}) \\ &= 1 - e^{-1} \times (-1) \\ &= 1 + e^{-1} > 0 \end{aligned}$$

- 3 g est continue et strictement décroissante sur $[e^{-1}; +\infty[$ donc sur $[1; 2]$.

De plus, $g(1) = 1$ et $g(2) = 1 - 2 \ln 2 < 0$ donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe une unique valeur α dans $[1; 2]$ telle que $g(\alpha) = 0$.

- 4 $f'(x) = \frac{1 - x \ln x}{x(x+1)^2} = \frac{g(x)}{x(x+1)^2}$ est du signe de son numérateur (donc du signe de $g(x)$) car sur $]0; +\infty[$, $x > 0$ et $(x+1)^2 > 0$.

D'où le tableau suivant :

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$		+	0 -
$f(x)$			

■ **Corrigé de l'exercice 9.**

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

- 1 f est de la forme $g + h$, avec $g(x) = x^2 \ln(x)$ et $h(x) = -3x^2 + 5x - 1$.
 g est de la forme uv , avec $u(x) = x^2$ et $v(x) = \ln(x)$ donc :

$$\begin{aligned} g'(x) &= (u'v + uv')(x) \\ &= 2x \ln(x) + x^2 \times \frac{1}{x} \\ &= 2x \ln(x) + x. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} f'(x) &= g'(x) + h'(x) \\ &= 2x \ln(x) + x - 6x + 5 \end{aligned}$$

$$f'(x) = 2x \ln(x) - 5x + 5$$

La dérivée de $2x \ln(x)$ est :

$$2 \ln(x) + 2x \times \frac{1}{x} = 2 \ln(x) + 2$$

donc

$$f''(x) = 2 \ln(x) + 2 - 5$$

$$f''(x) = 2 \ln(x) - 3$$

- 2 $f'(1) = 2 \ln(1) - 5 + 5 = 0$ et $f'(10) = 20 \ln(10) - 50 + 5 = 20 \ln(10) - 45 \approx 1,05$.

De plus,

$$\begin{aligned} f''(x) > 0 &\iff 2 \ln(x) - 3 > 0 \\ &\iff 2 \ln(x) > 3 \\ &\iff \ln(x) > \frac{3}{2} \end{aligned}$$

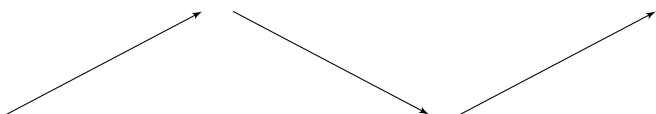
On en déduit le tableau suivant :

x	0	1	$\frac{3}{2}$	α	10	$+\infty$
$f''(x)$		-	-	0	+	+
$f'(x)$						

$$\begin{aligned} f'(1,5) &= 3 \ln\left(\frac{3}{2}\right) - \frac{15}{2} + 5 \\ &= 3 \ln(1,5) - 2,5 \\ &\approx -1,28. \end{aligned}$$

f' est une fonction continue et strictement croissante sur $]1,5; 10[$ et d'après les valeurs des images trouvées précédemment, en appliquant le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe une unique valeur α telle que $f'(\alpha) = 0$.

On peut alors voir le signe de $f'(x)$ et donc trouver les variations de f :

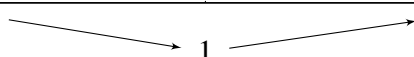
x	0	1	α	$+\infty$		
$f'(x)$		+	0	-	0	+
f						

■ Corrigé de l'exercice 10.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

Partie A

- 1 $f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$. $f'(x)$ est donc du signe de $x-1$ car sur $]0;3]$, $x > 0$.

x	0	1	3	
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$				

$$f(3) = 3 - \ln 3$$

- 2 $(\ln x)^2$ est de la forme u^2 donc sa dérivée est $2u'u$.

$$\begin{aligned} g'(x) &= 1 - 2 \times \frac{1}{x} \times \ln x \quad \text{car} \\ &= 1 - \frac{2 \ln x}{x} \end{aligned}$$

$$g'(x) = \frac{x - 2 \ln x}{x}$$

$x - 2 \ln x > 0$ sur $]0;3]$ (d'après l'énoncé) et $x > 0$ sur cet intervalle donc $g'(x) > 0$ sur $]0;3]$.

Ainsi, g est strictement croissante sur $]0;3]$.

- 3 D'après les variations trouvées précédemment, la courbe en pointillés est Γ et celle en trait plein est $\mathcal{C}$.

Partie B

- 1 a. $g(x) = f(x) \iff x - (\ln x)^2 = x - \ln x$
 $\iff (\ln x)^2 - \ln x = 0$
 $\iff (\ln x)(\ln x - 1) = 0$
 $\iff \ln x = 0 \text{ ou } \ln x - 1 = 0 \quad (\text{théorème du produit nul})$
 $\iff e^{\ln x} = e^0 \text{ ou } \ln x = 1$
 $\iff x = 1 \text{ ou } x = e$

On a donc : $\mathcal{S} = \{1; e\}$.

Alors, $y_M = f(1) = g(1) = 1 - \ln 1 = 1$, donc $M(1; 1)$, et $y_N = f(e) = g(e) = e - \ln e = e - 1$, donc $N(e; e - 1)$.

2 *a.* $g(x) \geq f(x) \iff x - (\ln x)^2 \geq x - \ln x$
 $\iff (\ln x)^2 - \ln x \leq 0$
 $\iff (\ln x)(\ln x - 1) \leq 0$

- $\ln x \geq 0 \iff x \geq 1$
- $\ln x - 1 \geq 0 \iff \ln x \geq 1$
 $\iff x \geq e$

x	0	1	e	3
$\ln(x)$		−	0	+
$\ln(x) - 1$		−	−	0
$(\ln x)(\ln x - 1)$		+	0	−

b. Si $g(x) \geq f(x)$ alors Γ se trouve au-dessus de $\mathcal{C}$.
Ainsi, d'après la question précédente, Γ se trouve au-dessus de $\mathcal{C}$ sur $[1; e]$.

On peut ainsi conclure que H est une primitive de $g - f$.

$$\begin{aligned}
 b. \quad \mathcal{A} &= H(e) - H(1) \\
 &= (-e(\ln e)^2 + 3e \ln e - 3e) - (-1(\ln 1)^2 + 3 \times 1 \times \ln 1 - 3) \\
 &= (-e \times 1^2 + 3e \times 1 - 3e) - (-3)
 \end{aligned}$$

$$\mathcal{A} = 3 - e$$

Ainsi, $\mathcal{A} = 3 - e$ unité d'aire.

$$c. \quad 1 \text{ u.a.} = 50 \times 20 \text{ mm}^2 = 1\,000 \text{ mm}^2.$$

$$\text{Ainsi, } \mathcal{A} = (3 - e) \times 1\,000 \text{ mm}^2, \text{ soit } \mathcal{A} \approx 282 \text{ mm}^2.$$

■ Corrigé de l'exercice 11.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

1 $\frac{x^2+2}{x^2+1}$ est de la forme $\frac{u}{v}$ donc sa dérivée est :

$$\frac{u'v - v'u}{v^2} = \frac{2x(x^2+1) - 2x(x^2+2)}{(x^2+1)^2} = \frac{-2x}{(x^2+1)^2}.$$

Ainsi, en considérant $f(x)$ sous la forme $\ln U$, on a :

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \frac{U'(x)}{U(x)} \\
 &= \frac{\frac{-2x}{(x^2+1)^2}}{\frac{x^2+2}{x^2+1}} \\
 &= \frac{-2x}{(x^2+1)^2} \times \frac{x^2+1}{x^2+2} \\
 &= \frac{-2x}{(x^2+1)(x^2+2)}
 \end{aligned}$$

Or, $x^2+2 > 0$ et $x^2+1 > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $-2x$, à savoir négatif sur $[0; +\infty[$.

2 On a alors :

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	—	
$f(x)$	$\ln 2$	

3 L'équation de la tangente à la courbe représentative d'une fonction f au point d'abscisse a est :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

Ici, $a = 3$. On a alors :

$$y = f'(3)(x - 3) + f(3).$$

- $f'(3) = \frac{-6}{110} = -\frac{3}{55}.$
- $f(3) = \ln \frac{11}{10} = \ln 1,1.$

On a alors :

$$y = -\frac{3}{55}(x-3) + \ln 1,1.$$

En mettant cette équation sous la forme $y = ax + b$, on trouve que l'équation de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 3 est :

$$y = -\frac{3}{55}x + \frac{9}{55} + \ln 1,1$$

■ Corrigé de l'exercice 12.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

Partie A

- 1 α est la valeur telle que $f(\alpha) = 0$. C'est donc la solution de l'équation $g(x) = 0$.

$$\begin{aligned} g(x) = 0 &\iff 1 - 2\ln(x) = 0 \\ &\iff 1 = 2\ln(x) \\ &\iff \frac{1}{2} = \ln(x) \\ &\iff e^{\frac{1}{2}} = e^{\ln(x)} \\ &\iff e^{\frac{1}{2}} = x \end{aligned}$$

Ainsi, $\alpha = \sqrt{e}$.

- 2 La fonction g est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$ et s'annule en α ; ainsi :

x	0	α	$+\infty$
g		+	0

Partie B

- 1 a. f est de la forme $\frac{u}{v}$ donc $f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$. Donc :

$$f'(x) = \frac{\frac{2}{x} \times x - (2\ln(x) + 1) \times 1}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{1 - 2\ln(x)}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$$

- b. Nous avons vu le signe de $g(x)$ dans la partie A; or, $f'(x)$ est du signe de $g(x)$ car $x^2 > 0$ sur $]0; +\infty[$, d'où le tableau suivant :

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$		+	0
f		$f(\alpha)$	

- 2 a. Une primitive de $2 \times \frac{1}{x} \times \ln(x)$ est $(\ln x)^2$ (d'après la formule : $f(x) = 2u'u$ donne $F(x) = u^2$)
et une primitive de $\frac{1}{x}$ est $\ln(x)$ donc :

$$F(x) = (\ln x)^2 + \ln x$$

$$\begin{aligned} b. \quad I &= \frac{1}{4} \int_1^5 f(x) \, dx \\ &= \frac{1}{4} [F(5) - F(1)] \\ &= \frac{1}{4} [(\ln 5)^2 + \ln 5 - (\ln 1)^2 - \ln 1] \end{aligned}$$

$$I = \frac{(\ln 5)^2 + \ln 5}{4}$$

À l'aide de la calculatrice, on trouve : $I \approx 1,05$.

Partie C

- 1 La valeur moyenne du bénéfice unitaire pour une production hebdomadaire comprise entre 1 000 et 5 000 pièces est la valeur moyenne de la fonction f entre 1 et 5, c'est-à-dire $\frac{1}{5-1} \int_1^5 f(x) \, dx$, soit I .

La valeur moyenne du bénéfice unitaire pour une production hebdomadaire comprise entre 1 000 et 5 000 pièces est donc de 1,05 €.

- 2 On doit résoudre l'équation $f(x) = 1,05$; or on ne peut pas la résoudre directement à l'aide de propriétés algébriques.

Sur $[0; 5]$, on a le tableau de variation suivant :

x	1	α	5
$f'(x)$	+	0	-
f	$f(1)$	$f(\alpha)$	$f(5)$

On a : $f(1) = 1$, $f(\alpha) \approx 1,21$ et $f(5) \approx 0,84$.

En utilisant le théorème des valeurs intermédiaires on montre que cette équation a deux solutions : une sur l'intervalle $]1; \alpha[$ et une autre sur l'intervalle $] \alpha; 5[$.

Puis en utilisant la méthode de balayage sur la calculatrice on trouve que les solutions sont approximativement :

$$1,055 < x_1 < 1,056 \quad ; \quad 3,119 < x_2 < 3,120$$

Il faut donc produire 1 056 pièces ou 3 119 pièces pour avoir un bénéfice unitaire égal à 1,05 €.

Convexité

Disponible sur <http://www.mathweb.fr>

A Exercices d'application du cours

R Exercices de réflexion

✌ Exercice & corrigé relus avec attention pour éviter les erreurs

Énoncés

12 juin 2018

■ Exercice 1. Fonction $x^2 \ln(x) - 3x^2 + 5x - 1$

(Source : tes-conv-01)

★★★★★

A

Corrigé page 75 ✌

On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par :

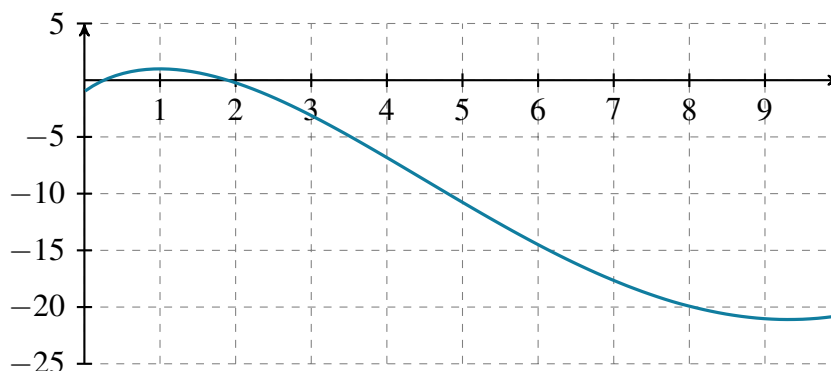
$$f(x) = x^2 \ln(x) - 3x^2 + 5x - 1.$$

On admet que sa dérivée seconde est :

$$f''(x) = 2\ln(x) - 3.$$

(cette fonction a été étudiée dans l'**Exercice 9** du chapitre « Logarithme népérien »)

Sa courbe représentative est la suivante :



Déterminer la valeur exacte de l'abscisse du point d'inflexion de cette courbe et préciser alors la convexité de la fonction f sur $]0; +\infty[$.

■ Exercice 2. Convexité d'une fonction

(Source : tes-conv-02)

★★★★★

A

Corrigé page 75 ✌

Déterminer la convexité de la fonction f définie par $f(x) = xe^{-x}$ sur $\mathbb{R}$.

■ Exercice 3. Existence d'un point d'inflexion

(Source : tes-conv-03)

★★★★★

A

Corrigé page 76 ✌

La courbe représentative de la fonction f telle que $f''(x) = (x-1)^2 e^x$ admet-elle un point d'inflexion ?

■ Exercice 4. Lectures graphiques

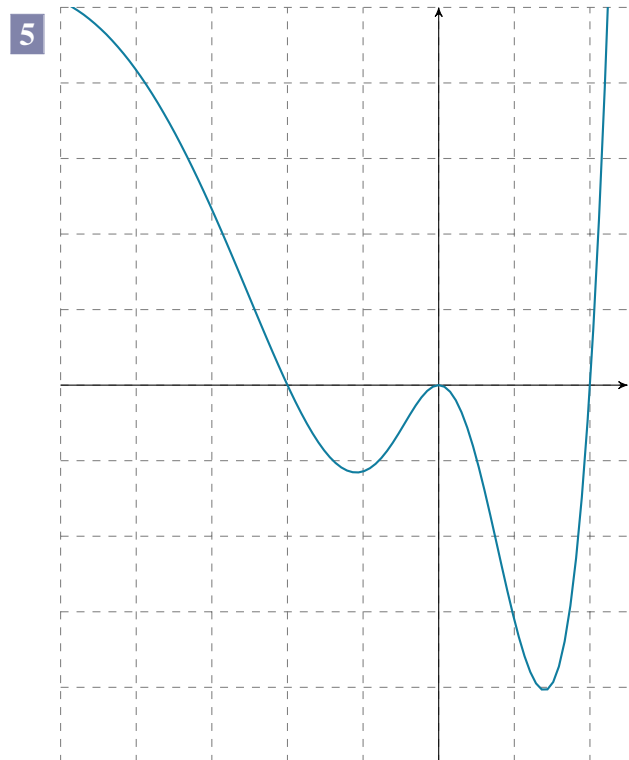
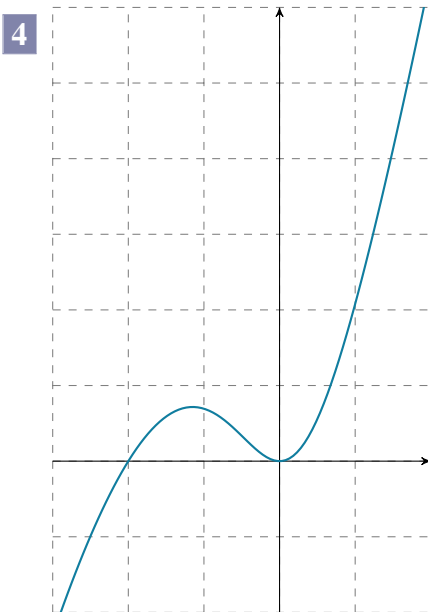
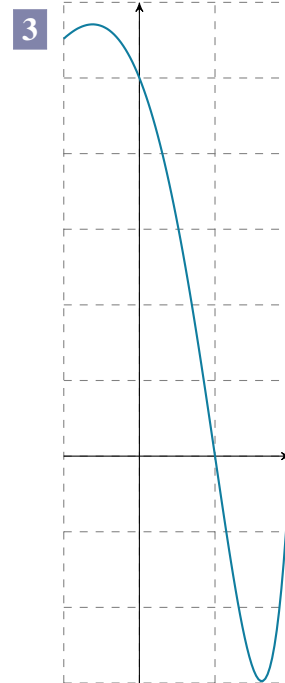
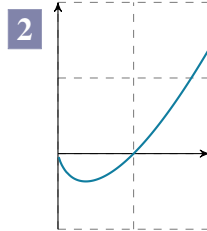
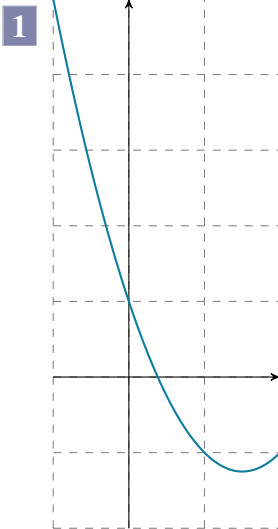
★★★★☆ A

(Source : tes-conv-04)

Corrigé page 76

Pour chacune des courbes suivantes, étudier la convexité de la fonction correspondante sur l'intervalle où la courbe est tracée.

Préciser, s'il y a lieu, la position des points d'inflexion.



■ Exercice 5. Lectures graphiques de f , f' et f''

★★★★☆ R

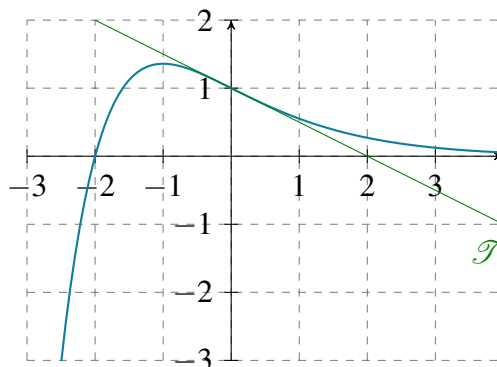
(Source : tes-conv-05)

Corrigé page 78

Soit f une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. On note f' sa dérivée et f'' sa dérivée seconde.

La courbe représentative de la fonction dérivée notée $\mathcal{C}_{f'}$ est donnée ci-dessous.

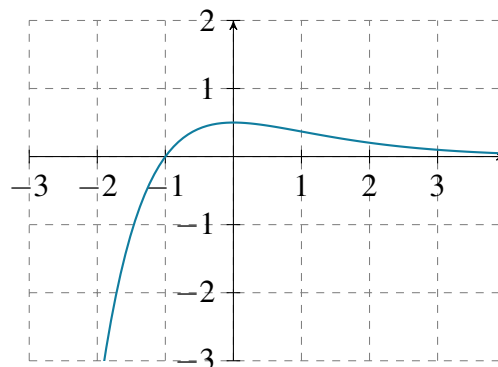
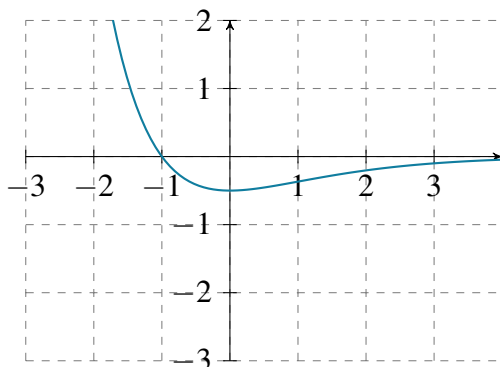
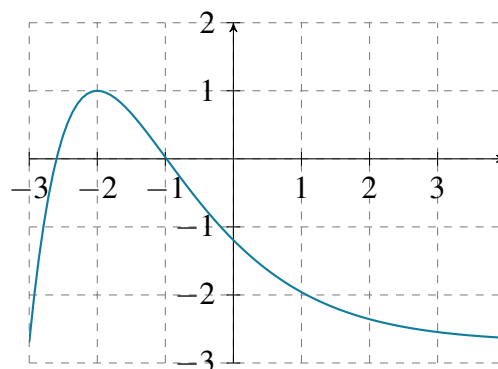
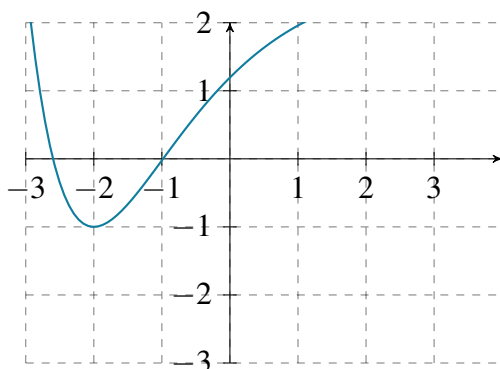
La droite $\mathcal{T}$ est tangente à la courbe $\mathcal{C}_{f'}$ au point d'abscisse 0.



1 Par lecture graphique :

- Résoudre $f'(x) = 0$.
- Résoudre $f''(x) = 0$.
- Déterminer $f''(0)$.

2 Une des quatre courbes $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$ et $\mathcal{C}_4$ ci-dessous est la courbe représentative de la fonction f et une autre est celle de la dérivée seconde f'' .



- Déterminer la courbe qui représente f et celle qui représente la dérivée seconde f'' .
- Déterminer les intervalles sur lesquels f est convexe ou concave.
- La courbe représentative de la fonction f admet-elle un point d'inflexion ?

■ Exercice 6. La rumeur

★★★★☆☆ A

(Source : tes-conv-06)

Corrigé page 79

Lors de la propagation d'une rumeur, le nombre d'individus propageant cette rumeur x jours après son commencement est donné, en unité, par la fonction :

$$f(x) = 100 + x^4 e^{-0,1x} \quad \text{pour } x \in [0; 50].$$

1 Déterminer le nombre d'individus propageant cette rumeur initialement.

2 a. Prouver que $f'(x) = x^3(4 - 0,1x)e^{-0,1x}$.

b. Dresser le tableau de variation de la fonction f sur $[0; 50]$

3 Dans cette question, on admet que la dérivée seconde de f est :

$$f''(x) = x^2 e^{-0,1x} (0,01x^2 - 0,8x + 12).$$

Étudier la convexité de la fonction f sur $[0; 50]$.

4 En déduire :

- a. le nombre de jours qu'il faut attendre avant que le nombre d'individus propageant cette rumeur diminue (arrondi à l'unité) ;
- b. le nombre maximum d'individus propageant cette rumeur (arrondi à l'unité) ;
- c. le nombre de jours qu'il faut attendre avant que la croissance du nombre d'individus propageant cette rumeur diminue.

■ Corrigé de l'exercice 1.

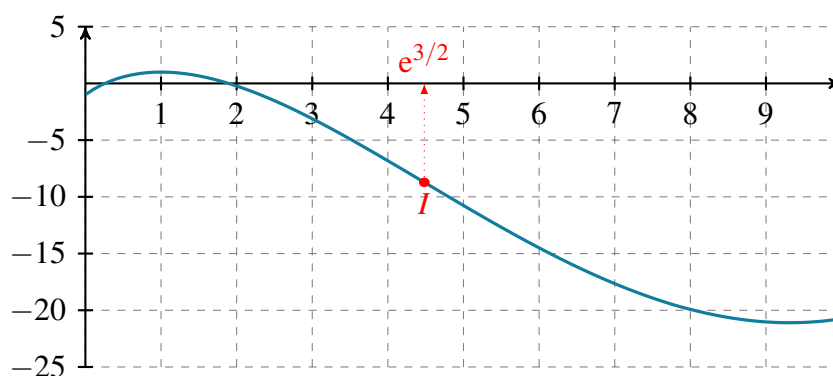
[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

Le point d'inflexion est atteint lorsque $f''(x)$ s'annule en changeant de signe.

$$\begin{aligned}
 f''(x) \geq 0 &\iff 2\ln(x) - 3 \geq 0 \\
 &\iff 2\ln(x) \geq 3 \\
 &\iff \ln(x) \geq \frac{3}{2} \\
 &\iff x \geq e^{3/2}.
 \end{aligned}$$

On en déduit alors que :

- $f''(x) \geq 0$ pour $x \geq e^{3/2}$ donc f est convexe sur $]e^{3/2}; +\infty[$;
- $f''(x) \leq 0$ pour $x \leq e^{3/2}$ donc f est concave sur $]0; e^{3/2}[$;
- $f''(x)$ s'annule en changeant de signe quand $x = e^{3/2}$ donc l'abscisse du point d'inflexion I est $e^{3/2}$.



■ Corrigé de l'exercice 2.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

« Déterminer la convexité d'une fonction » signifie regarder sur quels intervalles cette fonction est concave, et sur quels autres intervalles elle est convexe.

Quand il s'agit de regarder la convexité d'une fonction en ayant son expression, nous devons calculer sa dérivée et étudier le signe de cette dernière.

f est de la forme uv donc $f' = u'v + v'u$ avec :

$$\begin{aligned}
 u(x) &= x & u'(x) &= 1 \\
 v'(x) &= e^{-x} & v(x) &= -e^{-x}
 \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned}f'(x) &= 1 \times e^{-x} + x \times (-e^{-x}) \\&= 1e^{-x} - xe^{-x} \\&= (1-x)e^{-x}.\end{aligned}$$

f' est aussi de la forme uv avec :

$$\begin{array}{ll}u(x) = 1 - x & u'(x) = -1 \\v(x) = e^{-x} & v'(x) = -e^{-x}\end{array}$$

d'où :

$$\begin{aligned}f''(x) &= -1 \times e^{-x} + (1-x) \times (-e^{-x}) \\&= -1e^{-x} - (1-x)e^{-x} \\&= [-1 - (1-x)]e^{-x} \\&= (-1 - 1 + x)e^{-x} \\&= (x-2)e^{-x}.\end{aligned}$$

Or, pour tout réel x ,

$$e^{-x} > 0$$

donc $f''(x)$ est du signe de $x-2$, d'où le tableau suivant :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f''(x)$	—	0	+
f	concave	P.I.	convexe

Il y a ici un point d'inflexion car $f''(x)$ s'annule en changeant de signe.

■ Corrigé de l'exercice 3.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

Une courbe admet un point d'inflexion uniquement lorsque la dérivée seconde s'annule en changeant de signe.

Or, pour tout réel x ,

- $(x-1)^2 \geq 0$, en s'annulant pour $x = 1$,
- $e^x > 0$.

La condition $f''(x) = 0$ est bien satisfaite en $x = 1$, mais $f''(x)$ ne change pas de signe en cette valeur.

Ainsi, la courbe représentative de f n'admet pas de point d'inflexion.

■ Corrigé de l'exercice 4.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

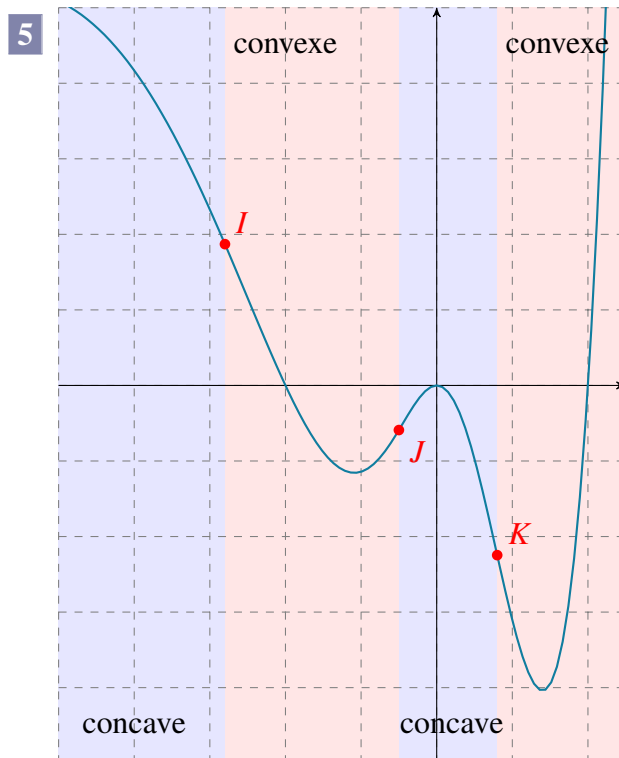
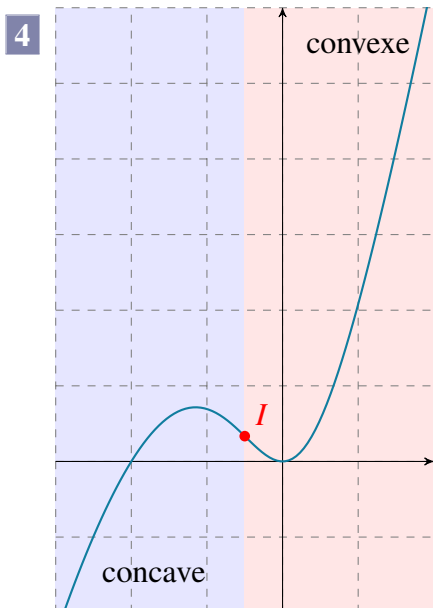
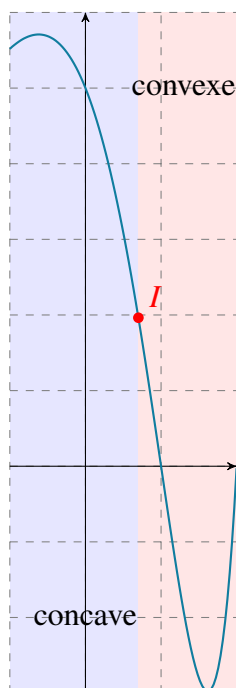
1 Quel que soit le point de la courbe, la tangente en ce point est toujours sous la courbe ; on dit ici que la courbe est toujours au-dessus de ses tangentes.

Ainsi, la fonction est toujours convexe sur l'intervalle où est tracée la courbe.

2 Ici, la courbe est toujours au-dessus de ses tangentes, donc la fonction est convexe sur l'intervalle où est tracée la courbe.

- 3 Au début de l'intervalle, la courbe est sous ses tangentes jusqu'à un point I au-delà duquel la courbe est sous ses tangentes.

On peut alors dire que I est un point d'inflexion et que l'on a :



- 1 a. La courbe représentative de f' coupe d'axe des abscisses en $x = -2$ donc :

$$f'(x) = 0 \iff x = -2$$

- b. f'' est la dérivée de f' , donc $f''(x) = 0$ signifie que $\mathcal{C}_{f'}$ admet une tangente horizontale, ce qui est le cas au point d'abscisse $x = -1$.

$$f''(x) = 0 \iff x = -1$$

- c. $f''(0)$ correspond au coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}_{f''}$ au point d'abscisse 0, donc de $\mathcal{T}$.

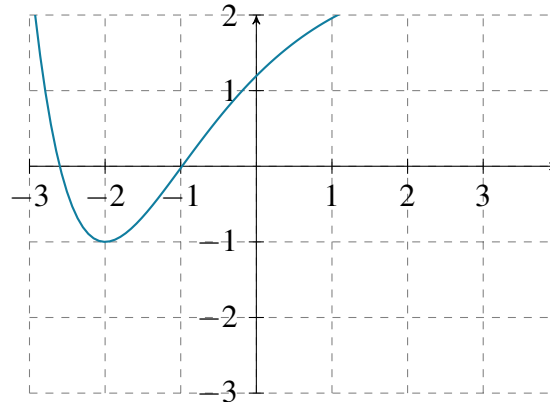
Les points de coordonnées $(0; 1)$ et $(2; 0)$ sont sur $\mathcal{T}$ donc son coefficient directeur est :

$$\frac{0 - 1}{2 - 0} = -\frac{1}{2}.$$

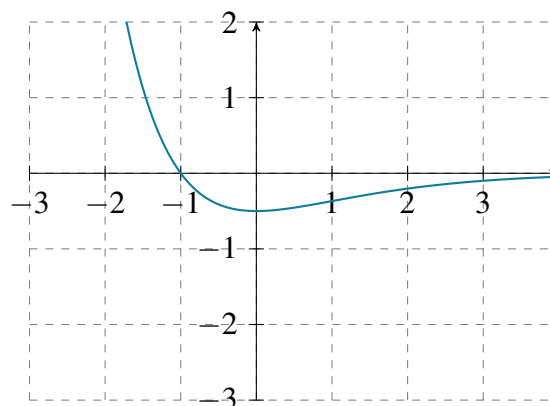
Ainsi,

$$f''(0) = -\frac{1}{2}$$

- 2 a. $f'(x) \leq 0$ sur $[-3; -2]$ et $f'(x) \geq 0$ sur $[-2; 4]$ donc f est décroissante sur $[-3; -2]$ et croissante sur $[-2; 4]$. Il n'y a donc qu'une courbe possible pour f (la 1^{re} proposée) :



De plus, f' est croissante sur $[-3; -1]$ et décroissante sur $[-1; 4]$ donc $f''(x) \geq 0$ sur $[-3; -1]$ et $f''(x) \leq 0$ sur $[-1; 4]$. Il n'y a donc qu'une courbe possible pour f'' (la 3^e) :



- b. f est convexe quand $f''(x) \geq 0$, donc sur $[-3; -1]$ d'après la question précédente.
Elle est donc concave sur $[-1; 4]$.
- c. $\mathcal{C}_f$ admet un point d'inflexion d'abscisse $x = -1$ car $f''(x)$ s'annule en changeant de signe en $x = -1$.

■ Corrigé de l'exercice 6.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

- 1 Le nombre d'individus propageant cette rumeur initialement correspond à $f(0)$.

$$f(0) = 100 + 0^4 \times e^{-0,1 \times 0} = 100.$$

Il y a donc initialement 100 personnes qui propagent initialement cette rumeur.

- 2 a. La dérivée de $f(x)$ est la dérivée de $x^4 e^{-0,1x}$ car la dérivée de 100 vaut 0.
 $x^4 e^{-0,1x}$ est de la forme uv avec :

$$\begin{aligned} u(x) &= x^4 & u'(x) &= 4x^3 \\ v(x) &= e^{-0,1x} & v'(x) &= -0,1e^{-0,1x} \end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned} f'(x) &= (u'v + uv')(x) \\ &= 4x^3 e^{-0,1x} + x^4 (-0,1e^{-0,1x}) \\ &= 4x^3 e^{-0,1x} - 0,1x \times x^3 e^{-0,1x} \\ &= (4 - 0,1x) \times x^3 e^{-0,1x} \end{aligned}$$

$$\boxed{f'(x) = x^3(4 - 0,1x)e^{-0,1x}}$$

- b. $f'(x)$ est du signe de $4 - 0,1x$ car une exponentielle est toujours strictement positive et $x^3 \geq 0$ pour $x \geq 0$.

De plus,

$$\begin{aligned} 4 - 0,1x &\geq 0 &\iff 4 &\geq 0,1x \\ &&\iff \frac{4}{0,1} &\geq x \\ &&\iff 40 &\geq x \end{aligned}$$

d'où le tableau suivant :

x	0	40	50	
$f'(x)$	0	+	0	-
f	100			42 212

- 3 f est convexe si $f''(x) \geq 0$.

On voit que $f''(x)$ est du signe de $0,01x^2 - 0,8x + 12$, donc le discriminant est :

$$\Delta = (-0,8)^2 - 4 \times 0,01 \times 12 = 0,16$$

donc les deux racines sont :

$$x_1 = \frac{0,8 - \sqrt{0,16}}{0,02} = 20 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{0,8 + \sqrt{0,16}}{0,02} = 60 > 50.$$

Ainsi,

- $f''(x) \leq 0$, donc f est concave, sur $[20; 50]$;
- $f''(x) \geq 0$, donc f est convexe, sur $[0; 20]$.

- 4** *a.* f est croissante jusqu'à $x = 40$, donc il faut attendre 40 jours avant que la rumeur diminue.
- b.* Le nombre maximum d'individus propageant cette rumeur est $f(40) \approx 46988$.
- c.* La notion de « diminution de croissance » est assez difficile à comprendre pour des élèves de Terminale ES ; il faut juste retenir que *la croissante diminue (ou augmente) quand il y a un changement de convexité*.
- Ainsi, cela correspond à la présence d'un point d'inflexion. Ici, c'est au bout de 20 jours que cela se produit (d'après la question **3**).

Intégration

Disponible sur <http://www.mathweb.fr>

A Exercices d'application du cours

R Exercices de réflexion

👉 Exercice & corrigé relus avec attention pour éviter les erreurs

12 juin 2018

Primitives et intégrales

■ Exercice 1. Calculs de primitives

★★★★☆ **A**

Corrigé page 85 👉

(Source : tes-int-01)

Donner une primitive de chacune des fonctions f suivantes :

1 $f(x) = 5$

7 $f(x) = e^{2x}$

2 $f(x) = 3x + 2$

8 $f(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+1}$

3 $f(x) = -8x - 3$

9 $f(x) = \frac{-5x}{x^2+1}$

4 $f(x) = 3x^2 - 5x + 2$

5 $f(x) = -\frac{1}{3}x^5 + 8x^3 - 7x + 1$

10 $f(x) = \frac{3}{x^2}$

6 $f(x) = e^x$

■ Exercice 2. Calculs d'intégrales

★★★★☆ **A**

Corrigé page 85 👉

(Source : tes-int-03)

Calculer chacune des intégrales suivantes :

1 $\int_0^1 \frac{e^x + 1}{e^x + x + 1} dx$

3 $\int_3^5 (e^x + x - 3) dx$

2 $\int_0^1 e^{2x+1} dx$

4 $\int_{-1}^1 (3x^3 - 2x) dx$

■ Exercice 3. Une intégrale avec le logarithme népérien

★★★★☆ **A**

Corrigé page 87 👉

(Source : tes-int-04)

1 Montrer que $F(x) = x \ln -x$ est une primitive de $f(x) = \ln x$.

2 En déduire $\int_1^e \ln x dx$

Aires

■ Exercice 4. Aire sous une courbe (1)

★★★★☆☆

R

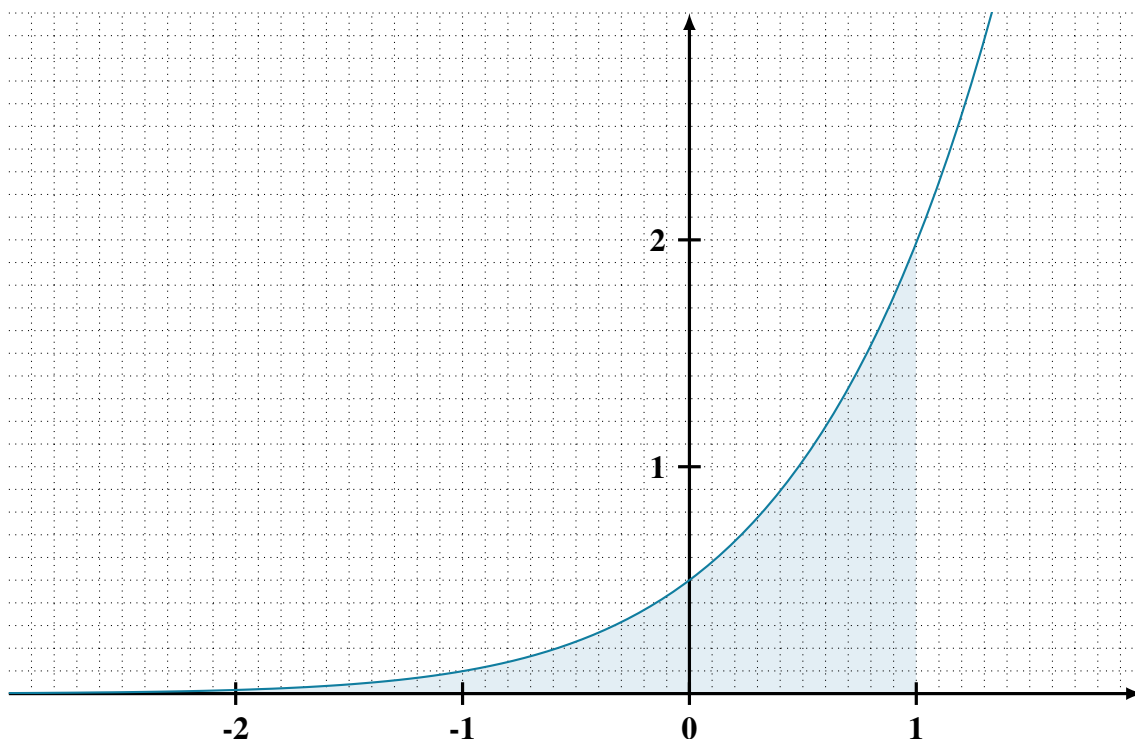
(Source : tes-int-05)

Corrigé page 87

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{e^{2x}}{1 + e^x}$$

Sa courbe représentative sur $[-3; 2]$ est donnée ci-dessous :



- 1 À l'aide du quadrillage, donner une valeur approchée de $\int_{-2}^1 f(x) \, dx$ au dixième.
- 2 Montrer que $f(x) = e^x - \frac{e^x}{1 + e^x}$.
- 3 En déduire la valeur exacte, puis une valeur approchée à 10^{-4} près de $\int_{-2}^1 f(x) \, dx$.

■ Exercice 5. Aire sous une courbe (2)

★★★★☆ R

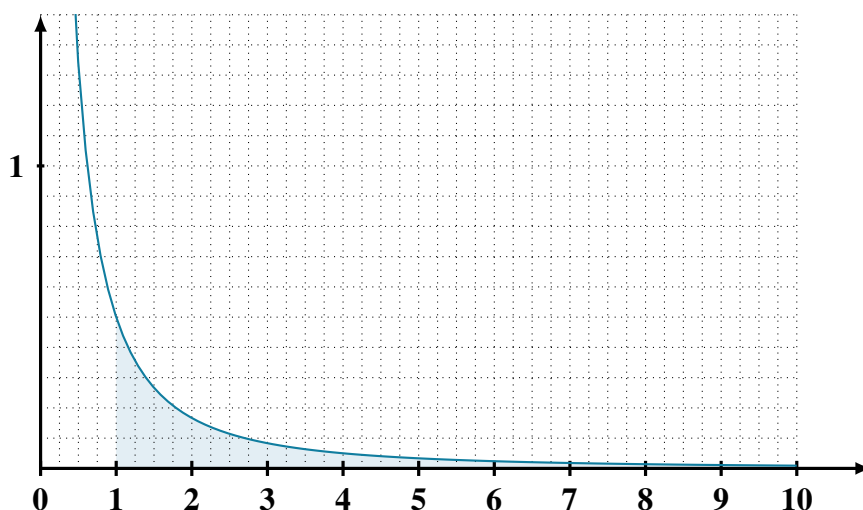
(Source : tes-int-06)

Corrigé page 87

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x(x+1)}$$

Sa courbe représentative sur $[0; 10]$ est donnée ci-dessous :



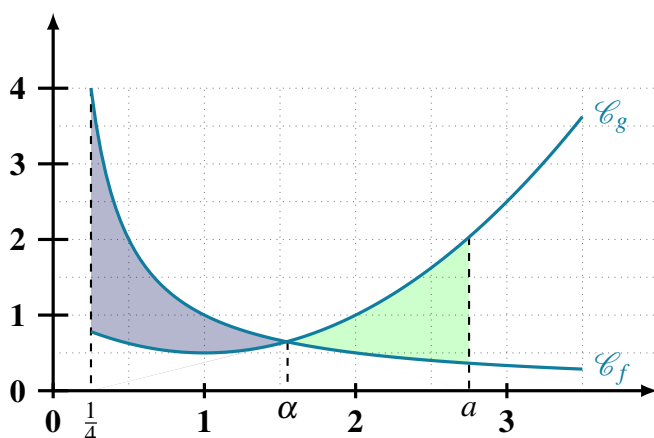
- 1 À l'aide du quadrillage, montrer que $\int_1^{10} f(x) dx \geq 0,5$.
- 2 Montrer que $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$.
- 3 En déduire la valeur exacte, puis une valeur approchée à 10^{-4} près de $\int_1^{10} f(x) dx$.

■ Exercice 6. Aire entre deux courbes

★★★★☆ R

(Source : tes-int-07)

Corrigé page 88



On a représenté ci-contre les courbes représentatives des fonctions f et g définies par :

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad g(x) = 0,5x^2 - x + 1.$$

On a noté α l'abscisse de leur point d'intersection.

L'objectif de cet exercice est de déterminer la valeur de a telle que les deux aires colorées soient égales.

- 1 En vous aidant de la fonction $x \mapsto 0,5x^3 - x^2 + x - 1$, prouver algébriquement l'existence de α , puis déterminer une valeur approchée de α au centième.
- 2 Déterminer alors une valeur approchée de a .

Valeur moyenne

■ Exercice 7. Prix moyen d'une machine-outil

★★★★☆

A

(Source : tes-int-08)

Corrigé page 89

Une machine-outil achetée neuve 10 000 € admet un prix de revente modélisé par la fonction f définie par :

$$f(x) = 10e^{-0,2x}$$

où $f(x)$ est exprimé en millier d'euros et x en années.

Déterminer le prix de revente moyen de cette machine sur 8 ans depuis sa date d'achat.

■ Exercice 8. Population moyenne

★★★★☆

A

(Source : tes-int-09)

Corrigé page 89

En prenant comme année de référence l'an 2000, le nombre d'habitants en fin d'année $2000 + x$ d'une ville nouvelle est approchée par la fonction :

$$f(x) = 18e^{0,034x}$$

où $f(x)$ est exprimé en millier d'habitants.

Déterminer la population moyenne de cette ville entre 2050 et 2080.

■ Exercice 9. Fonction $x \mapsto \frac{1}{x \ln x}$

★★★★☆

R

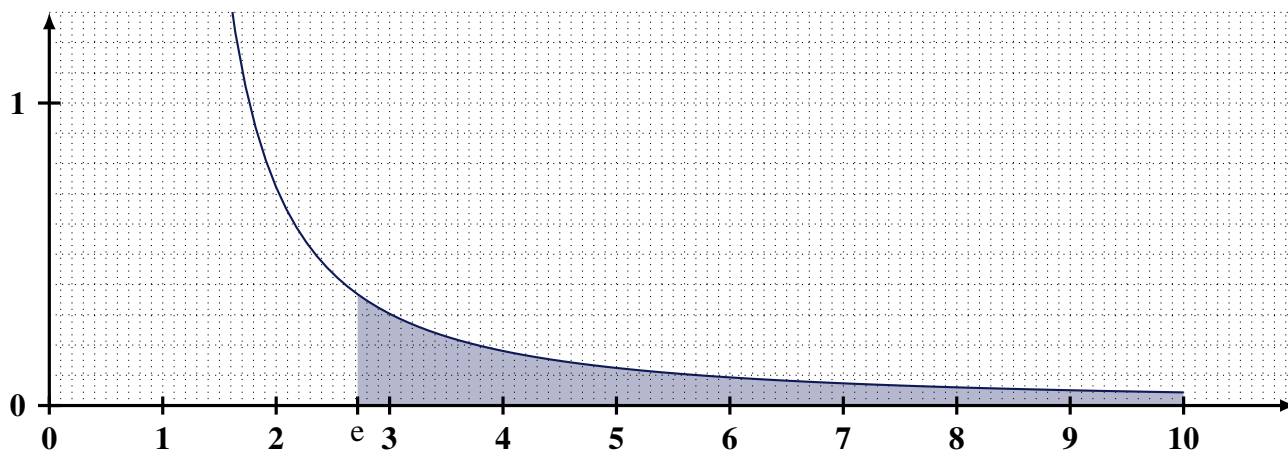
(Source : tes-int-10)

Corrigé page 90

Soit la fonction f définie sur $]1; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x \ln x}.$$

- 1 Montrer que $f'(x) = -\frac{1 + \ln x}{(x \ln x)^2}$.
- 2 En déduire les variations de f sur $]0; 1[\cup]1; +\infty[$.
- 3 En remarquant que $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$, calculer la valeur moyenne de $f(x)$ sur $[e; 10]$.
- 4 Dessiner ci-dessous un rectangle dont l'aire est la même que celle représentée colorée..



■ Corrigé de l'exercice 1.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

1 $F(x) = 5x.$

2 $F(x) = 3 \times \frac{1}{2}x^2 + 2x = \frac{3}{2}x^2 + 2x.$

3 $F(x) = -8 \times \frac{1}{2}x^2 - 3x = -4x^2 - 3x.$

4 $F(x) = x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 2x.$

5 $F(x) = -\frac{1}{3} \times \frac{1}{6}x^6 + 8 \times \frac{1}{4}x^4 - \frac{7}{2}x^2 + x = -\frac{1}{18}x^6 + 2x^4 - \frac{7}{2}x^2 + x.$

6 $F(x) = e^x.$

7 $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x}.$

8 $F(x) = \ln(x^2 + x + 1)$ car si $u(x) = x^2 + x + 1$, alors $f(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}.$

9 $f(x) = -\frac{5}{2} \times \frac{2x}{x^2 + 1} = -\frac{5}{2} \frac{u'}{u}$ avec $u(x) = x^2 + 1$ donc $F(x) = -\frac{5}{2} \ln(x^2 + 1).$

10 $f(x) = -3 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right)$ donc $F(x) = -3 \times \frac{1}{x} = -\frac{3}{x}.$

■ Corrigé de l'exercice 2.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

1 Cherchons avant tout une primitive de $f(x) = \frac{e^x + 1}{e^x + x + 1}.$

Si on pose $u(x) = e^x + x + 1$, alors $u'(x) = e^x + 1$ donc $f = \frac{u'}{u}.$

Par conséquent, une primitive de f est $F = \ln(u)$, soit :

$$F(x) = \ln(e^x + x + 1).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{e^x + 1}{e^x + x + 1} dx &= F(1) - F(0) \\ &= \ln(e + 2) - \ln(2)\end{aligned}$$

$$\boxed{\int_0^1 \frac{e^x + 1}{e^x + x + 1} dx = \ln\left(\frac{e + 2}{2}\right)}$$

2 Une primitive de e^{ax+b} est :

$$f(x) = e^{ax+b} \implies F(x) = \frac{1}{a}e^{ax+b}.$$

Ainsi, une primitive de $f(x) = e^{2x+1}$ est $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x+1}$ et donc :

$$\begin{aligned}\int_0^1 e^{2x+1} dx &= F(1) - F(0) \\ &= \frac{1}{2}e^3 - \frac{1}{2}e\end{aligned}$$

$$\boxed{\int_0^1 e^{2x+1} dx = \frac{1}{2}e(e^2 - 1)}$$

3 $\int_3^5 (e^x + x - 3) dx = F(5) - F(3)$, avec $F(x) = e^x + \frac{1}{2}x^2 - 3x$

$$= \left(e^5 + \frac{25}{2} - 15\right) - \left(e^3 + \frac{9}{2} - 9\right)$$

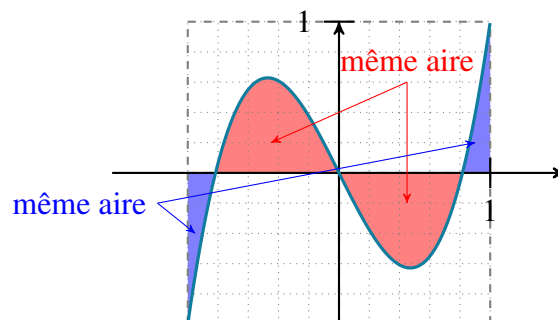
$$\boxed{\int_3^5 (e^x + x - 3) dx = e^5 - e^3 + 2}$$

4 $\int_{-1}^1 (3x^3 - 2x) dx = F(1) - F(-1)$, avec $F(x) = \frac{3}{4}x^4 - x^2$

$$= \frac{3}{4} - 1 - \left(\frac{3}{4} - 1\right)$$

$$\boxed{\int_{-1}^1 (3x^3 - 2x) dx = 0}$$

Remarque : il n'est pas incohérent de trouver une intégrale égale à 0. Cela signifie que sur l'intervalle considéré, la courbe représentative de la fonction est tantôt positive, tantôt négative, et que l'aire des parties sous l'axe des abscisses est égale à celle des parties au-dessus :



■ Corrigé de l'exercice 3.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

1 $F(x) = x \ln x - x.$

F est une primitive de f si $F' = f$.

$$F'(x) = 1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x} - 1 = \ln x + 1 - 1 = \ln x = f(x).$$

Ainsi, F est bien une primitive de f .

2
$$\begin{aligned} \int_1^e \ln x \, dx &= F(e) - F(1) \\ &= (e \ln e - e) - (1 \ln 1 - 1) \\ &= (e \times 1 - e) - (1 \times 0 - 1) \\ &= 0 - (-1) \end{aligned}$$

$$\boxed{\int_1^e \ln x \, dx = 1}$$

■ Corrigé de l'exercice 4.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

1 On peut compter entre 138 et 140 petits carreaux dans le domaine colorié.

Or, 1 petit carreau correspond à $0,1 \times 0,1 = 0,01$ unité d'aire.

$140 \times 0,01 = 1,4$ donc on peut écrire que $\boxed{\int_{-2}^1 f(x) \, dx \approx 1,4}$

2
$$\begin{aligned} e^x - \frac{e^x}{1+e^x} &= \frac{e^x(1+e^x)}{1+e^x} - \frac{e^x}{1+e^x} \\ &= \frac{e^x + e^{2x} - e^x}{1+e^x} \\ &= \frac{e^{2x}}{1+e^x} \\ &= \frac{e^{2x}}{1+e^x} \\ &= f(x). \end{aligned}$$

3
$$\begin{aligned} \int_{-2}^1 f(x) \, dx &= F(1) - F(-2), \text{ avec } F(x) = e^x - \ln(1+e^x) \\ &= e^1 - \ln(1+e^1) - [e^{-2} - \ln(1+e^{-2})] \\ &= e - \ln(1+e) - e^{-2} + \ln(1+e^{-2}) \end{aligned}$$

$$\boxed{\int_{-2}^1 f(x) \, dx = e - e^{-2} + \ln\left(\frac{1+e^{-2}}{1+e}\right)}$$

À la calculatrice, on trouve $\boxed{\int_{-2}^1 f(x) \, dx \approx 1,3966}.$

■ Corrigé de l'exercice 5.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

1 Un petit rectangle de la grille représente $0,25 \times 0,1 = 0,025$ unité d'aire.

Nous pouvons compter un peu plus de 20 de ces rectangles dans le domaine colorié, ce qui nous laisse à penser que celui-ci a une aire supérieure à $20 \times 0,025 = 0,5$ unité d'aire.

Ainsi, $\boxed{\int_1^{10} f(x) \, dx \geq 0,5}.$

$$\begin{aligned}
 2 \quad \frac{1}{x} - \frac{1}{1+x} &= \frac{1+x}{x(x+1)} - \frac{x}{x(1+x)} \\
 &= \frac{1+x-x}{x(x+1)} \\
 &= f(x).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3 \quad \int_1^{10} f(x) \, dx &= F(10) - F(1), \text{ avec } F(x) = \ln x - \ln(x+1) \\
 &= \ln 10 - \ln 11 - (\ln 1 - \ln 2) \\
 &= \ln 10 - \ln 11 + \ln 2 \\
 &\approx 0,5978.
 \end{aligned}$$

■ Corrigé de l'exercice 6.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

1 α est la solution de l'équation $f(x) = g(x)$.

$$\begin{aligned}
 f(x) = g(x) &\iff \frac{1}{x} = 0,5x^2 - x + 1 \\
 &\iff 1 = 0,5x^3 - x^2 + x \quad (\text{en multipliant par } x \neq 0) \\
 &\iff 0,5x^3 - x^2 + x - 1 = 0
 \end{aligned}$$

Posons :

$$h(x) = 0,5x^3 - x^2 + x - 1.$$

Alors,

$$h'(x) = 1,5x^2 - 2x + 1.$$

Le discriminant de $h'(x)$ est :

$$\Delta = 4 - 6 = -2 < 0$$

donc $h'(x)$ est toujours du signe de « 1,5 », soit toujours positif.

Ainsi, h est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

h est continue et croissante sur $[1; 2]$; de plus, $h(1) = -0,5 < 0$ et $h(2) = 1 > 0$ donc $0 \in]h(1); h(2)[$.

Par conséquent, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution sur $[1; 2]$. C'est cette valeur que l'on note α .

On trouve à la calculatrice $\alpha \approx 1,54$.

2 Sur $[0, 25; \alpha]$, $f(x) \geq g(x)$ donc l'aire à gauche correspond à $\int_{0,25}^{\alpha} [f(x) - g(x)] \, dx$. Posons :

$$u(x) = f(x) - g(x) = \frac{1}{x} - (0,5x^2 - x + 1) = \frac{1}{x} - 0,5x^2 + x - 1.$$

Une primitive de $u(x)$ est :

$$U(x) = \ln(x) - 0,5 \times \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - x = \ln(x) - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - x.$$

Alors,

$$\begin{aligned}
 \int_{0,25}^{\alpha} [f(x) - g(x)] \, dx &= U(\alpha) - U(0,25) \\
 &\approx -0,53 - (-1,6) \\
 &\approx 1,07.
 \end{aligned}$$

Sur $[\alpha; a]$, $g(x) \geq f(x)$ donc l'aire à droite correspond à $\int_{\alpha}^a [g(x) - f(x)] \, dx$.

Une primitive de $g(x) - f(x)$ est $-U(x)$ ($U(x)$ ayant été calculée précédemment) donc :

$$\begin{aligned}\int_{\alpha}^a [g(x) - f(x)] \, dx &= -U(a) - (-U(\alpha)) \\ &= -\ln(a) + \frac{1}{6}a^3 - \frac{1}{2}a^2 + a - 0,53\end{aligned}$$

On cherche à déterminer a telle que $\int_{0,25}^{\alpha} [g(x) - f(x)] \, dx = \int_{\alpha}^a [g(x) - f(x)] \, dx$, c'est-à-dire telle que :

$$\begin{aligned}\int_{0,25}^{\alpha} [g(x) - f(x)] \, dx &= \int_{\alpha}^a [g(x) - f(x)] \, dx \iff -\ln(a) + \frac{1}{6}a^3 - \frac{1}{2}a^2 + a - 0,53 = 1,07 \\ &\iff -\ln(a) + \frac{1}{6}a^3 - \frac{1}{2}a^2 + a - 1,6 = 0.\end{aligned}$$

Bien sûr, il est hors de question de résoudre cette équation algébriquement. On prend donc la calculatrice et on lui demande d'afficher les valeurs (par pas de 0,01) de la fonction $x \mapsto -\ln(x) + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x - 1,6$ à partir de $x = 2$ (par exemple) car on peut imaginer que $a > 2$ d'après la représentation graphique.

On trouve alors que $a \approx 2,85$.

■ Corrigé de l'exercice 7.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

Le prix de revente moyen est donné par la valeur moyenne de f sur $[0; 8]$:

$$\begin{aligned}\mu &= \frac{1}{8-0} \int_0^8 f(x) \, dx \\ &= \frac{1}{8} \int_0^8 10e^{-0,2x} \, dx \\ &= \frac{1}{8} [F(8) - F(0)], \text{ avec } F(x) = 10 \times \left(\frac{1}{-0,2} \right) e^{-0,2x} = -50e^{-0,2x} \\ &= \frac{1}{8} [-50e^{-0,2 \times 8} - (-50e^{-0,2 \times 0})] \\ &= -\frac{50}{8}e^{-1,6} + \frac{50}{8} \\ &\approx 4,988.\end{aligned}$$

On peut donc estimer à 4 988 € le prix moyen de revente de cette machine-outil sur 8 ans.

■ Corrigé de l'exercice 8.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

La population moyenne de la ville entre 2050 et 2080 est la valeur moyenne de f sur $[50; 80]$:

$$\begin{aligned}\mu &= \frac{1}{80-50} \int_{50}^{80} 10e^{0,034x} \, dx \\ &= \frac{1}{30} [F(80) - F(50)], \text{ avec } F(x) = 10 \times \frac{1}{0,034} e^{0,034x} = \frac{5000}{17} e^{0,034x} \\ &= \frac{1}{30} \times \frac{5000}{17} [e^{0,034 \times 80} - e^{0,034 \times 50}] \\ &\approx 95,161.\end{aligned}$$

On peut donc estimer à 95 161 le nombre moyen d'habitants de cette ville entre 2050 et 2080.

1 f est de la forme $f = \frac{1}{g}$, avec $g(x) = x \ln x$. Donc f' est de la forme $-\frac{g'}{g^2}$.

g est de la forme uv avec :

$$\begin{aligned} u(x) &= x & u'(x) &= 1 \\ v(x) &= \ln x & v'(x) &= \frac{1}{x} \end{aligned}$$

Donc g' est de la forme $u'v + uv'$

Ainsi,

$$\begin{aligned} g'(x) &= (u'v + uv')(x) \\ &= \ln x + x \times \frac{1}{x} \\ &= \ln x + 1. \end{aligned}$$

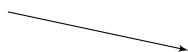
Par conséquent,

$$f'(x) = -\frac{\ln x + 1}{(x \ln x)^2}$$

2 $x > 1$ donc $\ln x > \ln 1$, soit $\ln x > 0$.

De plus, $(x \ln x)^2 > 0$ donc $f'(x) > 0$ sur $]1; +\infty[$.

On a alors le tableau suivant :

x	1	$+\infty$
f'		—
f		

3 $\frac{1}{\ln x} = \frac{1}{x} \times \frac{1}{\ln x} = \frac{1}{x \ln x} = f(x)$ donc f est de la forme $\frac{u'}{u}$ avec $u(x) = \ln x$.

Par conséquent, une primitive de $f(x)$ est $F(x) = \ln [u(x)]$, soit :

$$F(x) = \ln [\ln(x)].$$

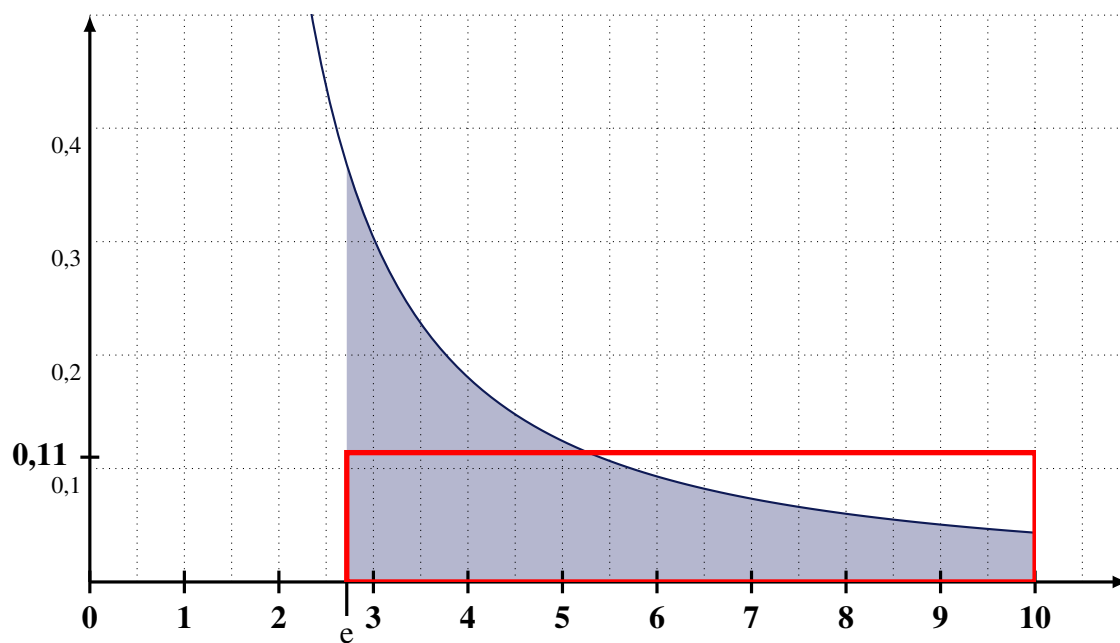
Ainsi, la valeur moyenne de $f(x)$ sur $[e; 10]$ est :

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{1}{10 - e} \int_e^{10} f(x) \, dx \\ &= \frac{1}{10 - e} [F(10) - F(e)] \\ &= \frac{1}{10 - e} [\ln(\ln 10) - \underbrace{\ln(\ln e)}_{=1}] \\ &\quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{=0} \end{aligned}$$

$$\mu = \frac{\ln(\ln 10)}{10 - e}$$

- 4 La valeur moyenne correspond à la hauteur du rectangle dont l'aire est égale à celle du domaine entre l'axe des abscisses et la courbe représentative de f sur $[e; 10]$.

Ici, $\mu \approx 0,11$, d'où le rectangle suivant :



Probabilités

Disponible sur <http://www.mathweb.fr>

A Exercices d'application du cours

R Exercices de réflexion

✌ Exercice & corrigé relus avec attention pour éviter les erreurs

12 juin 2018

Tableaux à double entrée

■ Exercice 1. Dans un lycée

(Source : tes-proba-07)

★★★★☆

R

Corrigé page 100 ✌

Dans un lycée de 2 000 élèves, 55 % sont des garçons.

Parmi les garçons, 70 % font « Anglais L.V.1 », le reste faisant « Espagnol L.V.1 ».

On sait de plus que 65 % des élèves de ce lycée font « Anglais L.V.1 ».

1 Compléter le tableau suivant :

	Filles	Garçons	Total
Anglais L.V.1			
Espagnol L.V.1			
Total			

2 On choisit au hasard un élève de ce lycée.

Quelle est la probabilité que ce soit un garçon faisant Anglais L.V.1 ?

3 On choisit au hasard un élève de ce lycée.

Quelle est la probabilité que ce soit une fille ou que l'élève fasse Espagnol L.V.1 ?

4 On choisit au hasard un élève parmi les garçons.

Quelle est la probabilité qu'il fasse Espagnol L.V.1 ?

5 On choisit au hasard un élève.

Sachant que c'est une fille, quelle est la probabilité qu'elle fasse Anglais L.V.1 ?

■ Exercice 2. Bac Asie juin 2008

(Source : tes-proba-08)

★★★★☆ R

Corrigé page 101

Ceci est un Q.C.M. Une seule réponse est exacte pour chaque question.

Les élèves de deux classes de terminale ES (désignées par TE 1 et TE 2) sont répartis selon leur spécialité (qui sont abrégées par SES, LV, Math) de façon suivante :

Spécialité	TE 1	TE 2	Total
SES	16	8	24
LV	12	14	26
Math	6	10	16
Total	34	32	66

On interroge un élève au hasard. Les données précédentes sont à utiliser pour les quatre questions suivantes.

1 La probabilité que l'élève interrogé appartienne à la TE 1 est égale à :

- a. $\frac{1}{66}$ b. $\frac{1}{34}$ c. $\frac{17}{33}$

2 La probabilité que l'élève interrogé suive l'enseignement de spécialité Math ou appartienne à la TE 1 est égale à :

- a. $\frac{2}{3}$ b. $\frac{25}{33}$ c. $\frac{1}{11}$

3 La probabilité que l'élève interrogé suive la spécialité Math sachant qu'il appartient à la TE 1 est égale à :

- a. $\frac{1}{34}$ b. $\frac{1}{11}$ c. $\frac{3}{17}$

4 La probabilité que l'élève interrogé appartienne à la TE 1 sachant qu'il suit la spécialité Math est égale à :

- a. $\frac{3}{17}$ b. $\frac{14}{17}$ c. $\frac{3}{8}$

■ Exercice 3. Union et intersection

(Source : tes-proba-09)

★★★★☆ R

Corrigé page 101

On considère deux événements A et B de l'univers Ω .

Nous avons réunis dans le tableau suivant le nombre d'éléments de A et B :

	A	$\bar{A}$
B	7	10
$\bar{B}$	6	3

1 Calculer $P(A \cap B)$.

3 Calculer $P(\overline{A \cup B})$.

2 Calculer $P(A \cup B)$.

4 Calculer $P(\overline{A \cap B})$.

Avec une loi binomiale

■ Exercice 4. Parc informatique d'un lycée

(Source : tes-proba-01)



Corrigé page 102

Le parc informatique d'un lycée est composé de 200 ordinateurs dont :

- 30 sont considérés comme neufs ;
- 90 sont considérés comme récents ;
- les autres sont considérés comme anciens.

Une étude statistique indique que :

- 5 % des ordinateurs neufs sont défectueux ;
- 10 % des ordinateurs récents sont défectueux ;
- 20 % des ordinateurs anciens sont défectueux.

On choisit au hasard un ordinateur de ce parc. On note les événements suivants :

- N : « L'ordinateur est neuf »
- R : « L'ordinateur est récent »
- A : « L'ordinateur est ancien »
- D : « L'ordinateur est défectueux »
- $\bar{D}$ l'événement contraire de D .

- 1 Construire un arbre pondéré décrivant la situation.
- 2 Calculer la probabilité que l'ordinateur choisi soit neuf et défectueux.
- 3 Démontrer que la probabilité que l'ordinateur choisi soit défectueux est égale à 0,132 5.
- 4 Déterminer la probabilité que l'ordinateur soit ancien sachant qu'il est défectueux. Donner le résultat sous forme décimale arrondie au centième.
- 5 Pour équiper le centre de ressources de l'établissement, on choisit au hasard 3 ordinateurs dans le parc. On admet que le parc est suffisamment important pour qu'on puisse assimiler ces choix à des tirages successifs indépendants avec remise. Déterminer la probabilité qu'exactement un des ordinateurs choisis soit défectueux. Donner le résultat sous forme décimale arrondie au centième.

■ Exercice 5. Une usine fabrique des sacs

★★★★☆ A

(Source : tes-proba-02)

Corrigé page 102

Une usine produit des sacs. Chaque sac fabriqué peut présenter deux défauts : le défaut a et le défaut b . Un sac est dit défectueux s'il présente au moins l'un des deux défauts.

- 1 Dans cette question, les probabilités demandées seront données avec leurs valeurs décimales exactes.

On prélève un sac au hasard dans la production d'une journée.

On note A l'événement « le sac présente le défaut a » et B l'événement « le sac présente le défaut b ». Les probabilités des événements A et B sont respectivement $P(A) = 0,02$ et $P(B) = 0,01$; on suppose que ces deux événements sont indépendants.

- Calculer la probabilité de l'événement C : « le sac prélevé présente le défaut a et le défaut b ».
- Calculer la probabilité de l'événement D : « le sac est défectueux ».
- Calculer la probabilité de l'événement E : « le sac ne présente aucun défaut ».
- Sachant que le sac présente le défaut a , quelle est la probabilité qu'il présente aussi le défaut b ?

- 2 On suppose que la probabilité (arrondie au centième) qu'un sac soit défectueux est égale à 0,03.

On prélève au hasard un échantillon de 100 sacs dans la production d'une journée. La production est suffisamment importante pour que l'on assimile ce prélèvement à un tirage avec remise de 100 sacs. On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de 100 sacs, associe le nombre de sacs défectueux.

- Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
- Quelle est la probabilité de l'événement « au moins un sac est défectueux » ? On arrondira cette probabilité au centième. Interpréter ce résultat.
- Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X .
Interpréter ce résultat dans le cadre de l'énoncé.

■ Exercice 6. Loi binomiale & fonction « random »

★★★★☆ A

(Source : tes-proba-05)

Corrigé page 103

Un logiciel de gestion de films MP4 propose la fonction « random » qui permet de choisir un film MP4 au hasard parmi toutes les fichiers MP4 enregistrés par l'utilisateur.

Paul possède justement ce logiciel, et il a enregistré 200 films.

Parmi ces films, 23 % sont des films de science-fiction.

Paul décide d'utiliser la fonction « random » 20 fois. On note X la variable aléatoire représentant le nombre de films de science-fiction choisis par le logiciel.

- 1 Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les caractéristiques.

- 2 À l'aide de la calculatrice, donner la valeur approchée à 10^{-6} près de :

- $P(X = 7)$
- $P(X \leq 5)$
- $P(X \geq 15)$
- $P(6 \leq X \leq 15)$

■ Exercice 7. Lecteurs MP3 défectueux

★★★★☆ A

(Source : tes-proba-03)

Corrigé page 105

Une entreprise fabrique des lecteurs MP3, dont 6 % sont défectueux.

Chaque lecteur MP3 est soumis à une unité de contrôle dont la fiabilité n'est pas parfaite.

Cette unité de contrôle rejette 98 % des lecteurs MP3 défectueux et 5 % des lecteurs MP3 fonctionnant correctement.

On note :

- D l'événement : « le lecteur MP3 est défectueux » ;
- R l'événement : « l'unité de contrôle rejette le lecteur MP3 ».

- 1 Faire un arbre pondéré sur lequel on indiquera les données qui précèdent.
- 2
 - a. Calculer la probabilité que le lecteur soit défectueux et ne soit pas rejeté.
 - b. On dit qu'il y a une erreur de contrôle lorsque le lecteur MP3 est rejeté alors qu'il n'est pas défectueux, ou qu'il n'est pas rejeté alors qu'il est défectueux.
Calculer la probabilité qu'il y ait une erreur de contrôle.
- 3 Montrer que la probabilité qu'un lecteur MP3 ne soit pas rejeté est égale à 0,894 2.
- 4 Quatre contrôles successifs indépendants sont maintenant réalisés pour savoir si un lecteur MP3 peut être commercialisé.

Un lecteur MP3 est :

- commercialisé avec le logo de l'entreprise s'il subit avec succès les quatre contrôles successifs,
- détruit s'il est rejeté au moins deux fois,
- commercialisé sans le logo sinon.

Le coût de fabrication d'un lecteur MP3 s'élève à 50 €.

Son prix de vente est de 120 € pour un lecteur avec logo et 60 € pour un lecteur sans logo.

On désigne par G la variable aléatoire qui, à chaque lecteur MP3 fabriqué, associe le gain algébrique en euros (éventuellement négatif) réalisé par l'entreprise.

- a. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire G .
- b. Calculer à 10^{-2} près l'espérance mathématique de G . Donner une interprétation de ce résultat.

■ Exercice 8. Société de sondage

★★★★☆

A

(Source : tes-proba-06)

Corrigé page 106

Les résultats seront donnés à 0,001 près.

Une entreprise confie à une société de sondage par téléphone une enquête sur la qualité de ses produits. Chaque enquêteur a une liste de personnes à contacter.

Lors du premier appel téléphonique, la probabilité pour que le correspondant soit absent est 0,4.

Sachant que le correspondant est présent, la probabilité pour qu'il accepte de répondre au questionnaire est 0,2.

1 On note :

- A_1 l'événement : « la personne est absente lors d'un premier appel » ;
- R_1 l'événement : « la personne accepte de répondre au questionnaire lors du premier appel ».

Calculer $P(R_1)$.

2 Lorsqu'une personne est absente lors du premier appel, on lui téléphone une seconde fois à une heure différente et alors, la probabilité pour qu'elle soit absente est 0,3. Sachant qu'elle est présente, la probabilité pour qu'elle n'accepte pas de répondre au questionnaire est encore 0,2.

Si une personne est absente lors du second appel, on ne tente plus de la contacter.

On note :

- A_2 l'événement : « la personne est absente lors du second appel » ;
- R_2 l'événement : « la personne accepte de répondre au questionnaire lors du second appel » ;
- R l'événement : « la personne accepte de répondre au questionnaire ».

Montrer que la probabilité de R est 0,176.

3 Sachant qu'une personne a accepté de répondre au questionnaire, calculer la probabilité que la réponse ait eu lieu lors du premier appel.

4 On suppose que les sondages auprès des personnes d'une même liste sont indépendants.

Un enquêteur a une liste de 20 personnes à contacter.

Quelle est la probabilité pour qu'au moins une des vingt personnes de la liste accepte de répondre au questionnaire ?

Sans loi binomiale

■ Exercice 9. 3 classes jouent

★★★★☆

R

(Source : tes-proba-04)

Corrigé page 107

Dans une école, il y a 3 classes C_1 , C_2 , C_3 dont le nombre d'élèves est respectivement 44, 33, 40.

Chaque classe a une probabilité de gagner à un jeu respectivement de $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$.

Si un élève gagne, quelle est la probabilité qu'il vienne de la classe C_2 ?

Probabilités avec une suite géométrique

■ Exercice 10. Le tireur à l'arc

(Source : tes-proba-10)



R

Corrigé page 107

Victor est un tireur à l'arc qui aime analyser son jeu.

Sur une série de tirs, il a constaté que :

- lors du premier tir, la cible était atteinte 9 fois sur 10 ;
- lorsque la cible est atteinte lors d'un tir, elle est atteinte au tir suivant avec une probabilité de 0,8 ;
- lorsque la cible n'est pas atteinte lors d'un tir, elle n'est pas atteinte lors du tir suivant avec une probabilité de 0,3.

On note : A_n l'événement : « la cible est atteinte lors du n -ième lancer ».

Partie A

- 1 Préciser la valeur de $P(A_1)$, $P(\overline{A_1})$, $P_{A_1}(A_2)$ et $P_{\overline{A_1}}(\overline{A_2})$.
- 2 Faire un arbre de probabilités pour les deux premiers tirs.
- 3 Calculer $P(A_1 \cap A_2)$.
- 4 Montrer que $P(A_2) = 0,79$.

Partie B

On note $x_n = P(A_n)$ pour un entier n supérieur ou égal à 1.

- 1 Montrer que $x_{n+1} = 0,1x_n + 0,7$
- 2 On pose $u_n = x_n - \frac{7}{9}$
 - a. Montrer que (u_n) est une suite géométrique de raison 0,1 et de premier terme $\frac{11}{90}$.
 - b. En déduire une expression de u_n , puis de x_n , en fonction de n .
 - c. En déduire la limite de (x_n) et interpréter ce résultat.

■ Exercice 11. Une histoire de montres

★★★★★ R

(Source : tes-proba-11)

Corrigé page 110

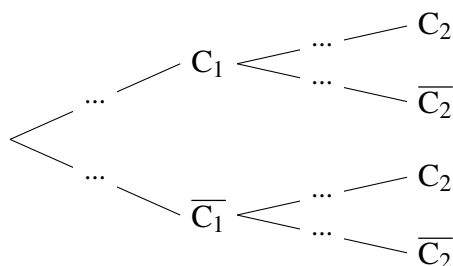
Madame Laguigne est très malchanceuse. Elle a constaté que la probabilité pour qu'une montre qu'elle vient d'acheter fonctionne correctement est égale à 0,7.

De plus, si la montre qu'elle vient d'acheter ne fonctionne pas, la probabilité pour que la montre qu'elle achètera après fonctionne correctement est égale à 0,5 alors que si la montre fonctionne bien cette probabilité est égale à 0,7.

On pose :

- C_n l'événement : « la n -ième montre fonctionne correctement » pour un entier n supérieur ou égal à 1 ;
- p_n la probabilité que C_n se réalise.

1 Compléter l'arbre de probabilités suivant :



2 Montrer que la probabilité que la deuxième montre fonctionne est égale à 0,64.

3 Justifier l'égalité suivante :

$$p_{n+1} = 0,2p_n + 0,5$$

4 On pose :

$$u_n = p_n - 0,625.$$

- Montrer que (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
- En déduire p_n en fonction de n .
- Calculer la limite de (p_n) quand n tend vers $+\infty$ et interpréter ce résultat.

■ Corrigé de l'exercice 1.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

- 1 On a le tableau complété suivant :

	Filles	Garçons	Total
Anglais L.V.1	530	770	1 300
Espagnol L.V.1	370	330	700
Total	900	1 100	2 000

Diagramme d'annotation du tableau :

- ① : Le total des élèves (pointe vers 2 000)
- ② : 55 % des élèves du lycée (pointe vers 1 100)
- ③ : $2000 - 1100$ (pointe vers 900)
- ④ : 70 % des garçons (pointe vers 770)
- ⑤ : $1100 - 770$ (pointe vers 330)
- ⑥ : 65 % des élèves du lycée (pointe vers 1 300)
- ⑦ : $2000 - 1300$ (pointe vers 700)
- ⑧ : $700 - 330$ (pointe vers 370)

- 2 On choisit au hasard un élève parmi les 2 000.

Il y a 330 garçons qui font Anglais L.V.1 donc la probabilité que l'élève pris au hasard soit un garçon faisant Anglais L.V.1 est :

$$\frac{330}{2000} = \frac{33}{200}.$$

- 3 On choisit au hasard un élève parmi les 2 000.

Il y a 900 filles et 700 élèves qui font Espagnol L.V.1, dont 370 filles. Donc la probabilité que l'élève choisi(e) soit une fille ou fasse Espagnol L.V.1 est :

$$\frac{900 + 700 - 370}{2000} = \frac{1230}{2000} = \frac{123}{200}.$$

- 4 On choisit parmi les 1 100 garçons. Il y en a 330 qui font Espagnol L.V.1 donc la probabilité que l'on choisisse un élève qui fait Espagnol L.V.1 parmi les garçons est :

$$\frac{330}{1100} = \frac{3}{10}.$$

- 5 On sait qu'il y a 530 filles qui font Anglais L.V.1 donc sachant que l'élève choisie est une fille, la probabilité qu'elle fasse Anglais L.V.1 est :

$$\frac{530}{900} = \frac{53}{90}.$$

■ Corrigé de l'exercice 2.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

1 Réponse *c*.

En effet, il y a 34 élèves en TE 1 sur les 66 au total. La probabilité est donc égale à $\frac{34}{66} = \frac{17}{33}$.

2 Réponse *a*.

En effet, il y a 16 élèves qui suivent l'enseignement de spécialité Math et 34 qui sont en TE 1, auxquels il faut enlever les 6 qui font aussi spécialité Math.

La probabilité est donc égale à : $\frac{16 + 34 - 6}{66} = \frac{44}{66} = \frac{2}{3}$.

3 Réponse *c*.

Il y a 6 élèves de TE 1 qui suivent l'enseignement de spécialité Math, donc 6 sur 34. La probabilité est donc égale à $\frac{6}{34} = \frac{3}{17}$.

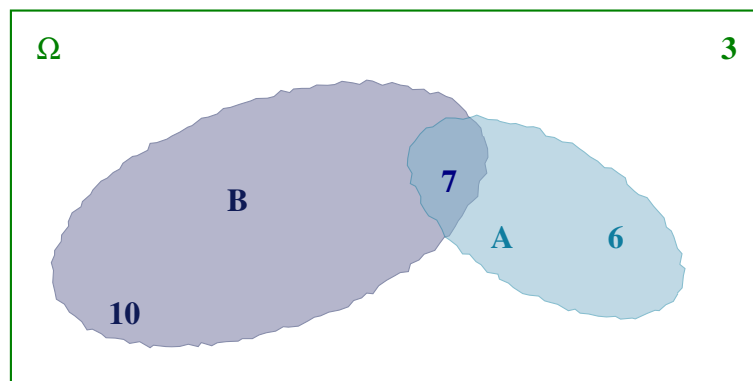
4 Réponse *c*.

Il y a 16 élèves qui suivent l'enseignement de spécialité Math, dont 6 sont en TE 1. La probabilité est donc égale à $\frac{6}{16} = \frac{3}{8}$.

■ Corrigé de l'exercice 3.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

Avant tout, faisant un diagramme de Venn du tableau :



On voit alors qu'il y a en tout $10 + 7 + 6 + 3 = 26$ éléments dans l'univers.

1 $P(A \cap B) = \frac{7}{26}$.

2 $P(A \cup B) = \frac{10 + 7 + 6}{26} = \frac{23}{26}$.

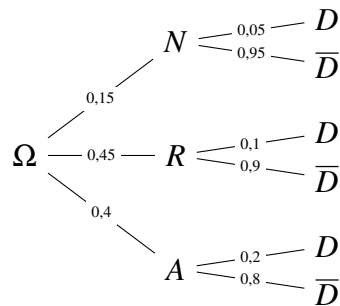
3 $P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{23}{26} = \frac{3}{26}$.

4 $P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = 1 - \frac{7}{26} = \frac{19}{26}$.

■ Corrigé de l'exercice 4.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

- 1 On a l'arbre pondéré suivant :



- 2 La probabilité que l'ordinateur choisi soit neuf et défaillant est donnée par :

$$P(N \cap D) = P(N) \times P_N(D) = 0,15 \times 0,05 = \underline{0,0075}.$$

- 3 D'après la formule des probabilités totales, on a :

$$P(D) = P(D \cap A) + P(D \cap R) + P(D \cap N).$$

Ainsi, d'après l'arbre, on a :

$$P(D) = 0,4 \times 0,2 + 0,45 \times 0,1 + 0,0075 = \underline{0,1325}.$$

- 4 La probabilité que l'ordinateur choisi soit ancien sachant qu'il est défaillant est donnée par :

$$P_D(A) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{0,08}{0,1325} \approx \underline{0,60}.$$

- 5 On effectue une répétition de trois épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes, de probabilité de succès (« défaillant ») 0,1325 (d'après la question 3) : la variable aléatoire X représentant le nombre de succès obtenus suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 3$ et $p = 0,1325$.

La probabilité d'obtenir exactement un succès est donc :

$$P(X = 1) = 3 \times 0,1325 \times (1 - 0,1325)^2 \approx \underline{0,30}.$$

■ Corrigé de l'exercice 5.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

- 1 a. Comme A et B sont indépendants,

$$\begin{aligned} P(C) &= p(A \cap B) \\ &= p(A) \times p(B) \\ &= 0,02 \times 0,01 \end{aligned}$$

$$\boxed{P(C) = 0,0002}$$

$$\begin{aligned} b. \quad P(D) &= p(A \cup B) \\ &= p(A) + p(B) - p(A \cap B) \\ &= 0,02 + 0,01 - 0,0002 \end{aligned}$$

$$\boxed{P(D) = 0,0298}$$

c. On a $E = \overline{D}$ d'où :

$$\begin{aligned}P(E) &= 1 - p(D) \\ &= 1 - 0,0298\end{aligned}$$

$$P(E) = 0,9702$$

d. A et B étant indépendants, par propriété :

$$\frac{p(A \cap B)}{p(A)} = p(B) = \underline{0,01}.$$

- 2** a. On a manifestement une épreuve de Bernoulli avec deux issues (sac sans défaut, sac défectueux), que l'on répète 100 fois de façon indépendante (tout du moins *assimilé* comme indépendante d'après l'énoncé).

La variable aléatoire X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0,03$.

b. On sait que pour $0 \leq k \leq 100$, la probabilité que k sacs soient défectueux est :

$$P(X = k) = \binom{100}{k} 0,03^k (1 - 0,03)^{100-k}.$$

L'événement contraire de l'événement « au moins un sac est défectueux » est « il n'y a pas de sac défectueux », qui a une probabilité égale à :

$$\binom{100}{0} 0,03^0 \times 0,97^{100} = 0,97^{100} \approx 0,0476.$$

La probabilité d'avoir au moins un sac défectueux est donc égale à :

$$1 - 0,97^{100} \approx 0,952 \approx 0,95 \text{ (au centième près).}$$

Interprétation : pour 100 sacs prélevés, il y a à peu près 95 chances sur 100 d'avoir au moins un sac défectueux.

c. Pour cette loi binomiale, l'espérance mathématique de X est :

$$E(X) = n \times p = 100 \times 0,03 = 3.$$

Interprétation : sur 100 sacs prélevés il y a en moyenne 3 sacs défectueux.

■ Corrigé de l'exercice 6.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

- 1** Considérons l'expérience qui consiste à choisir un fichier MP4 au hasard parmi les 200 et regarder si c'est un film de science-fiction. Il n'y a que deux issues possibles : soit il l'est, soit il ne l'est pas. La probabilité du succès est alors $p = 0,23$ d'après l'énoncé.

Cette expérience est une expérience de Bernoulli et nous la répétons 20 fois de façon indépendante. X suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0,23$.

- 2** a. D'après la formule de Bernoulli,

$$\begin{aligned}P(X = 7) &= \binom{20}{7} \times (0,23)^7 \times (1 - 0,23)^{20-7} \\ &\approx 0,088\end{aligned}$$

Ainsi, $P(X = 7) \approx 0,088$.

Pour les questions suivantes, nous aurons besoin de construire la table ci-dessous à la calculatrice.

k	$P(X \leq k)$
0	0.00536802467474
1	0.0374367435108
2	0.128436939169
3	0.29152819892
4	0.498569376072
5	0.696468475271
6	0.844250270128
7	0.932535498224
8	0.975388230693
9	0.992455119815
10	0.998062811955
11	0.999585561887
12	0.999926697424
13	0.999989403656
14	0.999998768873
15	0.999999887834
16	0.999999992282
17	0.999999999623
18	0.999999999988
19	1.0
20	1.0

b. Nous lisons dans la table :

$$\mathbf{P(X \leq 5) \approx 0,696468.}$$

c. Nous avons :

$$\begin{aligned} P(X \geq 15) &= 1 - P(X \leq 14) \\ &\approx 1 - 0,999999 \end{aligned}$$

$$\mathbf{P(X \geq 15) \approx 0,000001}$$

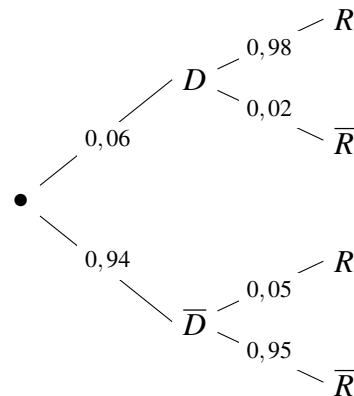
d. Nous avons :

$$\begin{aligned} P(6 \leq X \leq 15) &= P(X \leq 15) - P(X \leq 5) \\ &\approx 1 - 0,696468 \end{aligned}$$

$$\mathbf{P(6 \leq X \leq 15) \approx 0,303532}$$

N.B. Dans la table des valeurs, on constate qu'il est affiché « 1 » pour X supérieur ou égal à 19; ceci est dû à la capacité d'affichage du programme utilisé pour calculer les probabilités et qui arrondi à 1.

1 On a l'arbre suivant :



2 a. $P(D \cap \bar{R}) = P(D) \times P_D(\bar{R})$
 $= 0,06 \times 0,02$
 $= 0,0012.$

Ainsi, la probabilité que le lecteur soit défectueux et ne soit pas rejeté est égale à 0,0012.

b. Il y a erreur de contrôle pour les événements disjoints $D \cap \bar{R}$ et $\bar{D} \cap R$.

Sa probabilité est donc :

$$\begin{aligned} P(D \cap \bar{R}) + P(\bar{D} \cap R) &= 0,06 \times 0,02 + 0,94 \times 0,05 \\ &= 0,0012 + 0,0470 \\ &= 0,0482. \end{aligned}$$

La probabilité qu'il y ait une erreur de contrôle est donc égale à 0,0482.

3 $P(D \cap \bar{R}) + P(\bar{D} \cap \bar{R}) = 0,06 \times 0,02 + 0,94 \times 0,95$
 $= 0,0012 + 0,8930$
 $= 0,8942$

La probabilité qu'un lecteur MP3 ne soit pas rejeté est donc égale à 0,8942.

4 a. La variable aléatoire X représentant le nombre de contrôles positifs, c'est-à-dire où le MP3 n'est pas rejeté, suit la loi binomiale de paramètres $n = 4$ et $p = 0,8942$.

On a de plus le tableau suivant :

Lecteur commercialisé avec logo	Lecteur commercialisé sans logo	Lecteur détruit
4 contrôles positifs	1 contrôle négatif	au moins 2 contrôles négatifs donc 0 ou 1 contrôle positif
$P(X = 4)$	$P(X = 2) + P(X = 3)$	$P(X = 0) + P(X = 1)$
$G = 120 - 50 = 70$	$G = 60 - 50 = 10$	$G = -50$

Ainsi,

- $P(G = 70) = P(X = 4) = \binom{4}{4} \times 0,8942^4 \approx 0,6394;$
- $P(G = 10) = P(X = 2) + P(X = 3) \approx 0,3563;$
- $P(G = -50) \approx 0,0043.$

Remarque : quand on demande la loi de probabilité d'une variable aléatoire, cela ne signifie pas nécessairement qu'il faut en donner le nom. Ici, par exemple, G ne suit pas la loi binomiale ; ce n'est que X (le nombre de contrôles positifs). Notre variable aléatoire ne suit pas de loi connue donc on doit donner la valeur de toutes les probabilités.

b. D'après la loi de probabilité de G , son espérance est égale à :

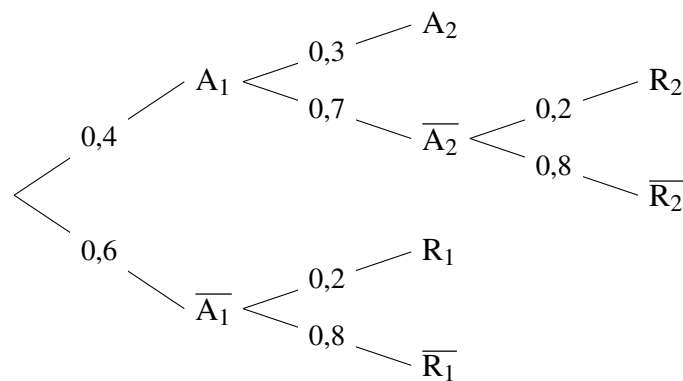
$$E(G) = 70 \times 0,6394 + 10 \times 0,3563 - 50 \times 0,0043 \\ \approx 48,11.$$

Cela signifie qu'en moyenne, on peut compter sur un bénéfice de 48,11 € par lecteur produit.

■ Corrigé de l'exercice 8.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

Avant tout, construisons un arbre de probabilités schématisant notre problème :



1 $P(R_1) = P_{\overline{A_1}}(R_1) \times P(\overline{A_1})$
 $= 0,2 \times 0,6$

$$P(R_1) = 0,12$$

2 D'après la formule des probabilités totales,

$$P(R) = P(R_1) + P(R_2) \\ = 0,12 + 0,4 \times 0,7 \times 0,2 \\ = 0,12 + 0,056$$

$$P(R) = 0,176$$

3 Nous cherchons $P_R(R_1)$.

$$P_R(R_1) = \frac{P(R_1 \cap R)}{P(R)}$$

Or, $P(R_1 \cap R) = P(R_1)$.

$$= \frac{0,12}{0,176}$$

$$P_R(R_1) \approx 0,682$$

- 4 Notons X la variable aléatoire représentant le nombre de personnes qui acceptent de répondre au questionnaire.

Les 20 sondages sont indépendants et chaque sondage a deux issues seulement : la personne accepte de répondre ou refuse, avec $P(R) = 0,176$.

X suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0,176$. Ainsi,

$$\begin{aligned} P(X \geq 1) &= 1 - P(X < 1) \\ &= 1 - P(X = 0) \\ &= 1 - (1 - 0,176)^{20} \end{aligned}$$

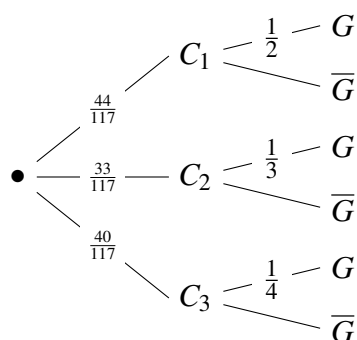
$$P(X \geq 1) \approx 0,979$$

■ Corrigé de l'exercice 9.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

Notons G l'événement : « L'élève gagne ».

Il y a en tout $44 + 33 + 40 = 117$ élèves sur l'ensemble des trois classes. On a alors l'arbre suivant :



On en déduit :

$$P(G) = \frac{44}{117} \times \frac{1}{2} + \frac{33}{117} \times \frac{1}{3} + \frac{40}{117} \times \frac{1}{4} = \frac{43}{117}.$$

Donc :

$$P_G(C_2) = \frac{p(C_2 \cap G)}{p(G)} = \frac{\frac{33}{117} \times \frac{1}{3}}{\frac{43}{117}} = \frac{11}{43}.$$

Ainsi, si un élève gagne, la probabilité qu'il vienne de la classe C_2 est égale à $\frac{11}{43}$.

■ Corrigé de l'exercice 10.

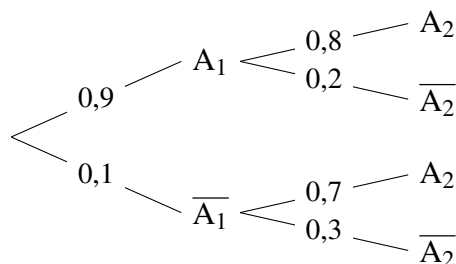
[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

Partie A

- 1 D'après l'énoncé, on a :

$$P(A_1) = 0,9 \quad ; \quad P(\overline{A_1}) = 1 - 0,9 = 0,1 \quad ; \quad P_{A_1}(A_2) = 0,8 \quad ; \quad P_{\overline{A_1}}(\overline{A_2}) = 0,3$$

2 L'arbre des probabilités est le suivant :



3
$$\begin{aligned} P(A_1 \cap A_2) &= P(A_1) \times P_{A_1}(A_2) \\ &= 0,9 \times 0,8 \end{aligned}$$

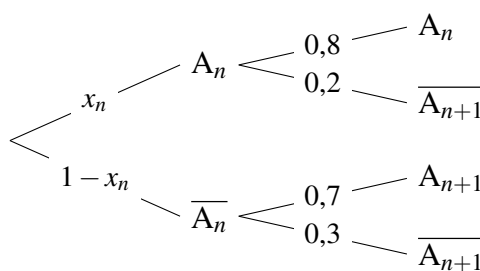
$$P(A_1 \cap A_2) = 0,72$$

4
$$\begin{aligned} P(A_2) &= P(A_1 \cap A_2) + P(\overline{A_1} \cap A_2) \\ &= 0,72 + 0,1 \times 0,7 \end{aligned}$$

$$P(A_2) = 0,79$$

Partie B

1 Avant tout, construisons l'arbre de probabilités pour A_n et A_{n+1} :



Ainsi,

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= P(A_{n+1}) \\ &= P(A_n \cap A_{n+1}) + P(\overline{A_n} \cap A_{n+1}) \\ &= 0,8x_n + 0,7(1 - x_n) \\ &= 0,8x_n + 0,7 - 0,7x_n \end{aligned}$$

$$x_{n+1} = 0,1x_n + 0,7$$

2 a. On sait que $u_n = x_n - \frac{7}{9}$ (par définition) donc, au rang $n + 1$, on a :

$$\begin{aligned}
 u_{n+1} &= x_{n+1} - \frac{7}{9} \\
 &= 0,1x_n + 0,7 - \frac{7}{9} \\
 &= \frac{1}{10}x_n + \frac{7}{10} - \frac{7}{9} \\
 &= \frac{1}{10}x_n + \frac{63}{90} - \frac{70}{90} \\
 &= \frac{1}{10}x_n - \frac{7}{90} \\
 &= \frac{1}{10}\left(x_n - \frac{7}{9}\right) \\
 &= \frac{1}{10}u_n \\
 &= 0,1u_n.
 \end{aligned}$$

Par conséquent, (u_n) est une suite géométrique de raison $q = 0,1$ et de premier terme :

$$\begin{aligned}
 u_1 &= x_1 - \frac{7}{9} \\
 &= 0,9 - \frac{7}{9} \\
 &= \frac{9}{10} - \frac{7}{9}
 \end{aligned}$$

$$u_1 = \frac{11}{90}$$

b. (u_n) étant une suite géométrique,

$$u_n = u_1 \times q^{n-1}.$$

Ainsi,

$$u_n = \frac{11}{90} \times 0,1^{n-1}.$$

De plus, comme $u_n = x_n - \frac{7}{9}$, on a :

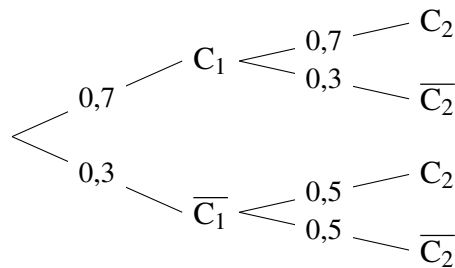
$$x_n = u_n + \frac{7}{9} \quad \text{soit} \quad x_n = \frac{11}{90} \times 0,1^{n-1} + \frac{7}{9}$$

c. D'après le cours, si $0 < q < 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$.

Or, $0 < 0,1 < 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,1^n = 0$. On en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \frac{7}{9}$.

Ceci signifie que plus Victor effectuera de tirs, plus la probabilité que la cible soit atteinte se rapprochera de $\frac{7}{9}$, soit à peu près 0,78.

1 L'arbre de probabilités est le suivant :

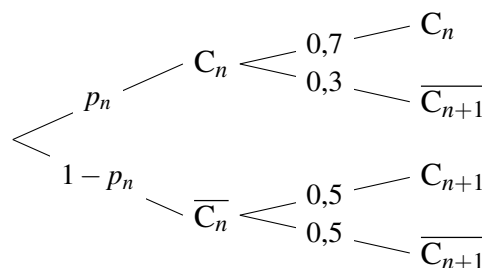


2 La probabilité que la deuxième montre fonctionne correctement est :

$$\begin{aligned}
 P(C_2) &= P(C_1 \cap C_2) + P(\overline{C_1} \cap C_2) \\
 &= P(C_1) \times P_{C_1}(C_2) + P(\overline{C_1}) \times P_{\overline{C_1}}(C_2) \\
 &= 0,7 \times 0,7 + 0,3 \times 0,5
 \end{aligned}$$

$$P(C_2) = 0,64$$

3 À l'étape n , nous avons l'arbre suivant :



Ainsi,

$$\begin{aligned}
 p_{n+1} &= p_n \times 0,7 + (1 - p_n) \times 0,5 \\
 &= 0,7p_n + 0,5 - 0,5p_n
 \end{aligned}$$

$$p_{n+1} = 0,2p_n + 0,5$$

4 a. $u_{n+1} = p_{n+1} - 0,625$

$$\begin{aligned}
 &= 0,2p_n + 0,5 - 0,625 \\
 &= 0,2p_n - 0,125 \\
 &= 0,2 \left(p_n - \frac{0,125}{0,2} \right) \\
 &= 0,2(p_n - 0,625) \\
 &= 0,2u_n
 \end{aligned}$$

Ainsi, (u_n) est géométrique de raison $q = 0,2$ et de premier terme :

$$u_1 = p_1 - 0,625 = 0,7 - 0,625 = 0,075.$$

b. On déduit de la question précédente que :

$$u_n = u_1 \times q^{n-1} = 0,075 \times 0,2^{n-1}$$

et, comme $u_n = p_n - 0,625$:

$$p_n = u_n + 0,625 \quad \text{soit} \quad \boxed{p_n = 0,075 \times 0,2^{n-1} + 0,625}$$

c. $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,075 \times 0,2^{n-1} = 0$ car $0 < 0,2 < 1$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = 0,625$.

Cela signifie qu'à longs termes, la probabilité que madame Laguigne achète une montre qui fonctionne correctement se rapprochera de 0,625.

Lois continues

Disponible sur <http://www.mathweb.fr>

A Exercices d'application du cours

R Exercices de réflexion

👉 Exercice & corrigé relus avec attention pour éviter les erreurs

12 juin 2018

Loi uniforme

■ Exercice 1. À la caisse d'un supermarché

★★★★☆ **A**

Corrigé page 118 👉

(Source : tes-loicont-03)

Monsieur Leumateux vient d'aménager dans un quartier où se trouvent, à peu près à la même distance de chez lui, deux supermarchés, notés A et B. Afin de choisir celui dans lequel il ira, il prend en considération le temps d'attente aux caisses.

Dans le supermarché A, le temps d'attente aux caisses est une variable aléatoire X , exprimée en minutes, qui suit la loi uniforme sur $[1; 14]$ et dans le supermarché B, le temps d'attente est une variable aléatoire Y , exprimée en minutes, qui suit la loi uniforme sur $[3; 10]$.

- 1 Déterminer la probabilité pour qu'un client attende aux caisses entre 3 et 5 minutes dans les deux supermarchés.

Sur ce critère, quel supermarché monsieur Leumateux doit-il choisir ?

- 2 Calculer la probabilité pour qu'un client attende aux caisses plus de 8 minutes dans les deux supermarchés.

Sur ce critère, quel supermarché monsieur Leumateux doit-il choisir ?

- 3 Calculer le temps d'attente moyen aux caisses pour les deux supermarchés.

■ Exercice 2. Temps de trajet

★★★★☆ **A**

Corrigé page 118 👉

(Source : tes-loicont-04)

À travers un sondage auprès de lycéens fréquentant un établissement en centre ville d'une grande agglomération, on constate que le temps de trajet pour se rendre de leur domicile à leur établissement est compris entre 5 et 25 minutes.

On interroge au hasard un lycéen d'une grande agglomération et on note X la variable aléatoire égale au temps qu'il met pour aller de chez lui à son lycée.

X suit alors la loi uniforme sur $[5; 25]$.

- 1 Quelle est la probabilité que la durée de son trajet soit comprise entre 10 et 15 minutes ?
- 2 Calculer la durée moyenne du trajet domicile-lycée.

- 3 Un élève emprunte tous les jours le même trajet pour aller de son domicile au lycée. On suppose que la durée des trajets sont toutes indépendantes les unes des autres.

Sur une semaine de cours (du lundi au vendredi), quelle est la probabilité pour qu'au moins un trajet dure au moins 20 minutes ? On donnera une valeur approchée au centième.

■ Exercice 3. Feu tricolore

★★★★☆

A

(Source : tes-loicont-02)

Corrigé page 119

À un feu tricolore, le signal destiné aux piétons est vert pendant 45 secondes et rouge pendant 105 secondes, en alternance. À 12 heures, le feu se met au rouge et un piéton se présente à un instant au hasard entre 12 heures et 12 heures 05 pour traverser. La variable aléatoire T qui donne le temps écoulé, en secondes, entre 12 heures et l'heure d'arrivée du piéton suit une loi uniforme sur $[0; 300]$. Calculer la probabilité que le piéton :

- 1 trouve le feu vert et passe sans attendre.
- 2 attende que le feu passe au vert, mais pas plus de 15 secondes.
- 3 attende le feu vert plus de 30 secondes.

■ Exercice 4. La partie de jeu vidéo

★★★★☆

A

(Source : tes-loicont-01)

Corrigé page 120

Tous les soirs, Hugo joue en ligne avec son ami Igor entre 17h30 et 19h00. Caroline décide d'aller voir Hugo entre 17h00 et 18h00.

- 1 Quelle est la probabilité qu'elle dérange Hugo en pleine partie de jeu vidéo ?
- 2 Sachant qu'elle arrive après le début du jeu, quelle est la probabilité qu'elle arrive avant 17h55 ?

■ Exercice 5. La livraison à domicile

★★★★☆

A

(Source : tes-loicont-05)

Corrigé page 120

Madame Baute a commandé des chaussures sur un site Internet. Le jour de la livraison, elle reçoit un SMS lui signifiant que son colis sera livré assurément entre 10h00 et 12h00. On note X l'heure à laquelle elle reçoit son colis.

- 1 Quelle est la probabilité pour que son colis arrive avant 10h15 ?
- 2 Quelle est la probabilité pour que son colis arrive entre 10h30 et 11h00 ?
- 3 Sachant qu'à 11h15, elle n'a toujours pas reçu son colis, quelle est la probabilité pour qu'elle le reçoive avant 11h30 ?

Loi normale

■ Exercice 6. Les premiers mots de la vie

★★★★☆

R

(Source : tes-loicont-09)

Corrigé page 120

Un chercheur a étudié l'âge moyen auquel les premiers mots du vocabulaire apparaissent chez les jeunes enfants.

Une étude effectuée auprès de 1 000 jeunes enfants montrent que les premiers mots apparaissent en moyenne à 11,5 mois, avec un écart-type de 3,2 mois.

On suppose que la variable aléatoire représentant cet âge suit une loi normale.

- 1 Évaluer la proportion d'enfants ayant acquis leurs premiers mots avant 10 mois.
- 2 Évaluer la proportion d'enfants ayant acquis leurs premiers mots après 18 mois.
- 3 Évaluer la proportion d'enfants ayant acquis leurs premiers mots entre 8 mois et 12 mois.

■ Exercice 7. Vaches laitières de race « Française Frisonne Pis Noir »

★★★★☆

A

(Source : tes-loicont-06)

Corrigé page 121

La production laitière annuelle en litres des vaches laitières de la race FFPN peut être modélisée par une variable aléatoire à densité X de loi normale de moyenne $\mu = 6000$ et d'écart-type $\sigma = 400$.

On utilisera la calculatrice pour répondre aux questions suivantes et on donnera les résultats à 10^{-4} près.

- 1 Calculer la probabilité qu'une vache quelconque de cette race produise moins de 5 800 litres par an.
- 2 Calculer la probabilité qu'une vache quelconque de cette race produise entre 5 900 et 6 100 litres de lait par an.
- 3 Calculer la probabilité qu'une vache quelconque de cette race produise plus de 6 250 litres par an.
- 4 Déterminer la production maximale prévisible des 30 % de vaches les moins productives du troupeau.
- 5 Déterminer la production minimale prévisible des 20 % des vaches les plus productives.

■ Exercice 8. Test de conformité

★★★★☆

A

(Source : tes-loicont-08)

Corrigé page 121

Une usine fabrique des puzzles de 512 pièces. Pour tester la conformité des puzzles, le service qualité de l'entreprise prélève au hasard un puzzle de 512 pièces.

On appelle X la variable aléatoire qui, à un puzzle donné, associe le nombre de pièces non conformes. On estime que X suit la loi normale de moyenne 9 et d'écart-type 3.

- 1 Déterminer la probabilité qu'il y ait au plus 12 pièces non conformes dans le puzzle.
- 2 Déterminer le plus petit entier k tel que la probabilité que le puzzle comporte plus de k pièces non conformes soit inférieure à 0,01.

■ Exercice 9. Tests de Q.I.

★★★★☆ R

(Source : tes-loicont-10)

Corrigé page 121

En 1955, Wechler a proposé de mesurer le quotient intellectuel (Q.I.) des adultes à l'aide de deux échelles permettant de mesurer les compétences verbales et celles non verbales.

On compare le score global de la personne testée avec la distribution des scores obtenus par un échantillon représentatif de la population d'un âge donné, dont les performances suivent une loi normale ayant pour moyenne 100 et pour écart-type 15.

- 1 Quel est le pourcentage de personnes dont le Q.I. est inférieur à 80 ?
- 2 Quelle est la proportion de personnes ayant un Q.I. compris entre :
 - a. 100 et 110 ?
 - b. 90 et 100 ?
 - c. 105 et 110 ?
- 3 Un patient obtenant un Q.I. de 69 fait-il partie des 5 % inférieurs de la distribution ?
- 4 En dessous de quel Q.I. se trouve le tiers des individus ?
- 5 Quel Q.I. minimum faut-il obtenir pour faire partie des 5 % d'individus les plus performants ?

■ Exercice 10. Durée de vie d'un appareil

★★★★★ R

(Source : tes-loicont-07)

Corrigé page 122

La durée de vie d'un certain type d'appareil est modélisée par une variable aléatoire suivant une loi normale de moyenne et d'écart-type inconnus. Les spécifications impliquent que 80 % de la production des appareils ait une durée de vie entre 120 et 200 jours et que 5 % de la production ait une durée de vie inférieure à 120 jours.

- 1 Quelles sont les valeurs de la moyenne μ et de l'écart-type σ ?
- 2 Quelle est la probabilité d'avoir un appareil dont la durée de vie soit comprise entre 200 jours et 230 jours ?

Loi normale avec graphique

■ Exercice 11. Trouver la bonne courbe

(Source : tes-loicont-11)



Corrigé page 123

Lors d'un concours, deux lycées s'affrontent sur deux disciplines : Mathématiques et Histoire. À la fin des épreuves, chaque élève se voit attribuer une note sur 20 pour les deux disciplines.

On note respectivement M_1 et H_1 les variables aléatoires représentant les notes du premier lycée en Mathématiques et en Histoire. On note de même M_2 et H_2 celles du second lycée.

On admet que :

- M_1 suit la loi normale de moyenne 12 et d'écart-type 3 ;
- H_1 suit la loi normale de moyenne 14 et d'écart-type 2 ;
- M_2 suit la loi normale de moyenne 14 et d'écart-type 5 ;
- H_2 suit la loi normale de moyenne 12 et d'écart-type 4.

On a représenté ci-dessous les 4 courbes représentant les distributions des 4 variables aléatoires.



Attribuer à chaque courbe sa variable aléatoire.

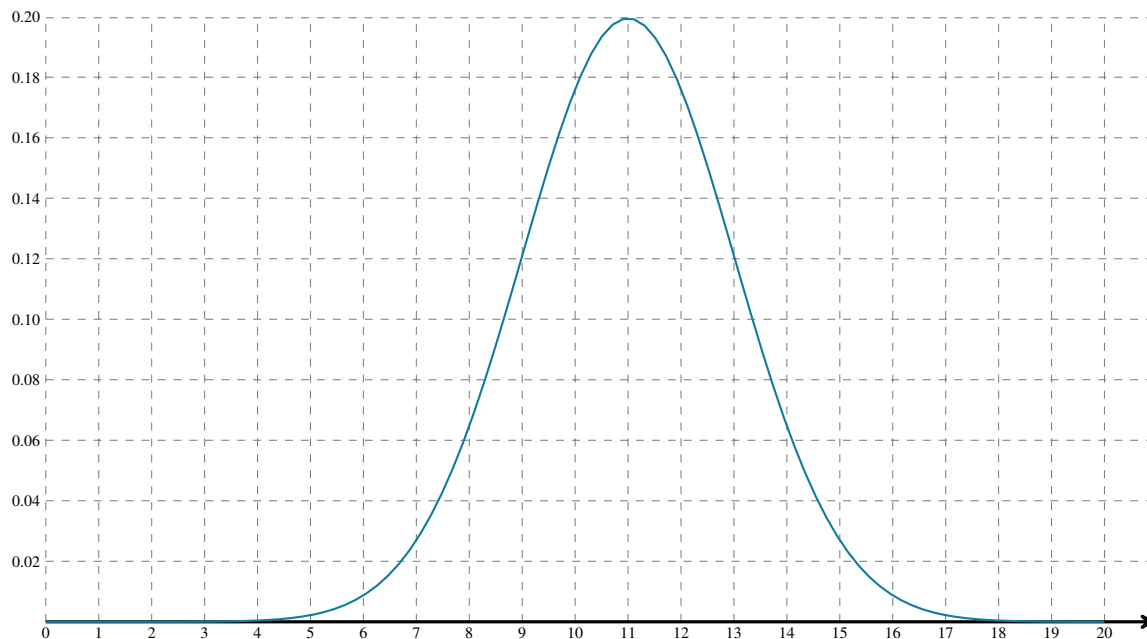
■ Exercice 12. Trouver la moyenne et l'écart-type

★★★★☆ R

(Source : tes-loicont-12)

Corrigé page 123

On a ci-dessous la fonction de répartition d'une variable aléatoire X suivant une loi normale.



- 1 Quelle est la moyenne μ de cette variable aléatoire ?
- 2 Déterminer, à l'aide du quadrillage, un intervalle $[a; b]$ centré en μ (c'est-à-dire dont le milieu est μ) tel que $P(a \leq X \leq b) \approx 0,95$.
- 3 En déduire une valeur approchée de σ , l'écart-type de X .

■ Corrigé de l'exercice 1.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

Rappelons que si X suit une loi uniforme sur $[a; b]$, alors :

$$P(c \leq X \leq d) = \frac{d - c}{b - a}.$$

- 1
- $P(3 \leq X \leq 5) = \frac{5 - 3}{14 - 1} = \frac{2}{13}$ car X suit une loi uniforme sur $[1; 14]$.
 - $P(3 \leq Y \leq 5) = \frac{5 - 3}{10 - 3} = \frac{2}{7}$ car Y suit une loi uniforme sur $[3; 10]$.

On constate que $P(3 \leq X \leq 5) < P(3 \leq Y \leq 5)$ donc sur cet unique critère, monsieur Leumateux a tout intérêt de choisir le supermarché A.

- 2
- $P(X \geq 8) = P(8 \leq X \leq 14) = \frac{14 - 8}{14 - 1} = \frac{6}{13}.$
 - $P(Y \geq 8) = P(8 \leq Y \leq 10) = \frac{10 - 8}{10 - 3} = \frac{2}{7}.$

Or,

$$\frac{6}{13} = \frac{6 \times 7}{13 \times 7} = \frac{42}{91}$$

et

$$\frac{2}{7} = \frac{2 \times 13}{7 \times 13} = \frac{26}{91}.$$

Ainsi, $P(X \geq 8) > P(Y \geq 8)$.

Sur ce critère, monsieur Leumateux a tout intérêt à choisir le supermarché B.

- 3
- Le temps d'attente moyen aux caisses du supermarché A est : $\mathbb{E}(X) = \frac{14 + 1}{2} = 7,5$ minutes.
 - Le temps d'attente moyen aux caisses du supermarché B est : $\mathbb{E}(X) = \frac{10 + 3}{2} = 6,5$ minutes.

Sur ce critère, monsieur Leumateux a tout intérêt de choisir le supermarché B.

■ Corrigé de l'exercice 2.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

- 1
- $$P(10 \leq X \leq 15) = \frac{15 - 10}{25 - 5} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}.$$

La probabilité que la durée de son trajet soit comprise entre 10 et 15 minutes est donc égale à 0,25.

2 $\mathbb{E}(X) = \frac{5+25}{2} = 15.$

La durée moyenne du trajet est donc égale à 15 minutes.

3 Notons ici Y le nombre de trajets où la durée est supérieure ou égale à 20 minutes.

Alors, Y suit la loi binomiale de paramètres $n = 5$ (car on considère 5 trajets indépendants) et

$$p = P(X \geq 20) = \frac{25-20}{20} = \frac{1}{4}.$$

$$\begin{aligned} P(Y \geq 1) &= 1 - P(Y = 0) \\ &= 1 - (1-p)^5 \\ &= 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^5 \\ &\approx 0,76. \end{aligned}$$

La probabilité pour qu'au moins un trajet dure plus de 20 minutes est donc égale à 0,76.

■ Corrigé de l'exercice 3.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

1 On cherche :

$$P((105 \leq T \leq 150) \cup (255 \leq T \leq 300)).$$

En effet, nous pouvons représenter la situation par le schéma suivant :



L'intervalle total « vert » a une amplitude de :

$$(150 - 105) + (300 - 255) = 45 + 45 = 90.$$

La probabilité demandée est alors :

$$P((105 \leq T \leq 150) \cup (255 \leq T \leq 300)) = \frac{90}{300} = \underline{0,3}.$$

2 Représentons sur un schéma ce que l'on veut à l'aide d'intervalles :



Pour que le piéton attende mais pas plus de 15 secondes, il doit arriver entre 90 secondes et 105 secondes après 12h00, ou entre 240 secondes et 255 secondes après 12h00.

Les deux intervalles ont une amplitude de 15 secondes, donc au total, 30 secondes.

La probabilité est donc :

$$\frac{30}{300} = \underline{0,1}.$$

3 La probabilité demandée est :

$$\begin{aligned} P(T \leq 75) \cup (150 \leq T \leq 225) &= \frac{75 + 75}{300} \\ &= \underline{0,5}. \end{aligned}$$

■ Corrigé de l'exercice 4.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

- 1 Appelons X la variable aléatoire représentant l'heure d'arrivée de Caroline (en heure décimale). Alors, X suit la loi uniforme sur $[17; 18]$.

On cherche $P(17,5 \leq X \leq 18)$ et, en appliquant la formule du cours, on obtient :

$$P(17,5 \leq X \leq 18) = \frac{18 - 17,5}{18 - 17}$$

$$P(17,5 \leq X \leq 18) = 0,5$$

- 2 C'est une probabilité conditionnelle que nous cherchons (« sachant que » nous donne une forte indication...); en tenant compte du fait que $17h55 = 18 - \frac{5}{60} = 18 - \frac{1}{12} \approx 17,92$, on cherche :

$$\begin{aligned} P_{(X \geq 17,5)}(17 \leq X \leq 17,92) &= \frac{P((17 \leq X \leq 17,92) \cap (X > 17,5))}{P(X > 17,5)} \\ &= \frac{P(17,5 \leq X \leq 17,92)}{P(X > 17,5)} \\ &= \frac{\frac{17,92 - 17,5}{18 - 17}}{\frac{18 - 17,5}{18 - 17}} \\ &= \frac{0,42}{0,5} \end{aligned}$$

$$P_{(X \geq 17,5)}(17 \leq X \leq 17,92) \approx 0,84$$

■ Corrigé de l'exercice 5.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

- 1 X suit la loi uniforme sur $[10; 12]$. Mais attention : quand on dit 10h15, il faut entendre $X = 10,25$ (soit 10h00 et un quart d'heure : $10 + \frac{1}{4} = 10 + 0,25 = 10,25$).

$$\text{Ainsi, } P(X \leq 10,25) = \frac{10,25 - 10}{12 - 10} = \frac{0,25}{2} = 0,125.$$

- 2 $P(10,5 \leq X \leq 11) = \frac{11 - 10,5}{12 - 10} = 0,25.$

- 3 $P_{(X \geq 11,25)}(X \leq 11,5) = \frac{P(11,25 \leq X \leq 11,5)}{P(X \geq 11,25)} = \frac{\frac{11,5 - 11,25}{12 - 10}}{\frac{12 - 11,25}{12 - 10}} = \frac{0,25}{0,75} = \frac{1}{3}.$

■ Corrigé de l'exercice 6.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

On choisit au hasard un jeune enfant et on note X l'âge (en mois) de ses premiers mots.

D'après l'énoncé, X suit la loi normale $\mathcal{N}(11,5; 3,2)$.

À la calculatrice, on trouve alors :

- 1 $P(X \leq 10) \approx 0,3196.$

Ainsi, il y a environ 31,96 % de jeunes enfants qui acquièrent leurs premiers mots avant 10 mois.

- 2 $P(X \geq 18) \approx 0,0211.$

Ainsi, il y a environ 2,11 % de jeunes enfants qui acquièrent leurs premiers mots après 18 mois.

3 $P(8 < X < 12) \approx 0,4250$.

Ainsi, il y a environ 42,5 % de jeunes enfants qui acquièrent leurs premiers mots entre 8 et 12 mois.

■ Corrigé de l'exercice 7.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

1 $P(X \leq 5800) \approx 0,3085$.

2 $P(5900 \leq X \leq 6100) \approx 0,1974$.

3 $P(X \geq 6250) \approx 0,2660$.

4 On cherche la valeur de x telle que $P(X \leq x) = 0,30$.

On trouve $x \approx 5790$ litres.

5 On cherche la valeur de x telle que $P(X \geq x) = 0,20$, soit $P(X \leq x) = 0,8$ (on est obligé de se ramener à cela pour pouvoir utiliser la calculatrice).

On trouve $x \approx 6337$ litres.

■ Corrigé de l'exercice 8.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

1 $P(X \leq 12) \approx 0,8413$ (à l'aide de la calculatrice).

2 On cherche k tel que $P(X \geq k) = 0,01$, soit $P(X \leq k) = 0,99$.

À l'aide de la calculatrice, on trouve $k = 16$.

■ Corrigé de l'exercice 9.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

On pose X la variable aléatoire représentant le Q.I. d'une personne prise au hasard.

X suit la loi normale $\mathcal{N}(100; 15)$ d'après l'énoncé.

à la calculatrice, on trouve alors :

1 $P(X < 80) \approx 0,0912$.

Il y a donc environ 9,12 % d'individus dont le Q.I. est inférieur à 80.

2 a. $P(100 < X < 110) \approx 0,2475$.

Il y a donc environ 24,75 % d'individus dont le Q.I. est compris entre 100 et 110.

b. $P(90 < X < 100) = P(100 < X < 110)$ car la courbe est symétrique par rapport à la moyenne, donc à 100 ici.

Il y a donc environ 24,75 % d'individus dont le Q.I. est compris entre 90 et 100.

c. $P(105 < X < 110) \approx 0,1169$.

Il y a donc environ 11,69 % d'individus dont le Q.I. est compris entre 105 et 110.

3 Ici, on cherche l'entier n tel que $P(X \leq n) = 0,05$.

La calculatrice nous donne $n \approx 75$. Donc si l'on a un Q.I. inférieur à 75, ce qui est le cas ici (Q.I. = 69), on appartient aux 5 % inférieurs de la population.

4 Ici, on cherche l'entier n tel que $P(X \leq n) = 0,33$.

La calculatrice nous donne $n \approx 93$.

5 On cherche ici l'entier n tel que $P(X \leq n) = 0,95$.

La calculatrice nous donne $n = 125$.

■ Corrigé de l'exercice 10.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

1 Notons X la variable aléatoire représentant la durée de vie de l'appareil.

Posons alors $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$.

D'après le cours, Z suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0; 1)$.

- D'après l'énoncé, $P(X \leq 120) = 0,05$ donc :

$$P\left(Z \leq \frac{120 - \mu}{\sigma}\right) = 0,05. \quad (\text{VIII.1})$$

À l'aide de la calculatrice, on trouve alors que :

$$\frac{120 - \mu}{\sigma} = -1,65,$$

soit :

$$120 - \mu = -1,65\sigma,$$

que l'on peut écrire :

$$\mu = 120 + 1,65\sigma. \quad (\text{VIII.2})$$

- De plus, on a $P(120 \leq X \leq 200) = 0,8$, ce qui signifie que :

$$P\left(\frac{120 - \mu}{\sigma} \leq Z \leq \frac{200 - \mu}{\sigma}\right) = 0,8. \quad (\text{VIII.3})$$

Des égalités [VIII.1](#) et [VIII.3](#), on déduit que :

$$P\left(Z \leq \frac{120 - \mu}{\sigma}\right) + P\left(\frac{120 - \mu}{\sigma} \leq Z \leq \frac{200 - \mu}{\sigma}\right) = P\left(Z \leq \frac{200 - \mu}{\sigma}\right) = 0,85.$$

À l'aide de la calculatrice, on trouve alors que :

$$\frac{200 - \mu}{\sigma} = 1,04,$$

soit $200 - \mu = 1,04\sigma$, que l'on peut écrire :

$$\mu = 200 - 1,04\sigma. \quad (\text{VIII.4})$$

Les égalités [VIII.2](#) et [VIII.4](#) nous permettent d'écrire alors :

$$120 + 1,65\sigma = 200 - 1,04\sigma,$$

soit :

$$2,69\sigma = 80,$$

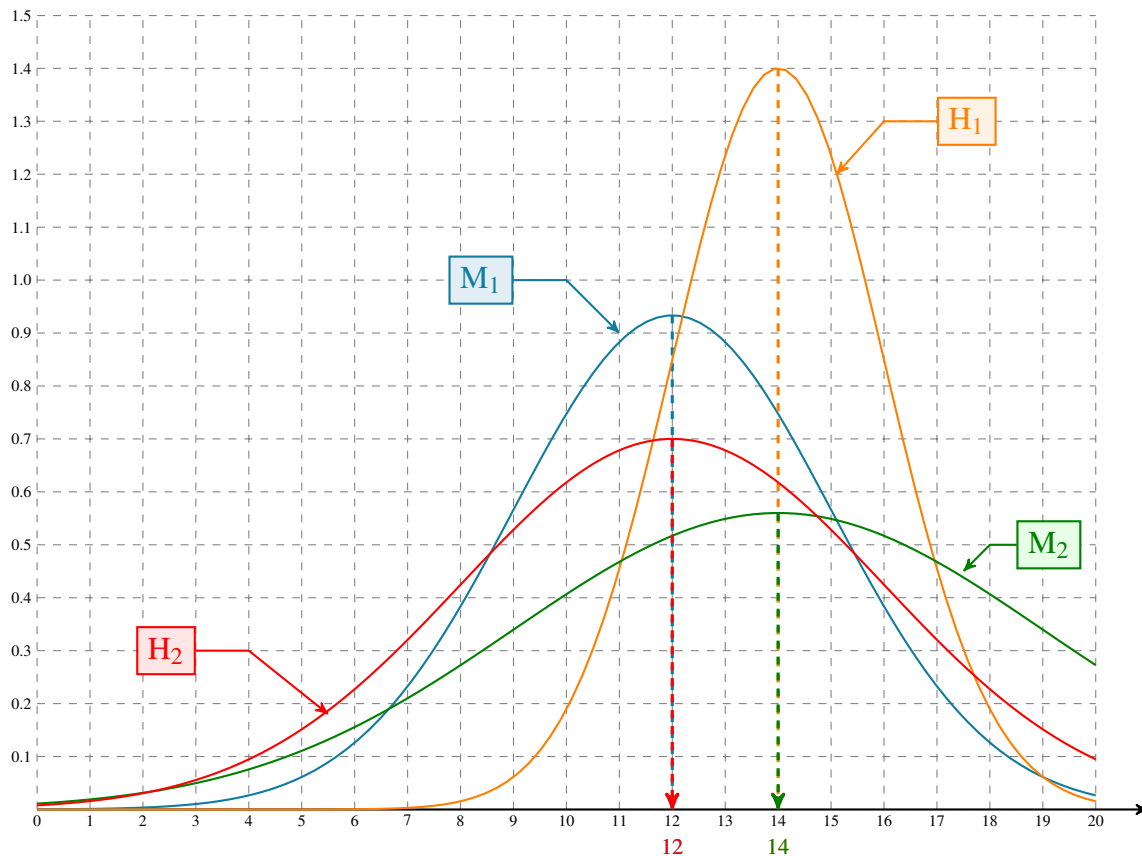
ou encore :

$$\sigma = \frac{80}{2,69} \approx 29,74 \text{ (soit } \sigma^2 \approx 884).$$

Ainsi, $\mu \approx 120 + 1,65 \times 29,74 \approx 169$.

X suit donc la loi normale $\mathcal{N}(169; 884)$.

2 À la calculatrice, on trouve : $P(200 \leq X \leq 230) \approx 0,13$.

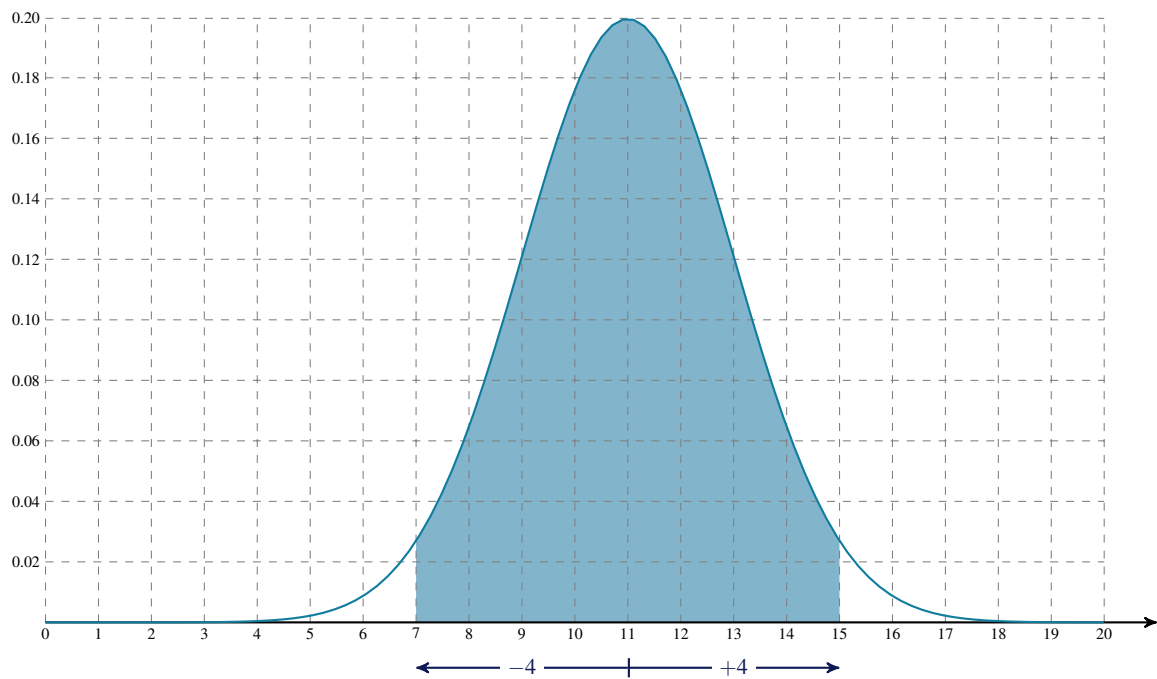


- On regarde en premier l'axe de symétrie des courbes : ils correspondent aux moyennes.
Ainsi, les courbes verte et orange correspondent à une variable aléatoire dont la moyenne est égale à 14 ; elles ne peuvent donc que représenter H_1 et M_2 .
Les deux autres courbes représentent donc M_1 et H_2 .
- On regarde ensuite « l'écartement » des courbes : plus il est grand, plus l'écart-type est grand.
Ainsi, si l'on compare les courbes verte et orange, c'est la verte qui a le plus grand « écartement » donc elle correspond à M_2 ; la courbe orange est donc pour H_1 .
- Les courbes bleue et rouge ont un « écartement » similaire en apparence mais ce n'est pas le cas car le sommet de la bleue est au-dessus de celui de la rouge, ce qui signifie que son écartement est plus petit (elle est plus affinée). La courbe bleue correspond donc à M_1 et donc la rouge correspond à H_2 .

- 1 On regarde l'axe de symétrie de la courbe : il passe par 11, donc $\mu = 11$.
- 2 Un carreau du quadrillage représente 0,02 unité. Il faut donc trouver un intervalle centré en 11 sur lequel l'aire sous la courbe admet $\frac{0,95}{0,02} = 47,5$ de ces carreaux.

Il suffit alors de compter à droite de 11 et sous la courbe un peu moins de 24 carreaux (la moitié de 47,5 étant égale à 23,75). On va alors jusqu'à 15.

Ainsi, sur $[7; 15]$, il y a 47,5 de ces carreaux :



On peut donc considérer que $P(7 \leq X \leq 15) \approx 0,95$.

3 D'après le cours,

$$P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 0,95$$

ainsi, d'après ce que nous avons écrit précédemment,

$$2\sigma \approx 4 \quad \text{donc} \quad \underline{\underline{\sigma \approx 2.}}$$

Intervalle de fluctuation et estimation

Disponible sur <http://www.mathweb.fr>

A Exercices d'application du cours

R Exercices de réflexion

✌ Exercice & corrigé relus avec attention pour éviter les erreurs

12 juin 2018

Intervalle de fluctuation

■ Exercice 1. Les tickets du supermarché

★★★★☆ **R**

Corrigé page 127 ✌

(Source : tes-fluct-01)

Un supermarché distribue à tous ses clients un ticket à gratter. Le patron de ce supermarché affirme que 30 % des tickets donnent droit à un bon d'achat de 50 €. Ces tickets seront qualifiés de *gagnants*.

Sur 150 clients choisis au hasard, 43 possèdent un ticket *gagnant*.

Doit-on remettre en cause l'affirmation du patron de ce supermarché ?

■ Exercice 2. Contrôle de production

★★★★☆ **R**

Corrigé page 127 ✌

(Source : tes-fluct-02)

Dans une usine de fabrication de calculatrices se trouvent deux chaînes de production, notées A et B. Les statistiques montrent que sur les cinq dernières années, 3 % des calculatrices fabriquées sur la chaîne A sont défectueuses, contre 2 % pour la chaîne B.

On prélève au hasard dans le stock de l'usine 50 calculatrices fabriquées par la chaîne A et 75 calculatrices fabriquées par la chaîne B.

On constate que 3 fabriquées par la chaîne A sont défectueuses, contre 4 fabriquées par la chaîne B.

Doit-on régler à nouveau les chaînes de production A et B ?

■ Exercice 3. Scénario catastrophe

★★★★☆ **R**

Corrigé page 129 ✌

(Source : tes-fluct-03)

Nous sommes en 2078. Une épidémie fait rage, touchant 9 personnes sur 10. On peut donc parler de pandémie. Le virus M_A -TH s'étend sur tous les continents.

Mais le Dr Marisol Ution pense avoir un remède contre le virus à l'origine de cette catastrophe, ce remède agissant en moins d'une semaine. Elle décide donc de le tester sur un village de 2 500 habitants.

Elle remarque qu'une semaine après injection du remède, sur la totalité du village, 2 223 personnes sont contaminées.

Le remède de Marisol semble-t-il fonctionner ?

Intervalle de confiance

■ Exercice 4. Extrait du bac 2016, Métropole

★★★★☆ R

(Source : tes-fluct-04)

Corrigé page 129

Un organisme de formation désire estimer la proportion de stagiaires satisfaits de la formation reçue au cours de l'année 2013. Pour cela, il interroge un échantillon représentatif de 300 stagiaires. On constate que 225 sont satisfaits.

Alors, un intervalle de confiance au niveau de confiance 0,95 de la proportion de stagiaires satisfaits de la formation reçue au cours de l'année 2013 est :

- 1 [0,713;0,771] 2 [0,692;0,808] 3 [0,754;0,813] 4 [0,701;0,799]

■ Exercice 5. Extrait du bac 2016, Amérique du Nord

★★★★☆ R

(Source : tes-fluct-05)

Corrigé page 129

Lors d'un sondage, 53,5 % des personnes interrogées ont déclaré qu'elles voteront pour le candidat A aux prochaines élections.

L'intervalle de confiance au seuil de 95 % donné par l'institut de sondage est [51 % ; 56 %].

Le nombre de personnes qui ont été interrogées est alors :

- 1 40 2 400 3 1 600 4 6 400

■ Exercice 6. Le retour de Marisol

★★★★☆ R

(Source : tes-fluct-06)

Corrigé page 130

Nous sommes toujours en 2078 (voir exercice intitulé « Scénario catastrophe » page 125).

Le Dr Marisol Ution se bat toujours contre le virus M_A -TH qui touche 9 personnes sur 10 dans le monde.

Elle a amélioré son précédent remède et l'a testé sur les 1 500 habitants d'un village non testé.

Une semaine après injection de son remède, 70 % des villageois sont toujours contaminés.

Déterminer un intervalle de confiance au seuil de 95 % de la proportion de personnes contaminés par le virus M_A -TH après injection du remède de Marisol.

■ Corrigé de l'exercice 1.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

Posons $p = 0,3$ et $n = 150$. Alors,

$$n \geq 30, \quad np = 45 \geq 5 \quad \text{et} \quad n(1-p) = 105 \geq 5$$

donc l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence de tickets gagnants est :

$$\begin{aligned} I &= \left[p - 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}; p + 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right] \\ &= \left[0,3 - 1,96\sqrt{\frac{0,3 \times 0,7}{150}}; 0,3 + 1,96\sqrt{\frac{0,3 \times 0,7}{150}} \right] \\ &\approx [0,227; 0,373]. \end{aligned}$$

La fréquence observée des tickets gagnants sur notre échantillon de 150 personnes est :

$$f = \frac{43}{150} \approx 0,287.$$

Ainsi, $f \in I$. Par conséquent, nous pouvons accepter l'affirmation du patron du supermarché au risque de se tromper de 5 % (consistant à dire que 30 % des tickets sont gagnants).

■ Corrigé de l'exercice 2.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

• Pour la chaîne A.

$n = 50 \geq 30$ et $p = 0,03$ donc $np = 15 \geq 5$ et $n(1-p) = 48,5 \geq 5$ donc l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence de calculatrices défectueuses est :

$$\begin{aligned} I_A &= \left[p - 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}; p + 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right] \\ &= \left[0,03 - 1,96\sqrt{\frac{0,03 \times 0,97}{50}}; 0,03 + 1,96\sqrt{\frac{0,03 \times 0,97}{50}} \right] \\ &\approx [-0,017; 0,077]. \end{aligned}$$

La fréquence observée des calculatrices défectueuses sur notre échantillon de 50 calculatrices est :

$$f = \frac{3}{50} = 0,06 \in I_A.$$

Ainsi, la chaîne A n'a pas de raison d'être réglée à nouveau.

- **Pour la chaîne B.**

$n = 75 \geq 30$ et $p = 0,02$ donc $np = 15 \geq 5$ et $n(1-p) = 73,5 \geq 5$ donc l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence de calculatrices défectueuses est :

$$\begin{aligned} I_B &= \left[p - 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}; p + 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right] \\ &= \left[0,02 - 1,96\sqrt{\frac{0,02 \times 0,98}{75}}; 0,02 + 1,96\sqrt{\frac{0,02 \times 0,98}{75}} \right] \\ &\approx [-0,011; 0,051]. \end{aligned}$$

La fréquence observée des calculatrices défectueuses sur notre échantillon de 75 calculatrices est :

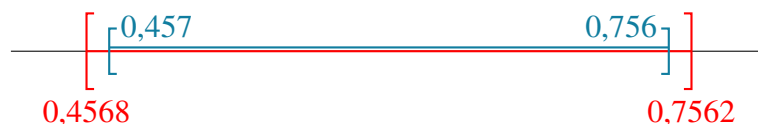
$$f = \frac{4}{75} \approx 0,053 \notin I_B.$$

Ainsi, on peut accepter au seuil de 95 % l'hypothèse selon laquelle la chaîne B doit être réglée à nouveau.

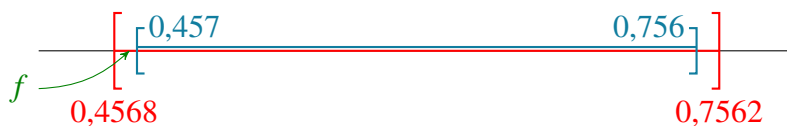
Remarque : quand on calcule les bornes de l'intervalle de fluctuation asymptotique, il ne faut pas arrondir les résultats comme on a l'habitude de le faire.

Par exemple, pour la borne inférieure, si la calculatrice donne : « 0,4568 », on devra écrire « 0,456 » (donc ici, **on arrondit la borne inférieure par défaut**) ; pour la borne supérieure, si la calculatrice donne : « 0,7562 », on devra écrire « 0,757 » (donc **on arrondit la borne supérieure par excès**).

En effet, il est préférable d'écrire un intervalle légèrement plus grand que le véritable intervalle. Voyons pourquoi : imaginons que l'intervalle représenté en rouge ci-dessous soit le véritable intervalle de fluctuation. Alors, si on arrondissait comme d'habitude, on aurait l'intervalle bleu :



Mais si la fréquence observée est, par exemple, égale à $f = 0,4569$, notre conclusion serait que $f \notin I$ alors qu'en vraie, $f \in I$!



On voit donc ici que notre conclusion serait erronée et ça, c'est pas cool du tout... C'est la raison pour laquelle il faudra faire attention à la façon dont vous arrondirez vos bornes à l'avenir car même les enseignants peuvent se tromper (même si au final, il est rare d'avoir des cas aussi litigieux dans les exercices).

■ Corrigé de l'exercice 3.[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

Posons $p = 0,9$ la proportion de personnes touchées par le virus et $n = 2\,500$ la taille de notre échantillon.

$$n \geq 30 \quad ; \quad np = 2\,250 \geq 5 \quad ; \quad n(1-p) = 250 \geq 5.$$

L'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence de personnes infectées est alors :

$$I = \left[0,9 - 1,96\sqrt{\frac{0,9 \times 0,1}{2\,500}} ; 0,9 + 1,96\sqrt{\frac{0,9 \times 0,1}{2\,500}} \right] = [0,88824 ; 0,91176].$$

La fréquence observée de personnes contaminées par le virus après injection du remède est :

$$f = \frac{2\,223}{2\,500} \approx 0,8892 \in I.$$

Par conséquent, cette fréquence est conforme aux statistiques initiales au seuil de 95 %, ce qui signifie que le remède n'a pas l'effet escompté. Pas de bol Marisol !

■ Corrigé de l'exercice 4.[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

Posons $f = \frac{225}{300} = 0,75$ la fréquence observée de stagiaires satisfaits sur les $n = 300$ interrogés. Alors,

$$n \geq 30 \quad ; \quad nf = 225 \geq 30 \quad ; \quad n(1-f) = 75 \geq 50$$

donc un intervalle de confiance au seuil de 95 % de la proportion de stagiaires satisfaits est :

$$I = \left[f - \frac{1}{\sqrt{n}} ; f + \frac{1}{\sqrt{n}} \right] \approx [0,692265 ; 0,807735]$$

Remarquez que dans le sujet de ce baccalauréat, les concepteurs se sont trompés dans les arrondis (encore !).

En effet, l'intervalle est : $[0,693 ; 0,808]$ si l'on arrondit convenablement (voir remarque faite dans la correction page 128).

■ Corrigé de l'exercice 5.[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

L'intervalle de confiance est :

$$I = \left[0,535 - \frac{1}{\sqrt{n}} ; 0,535 + \frac{1}{\sqrt{n}} \right] = [0,51 ; 0,56].$$

Donc

$$\begin{aligned} 0,535 - \frac{1}{\sqrt{n}} = 0,51 &\iff 0,535 - 0,51 = \frac{1}{\sqrt{n}} \\ &\iff 0,025 = \frac{1}{\sqrt{n}} \\ &\iff \frac{1}{0,025} = \sqrt{n} \\ &\iff 40 = \sqrt{n} \\ &\iff 40^2 = n \\ &\iff \underline{n = 1\,600}. \end{aligned}$$

■ **Corrigé de l'exercice 6.**

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

$$n = 1\,500 \geq 30 \quad , \quad nf = 1\,500 \times 0,7 = 1\,050 \geq 30 \quad \text{et} \quad n(1 - f) = 450 \geq 30$$

donc un intervalle de confiance au seuil de 95 % de la proportion de personnes contaminées est :

$$I = \left[0,7 - \frac{1}{\sqrt{1\,500}} ; 0,7 + \frac{1}{\sqrt{1\,500}} \right] = [0,6242 ; 0,7258]$$

Cela signifie que le pourcentage de personnes contaminées par le virus M_A-TH après injection du nouveau remède est compris entre 62,42 % et 72,58 %, avec un risque de 5 % de se tromper.



Deuxième partie

Enseignement de spécialité

Matrices

Disponible sur <http://www.mathweb.fr>

A Exercices d'application du cours

R Exercices de réflexion

✌ Exercice & corrigé relus avec attention pour éviter les erreurs

12 juin 2018

Calculs matriciels

■ Exercice 1. Somme et différence de matrices

★★★★☆ **A**

Corrigé page 136 ✌

(Source : tes-spe-matrices-01)

Effectuer les opérations suivantes sans calculatrice :

1 $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 7 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

2 $\begin{pmatrix} 0 & -7 \\ 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ -2 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

■ Exercice 2. Produit de matrices

★★★★☆ **A**

Corrigé page 136 ✌

(Source : tes-spe-matrices-02)

Effectuer les opérations suivantes sans calculatrice :

1 $(1 \quad -1 \quad 0) \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

6 $\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

2 $(2 \quad -1 \quad 1) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

7 $\begin{pmatrix} 1 & 9 \\ -9 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ -1 & 8 \end{pmatrix}$

3 $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix}$

8 $\begin{pmatrix} 8 & 1 \\ -1 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ -9 & 1 \end{pmatrix}$

4 $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$

9 $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

5 $\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

10 $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$

■ Exercice 3. Recherche de matrices

★★★★☆ R

(Source : tes-spe-matrices-03)

Corrigé page 137

Soient $A = \begin{pmatrix} k & 1 \\ -1 & k \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & a \\ b & 1 \end{pmatrix}$.

1 Montrer que $A \times B = \begin{pmatrix} k+b & 1+ak \\ kb-1 & k-a \end{pmatrix}$ et que $B \times A = \begin{pmatrix} k-a & 1+ak \\ kb-1 & b+k \end{pmatrix}$.

2 Trouver une condition sur a et b pour que $A \times B = B \times A$.

Inverse de matrices

■ Exercice 4. Avec la calculatrice

☆☆☆☆☆ A

(Source : tes-spe-matrices-04)

Corrigé page 138

À l'aide de votre calculatrice, trouver l'inverse des matrices suivantes (si elle existe) :

1 $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

3 $C = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$

5 $E = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

2 $B = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

4 $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

6 $F = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

■ Exercice 5. Est-elle son inverse ?

☆☆☆☆☆ A

(Source : tes-spe-matrices-05)

Corrigé page 138

Pour chacune des questions suivantes, dire si B est l'inverse de A . On pourra s'aider de la calculatrice.

1 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ -1 & 5 & 3 \\ 5 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

2 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

■ Exercice 6. Matrice avec paramètre

★★★★☆ R

(Source : tes-spe-matrices-06)

Corrigé page 138

Une matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est inversible si et seulement si $ad - bc \neq 0$ (résultat admis et non exigible pour le bac).

On considère la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ a+1 & a \end{pmatrix}.$$

Pour quelles valeurs de a cette matrice n'est pas inversible ?

Systèmes linéaires

■ Exercice 7. Résolution de systèmes linéaires

★★★★☆ A

(Source : tes-spe-matrices-07)

Corrigé page 138

Résoudre les systèmes suivants en utilisant les matrices.

$$1 \quad \begin{cases} 3x - 5y = 2 \\ 7x + 3y = 5 \end{cases}$$

$$2 \quad \begin{cases} 5x + y = -1 \\ x - 5y = 1 \end{cases}$$

■ Exercice 8. Trouver les coefficients d'un polynôme

★★★★☆ A

(Source : tes-spe-matrices-08)

Corrigé page 139

On considère le polynôme suivant :

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

où a , b et c sont trois nombres réels.

On sait que les points $A(-1; 2)$, $B(2; -1)$ et $C(3; -1)$ sont sur la courbe représentative de f .
Déterminer les valeurs de a , b et c .

■ Exercice 9. Trouver les coefficients d'une fonction

★★★★☆ A

(Source : tes-spe-matrices-09)

Corrigé page 140

On considère la fonction suivante :

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

On sait que $f(1) = 0$, $f(2) = 1$, $f(3) = 4$ et $f(4) = 3$.

Trouver les valeurs de a , b , c et d .

■ Exercice 10. Modèle fermé de Léontief

★★★★☆ A

(Source : tes-spe-matrices-10)

Corrigé page 140

Dans un pays imaginaire, l'économie repose sur trois secteurs : industrie, services et électricité. Pour pouvoir fonctionner, chaque secteur nécessite l'utilisation d'une partie de la production des deux autres secteurs et d'une partie de sa propre production.

Ces échanges durant une année sont résumées dans le tableau des entrées-sorties ci-dessous :

	Industrie	Services	Électricité
Industrie	0,3	0,3	0,3
Services	0,4	0,1	0,5
Électricité	0,3	0,6	0,2

Ce modèle est dit *fermé* car on suppose qu'il n'existe aucun échange avec l'extérieur.

Cette économie est dite *équilibrée* si la production totale de chaque secteur est égale à sa consommation totale.

On se propose de déterminer la production de chaque secteur afin que l'économie soit équilibrée.

On note x , y et z le nombre d'unités produites respectivement par les secteurs de l'industrie, des services et de l'électricité.

1 Expliquer pourquoi l'économie est équilibrée si et seulement si on a $A \times P = P$, où A est une matrice qu'on explicitera et $P = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

2 Expliquer pourquoi résoudre $A \times P = P$ revient à résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} -0,7x + 0,3y + 0,3z = 0 \\ 0,4x - 0,9y + 0,5z = 0 \\ 0,3x + 0,6y - 0,8z = 0 \end{cases}$$

3 Le logiciel Xcas affiche ceci lorsqu'on lui demande de résoudre ce dernier système :

<code>insolve([-0.7x+0.3y+0.3z=0,0.4x-0.9y+0.5z=0,0.3x+0.6y-0.8z=0],[x,y,z])</code>
<code>[0.823529411765*z , 0.921568627451*z , z]</code>

Expliquer cet affichage.

4 Pour une production de 10 000 unités d'électricité, combien les secteurs de l'industrie et des services doivent-ils produire d'unités pour que l'économie soit équilibrée (on arrondira à l'unité) ?

■ Corrigé de l'exercice 1.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

$$1 \quad \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 7 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+(-3) & -3+(-1) \\ 7+2 & 2+(-1) \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}}$$

$$2 \quad \begin{pmatrix} 0 & -7 \\ 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ -2 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0-3 & -7-7 \\ 2-(-2) & -1-2 \\ 3-(-2) & -1-1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -3 & -14 \\ 4 & -3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}}$$

■ Corrigé de l'exercice 2.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

$$1 \quad (1 \quad -1 \quad 0) \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = (1 \times 2 + (-1) \times (-1) + 0 \times 1) \\ = (2 + 1 + 0) \\ = \boxed{(3)}$$

$$2 \quad (2 \quad -1 \quad 1) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = (2 \times 1 + (-1) \times 2 + 1 \times (-1) \quad 2 \times (-1) + (-1) \times (-2) + 1 \times 1) \\ = \boxed{(-1 \quad 1)}$$

$$3 \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 9 + (-2) \times 8 + (-3) \times 7 \\ 2 \times 9 + (-1) \times 8 + 3 \times 7 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 9 - 16 - 21 \\ 18 - 8 + 21 \end{pmatrix} \\ = \boxed{\begin{pmatrix} -28 \\ 31 \end{pmatrix}}$$

$$4 \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 4 + (-1) \times (-3) \\ 3 \times 4 + 5 \times (-3) \end{pmatrix} \\ = \boxed{\begin{pmatrix} 7 \\ -3 \end{pmatrix}}$$

$$\begin{aligned} 5 \quad \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -2 \times 1 + 5 \times 3 \\ 2 \times 1 + (-1) \times 3 \end{pmatrix} \\ &= \boxed{\begin{pmatrix} 13 \\ -1 \end{pmatrix}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6 \quad \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -2 \times 1 + 5 \times 0 & -2 \times 0 + 5 \times 1 \\ 2 \times 1 + (-1) \times 0 & 2 \times 0 + (-1) \times 1 \end{pmatrix} \\ &= \boxed{\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 7 \quad \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ -9 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ -1 & 8 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \times 8 + 9 \times (-1) & 1 \times 1 + 9 \times 8 \\ -9 \times 8 + 1 \times (-1) & -9 \times 1 + 1 \times 8 \end{pmatrix} \\ &= \boxed{\begin{pmatrix} -1 & 73 \\ -73 & -1 \end{pmatrix}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 8 \quad \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ -1 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ -9 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 8 \times 1 + 1 \times (-9) & 8 \times 9 + 1 \times 1 \\ -1 \times 1 + 8 \times (-9) & -1 \times 9 + 8 \times 1 \end{pmatrix} \\ &= \boxed{\begin{pmatrix} -1 & 73 \\ -73 & -1 \end{pmatrix}} \end{aligned}$$

Remarque : dans ces deux dernières questions, en posant $A = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ -1 & 8 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ -9 & 1 \end{pmatrix}$, on peut s'apercevoir que $A \times B = B \times A$, ce qui n'est pas du tout commun dans le monde des matrices ! En effet, dans un cas général, $AB \neq BA$. Mais les matrices que nous avons ici sont particulières, et c'est pour cela que leur produit est *commutatif*.

$$\begin{aligned} 9 \quad \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -1 \times 0 + 1 \times 1 & -1 \times 1 + 1 \times 1 \\ 1 \times 0 + 0 \times 1 & 1 \times 1 + 0 \times 1 \end{pmatrix} \\ &= \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 10 \quad \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -2 \times (-1) + 1 \times (-1) & -2 \times (-1) + 1 \times (-2) \\ 1 \times (-1) + (-1) \times (-1) & 1 \times (-1) + (-1) \times (-2) \end{pmatrix} \\ &= \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} \end{aligned}$$

■ Corrigé de l'exercice 3.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

$$\begin{aligned} 1 \quad A \times B &= \begin{pmatrix} k & 1 \\ -1 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a \\ b & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \times 1 + 1 \times b & k \times a + 1 \times 1 \\ -1 \times 1 + k \times b & -1 \times a + k \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k+b & ak+1 \\ kb-1 & k-a \end{pmatrix}. \\ B \times A &= \begin{pmatrix} 1 & a \\ b & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k & 1 \\ -1 & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times k + a \times (-1) & 1 \times 1 + a \times k \\ b \times k + 1 \times (-1) & b \times 1 + 1 \times k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k-a & ak+1 \\ kb-1 & k+b \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

2 Pour que $A \times B = B \times A$, il faut que les coefficients de la première soient égaux à ceux de la seconde.

Or, il y en a déjà deux qui sont égaux (les deux de la diagonale principale : $bk - 1$ et $1 + ak$).

Il faut donc que $k + b = k - a$, soit $\underline{b = -a}$ (ou $a = -b$, c'est pareil...).

■ Corrigé de l'exercice 4.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

$$1 \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$3 \quad C^{-1} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -5 & -3 \end{pmatrix}$$

$$5 \quad E^{-1} \text{ n'existe pas.}$$

$$2 \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$4 \quad D^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$6 \quad F^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

■ Corrigé de l'exercice 5.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

$$1 \quad AB = BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3 \text{ dont } B = A^{-1}.$$

$$2 \quad AB = BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3 \text{ dont } B = A^{-1}.$$

■ Corrigé de l'exercice 6.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

D'après l'énoncé, $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ a+1 & a \end{pmatrix}$ n'est pas inversible si et seulement si :

$$a \times a - (a+1) \times 1 \neq 0$$

c'est-à-dire si et seulement si :

$$a^2 - a - 1 \neq 0.$$

Le discriminant du polynôme $a^2 + a + 1$ est :

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 5.$$

Il admet donc deux racines :

$$a_1 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad a_2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Ainsi, A n'est pas inversible si et seulement si $a = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$ ou $a = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$.

■ Corrigé de l'exercice 7.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

$$1 \quad \begin{cases} 3x - 5y = 2 \\ 7x + 3y = 5 \end{cases} \text{ Le système s'écrit de façon matricielle :}$$

$$AX = B \quad , \quad \text{avec } A = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Ainsi,

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} \frac{31}{44} \\ \frac{1}{44} \end{pmatrix}$$

$$\text{D'où } S = \left\{ \left(\frac{31}{44}; \frac{1}{44} \right) \right\}$$

2 $\begin{cases} 5x + y = -1 \\ x - 5y = 1 \end{cases}$. Le système s'écrit de façon matricielle :

$$AX = B, \quad \text{avec } A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi,

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} -\frac{2}{13} \\ -\frac{3}{13} \end{pmatrix}$$

$$\text{D'où } S = \left\{ \left(-\frac{1}{13}; -\frac{3}{13} \right) \right\}$$

■ Corrigé de l'exercice 8.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

- $A(-1; 2) \in \mathcal{C}_f$ signifie que $f(-1) = 2$ et donc que :

$$a \times (-1)^2 + b \times (-1) + c = 2 \quad \text{soit} \quad \underline{a - b + c = 2}.$$

- $B(2; -1) \in \mathcal{C}_f$ signifie que $f(2) = -1$ et donc que :

$$a \times 2^2 + b \times 2 + c = -1 \quad \text{soit} \quad \underline{4a + 2b + c = -1}.$$

- $C(3; -1) \in \mathcal{C}_f$ signifie que $f(3) = -1$ et donc que :

$$a \times 3^2 + b \times 3 + c = -1 \quad \text{soit} \quad \underline{9a + 3b + c = -1}.$$

On doit donc résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} a - b + c = 2 \\ 4a + 2b + c = -1 \\ 9a + 3b + c = -1 \end{cases}$$

qui s'écrit de façon matricielle :

$$AX = B, \quad \text{avec } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Ainsi,

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{5}{4} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\text{et donc } \boxed{a = \frac{1}{4}, b = -\frac{5}{4}, c = \frac{1}{2}}.$$

■ Corrigé de l'exercice 9.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

- $f(1) = 0 \iff a + b + c + d = 0,$
- $f(2) = 1 \iff 8a + 4b + 2c + d = 1,$
- $f(3) = 4 \iff 27a + 9b + 3c + d = 4$
- $f(4) = 3 \iff 64a + 16b + 4c + d = 3.$

On doit alors résoudre le système matriciel suivant :

$$AX = B \text{ avec } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 8 & 4 & 2 & 1 \\ 27 & 9 & 3 & 1 \\ 64 & 16 & 4 & 1 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

On trouve :

$$X = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ -13 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, $f(x) = -x^3 + 7x^2 - 13x + 7$.

■ Corrigé de l'exercice 10.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

1 On atteint la stabilité de l'économie si :

$$\begin{cases} 0,3x + 0,3y + 0,3z = x \\ 0,4x + 0,1y + 0,5z = y \\ 0,3x + 0,6y + 0,2z = z \end{cases}$$

d'après le tableau donné, ce qui s'écrit de façon matricielle ainsi :

$$A \times P = P \quad \text{avec } A = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,3 & 0,3 \\ 0,4 & 0,1 & 0,5 \\ 0,3 & 0,6 & 0,2 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

2 La système $\begin{cases} 0,3x + 0,3y + 0,3z = x \\ 0,4x + 0,1y + 0,5z = y \\ 0,3x + 0,6y + 0,2z = z \end{cases}$ est équivalent, si on met les x, y et z à gauche, au système suivant :

$$\begin{cases} -0,7x + 0,3y + 0,3z = 0 \\ 0,4x - 0,9y + 0,5z = 0 \\ 0,3x + 0,6y - 0,8z = 0 \end{cases}$$

3 L'affichage met en valeur le fait que le système admet une infinité de solutions car on voit que la première et la deuxième solution sont exprimées en fonction de la troisième (z).

4 Ici, $z = 10000$ donc $x \approx 0,8235 \times 10000 \approx 8235$ et $y \approx 0,9216 \times 10000 \approx 9216$ (pour ces calculs, on se sert de l'affichage de Xcas).

Graphes non orientés

Disponible sur <http://www.mathweb.fr>

A Exercices d'application du cours

R Exercices de réflexion

👉 Exercice & corrigé relus avec attention pour éviter les erreurs

12 juin 2018

Chaînes et cycles eulériens

■ Exercice 1. Les maisons

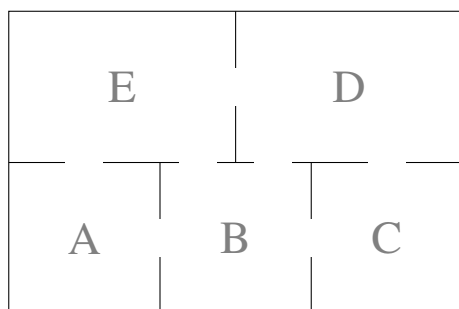
★★★★☆

A

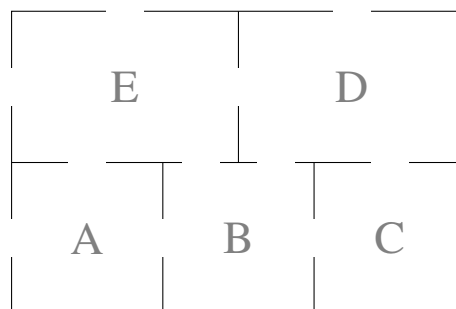
(Source : tes-spe-graphesNO-01)

Corrigé page 145 👉

Est-il possible de se promener dans chacune de ces maisons en passant une seule et une seule fois par chacune de ses ouvertures ?



Maison 1



Maison 2

■ Exercice 2. Les maisons

★★★★☆

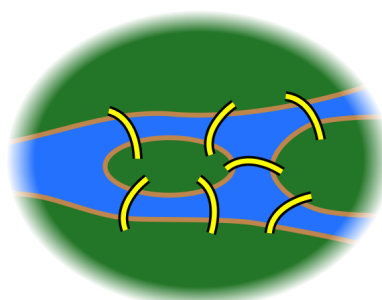
A

(Source : tes-spe-graphesNO-04)

Corrigé page 146 👉

La ville de Königsberg (aujourd'hui Kaliningrad) est construite autour de deux îles situées sur le Pregel et reliées entre elles par un pont. Six autres ponts relient les rives de la rivière à l'une ou l'autre des deux îles, comme représentés sur le dessin ci-dessus.

Le problème consiste à déterminer s'il existe ou non une promenade dans les rues de Königsberg permettant, à partir d'un point de départ au choix, de passer une et une seule fois par chaque pont, et de revenir à son point de départ, étant entendu qu'on ne peut traverser le Pregel qu'en passant sur les ponts.



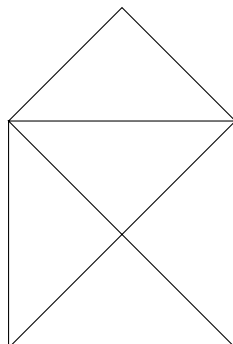
■ Exercice 3. Dessiner sans lever la main

★★★★☆ A

(Source : tes-spe-graphesNO-05)

Corrigé page 146

Peut-on dessiner sans lever la main le dessin suivant :



■ Exercice 4. Dans un parc d'attractions

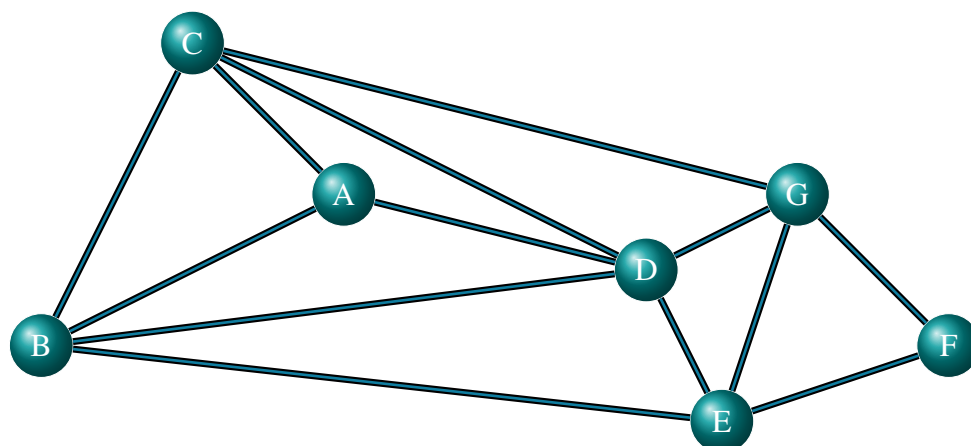
★★★★☆ A

(Source : tes-spe-graphesNO-06)

Corrigé page 147

Un parc est composé de 7 attractions principales A, B, C, D, E, F et G.

Le graphe ci-dessous représente les liaisons entre elles :



- 1 Ce graphe est-il complet ?
- 2 Quel est l'ordre de ce graphe ?
- 3 Est-il possible de passer une seule fois par toutes les arêtes de ce graphe ? Si oui, préciser un parcours possible.

Matrice d'adjacence

■ Exercice 5. Dans un parc d'attractions (2)

★★★★☆ A

(Source : tes-spe-graphesNO-07)

Corrigé page 147

On considère le graphe de l'exercice 4 (« Dans un parc d'attractions »).

- 1 Écrire la matrice d'adjacence de ce graphe (en ordonnant les sommets dans l'ordre alphabétique).
- 2 À l'aide de votre calculatrice, trouver le nombre de chemins de longueur 3 reliant E à C.

■ Exercice 6. Union Européenne

(Source : tes-spe-graphesNO-08)

★★★★☆ R

Corrigé page 148

Voici la carte de l'Union Européenne (U.E.) en 2017 :



On désire construire un graphe où les sommets sont les pays suivants : France, Portugal, Espagne, Belgique, Luxembourg, Italie, Allemagne, Tchéquie, et où les arêtes représentent l'existence d'une frontière entre deux pays.

- 1 Représenter ce graphe. Chaque sommet aura pour lettre l'initiale du pays représenté.
- 2 Quelle est sa matrice d'adjacence ?
- 3 Combien de voyages (passant au maximum deux fois par le même pays) où il faut traverser 4 frontières existent-ils entre l'Espagne et l'Allemagne ?

Algorithme de Dijkstra

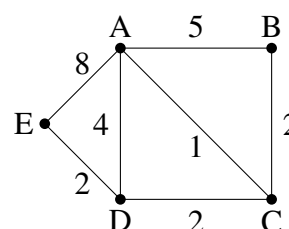
■ Exercice 7. La tournée de la chanteuse

(Source : tes-spe-graphesNO-02)

★★★★☆ A

Corrigé page 149

La chanteuse *Chrystal BRIZ* doit organiser sa tournée dans 5 villes différentes (que l'on représentera par les lettres A, B, C, D et E). À chaque fois qu'elle va dans une ville, elle part de la ville E. Trouver le plus court chemin pour aller dans chaque ville.



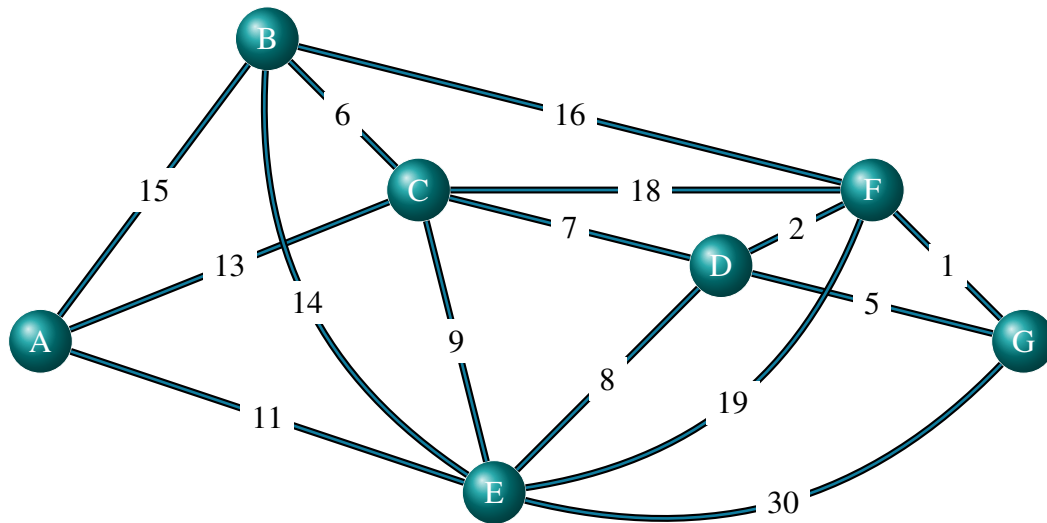
■ Exercice 8. Chemin le plus court

★★★★☆ A

(Source : tes-spe-graphesNO-03)

Corrigé page 149

Trouver le plus court chemin pour aller de A à G en utilisant l'algorithme de Dijkstra.



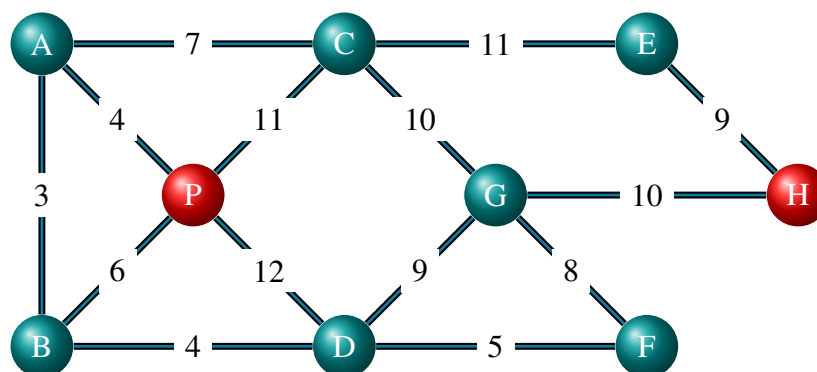
■ Exercice 9. Le politicien

★★★★☆ A

(Source : tes-spe-graphesNO-09)

Corrigé page 153

Un politicien se trouve à sa permanence (en P) et doit se rendre à l'hôpital le plus rapidement possible. Le graphe ci-dessous comporte le temps de trajet pour aller d'un point à un autre. Quel chemin doit-il emprunter ?

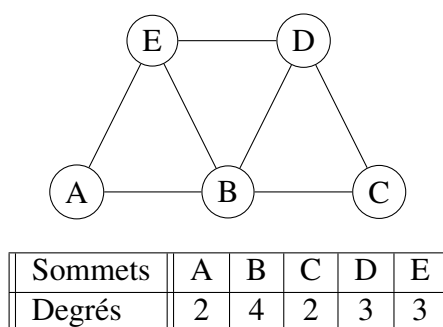


■ Corrigé de l'exercice 1.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

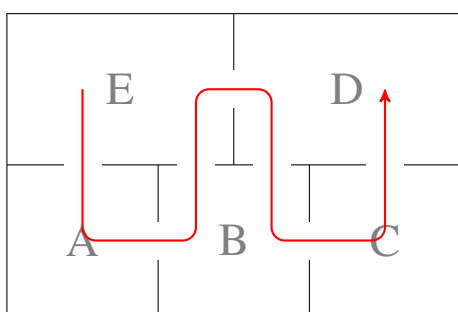
Ici, les arêtes représentent les portes et les sommets, les pièces des maisons.

Maison 1. Le graphe est le suivant :

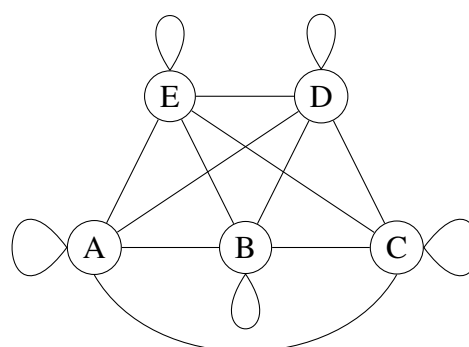


Le graphe est connexe et tous les sommets, sauf 2, ont un degré pair.

Ainsi, d'après le théorème d'Euler, il existe une chaîne eulérienne (mais pas de cycle eulérien).



Maison 2. Le graphe est le suivant :



Sommets	A	B	C	D	E
Degrés	5	5	5	5	5

Le graphe est certes connexe, mais n'admet pas 0 ou 2 sommets de degré impair.

Donc d'après le théorème d'Euler, il n'existe pas de chaîne eulérienne.

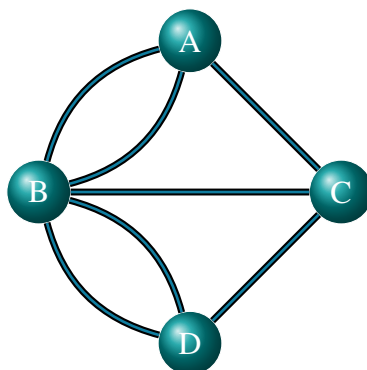
Rappels.

- Un graphe est *connexe* si tous ses sommets peuvent être reliés par une chaîne quelconque.
- Une *chaîne eulérienne* est une chaîne qui contient une et une seule fois chaque arête du graphe.
- Le théorème d'Euler stipule qu'un graphe admet une chaîne eulérienne si et seulement si il est connexe et s'il existe 0 ou 2 sommets de degré pair.

■ Corrigé de l'exercice 2.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

Représentons cette situation à l'aide d'un graphe où les parties de terre seront représentées par des sommets et où les ponts seront représentés par des arêtes :



Le problème revient à voir si ce graphe est eulérien, c'est-à-dire s'il possède une chaîne eulérienne.

Sommets	A	B	C	D
Degrés	3	5	3	3

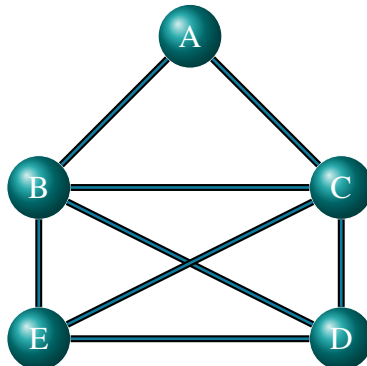
Tous les sommets sont de degrés impairs et le graphe est connexe donc, d'après le théorème d'Euler, le graphe n'admet pas de chaîne eulérienne.

On peut donc répondre de façon négative au problème.

■ Corrigé de l'exercice 3.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

Ce dessin peut être imaginé comme le graphe ci-dessous :



Pouvoir faire le dessin sans lever le crayon signifierait que le graphe possède une chaîne eulérienne.

Sommets	A	B	C	D	E
Degrés	2	4	4	3	3

Ce graphe est connexe et possède 2 sommets de degrés impairs donc d'après le théorème d'Euler, il existe une chaîne eulérienne dans ce graphe.

On peut donc tracer le dessin sans lever le crayon.

Exemple de chaîne eulérienne : E, D, B, C, A, B, E, C, D.

■ Corrigé de l'exercice 4.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

- 1 Un graphe est *complet* s'il est simple (sans double liaison entre deux même sommets) et si tous les sommets peuvent être reliés deux à deux.

Ce n'est pas le cas ici car B n'est pas relié à G par exemple.

Ce graphe n'est donc pas complet.

- 2 L'ordre d'un graphe est le nombre de sommets du graphe.

Donc ici, l'ordre du graphe est égal à 7.

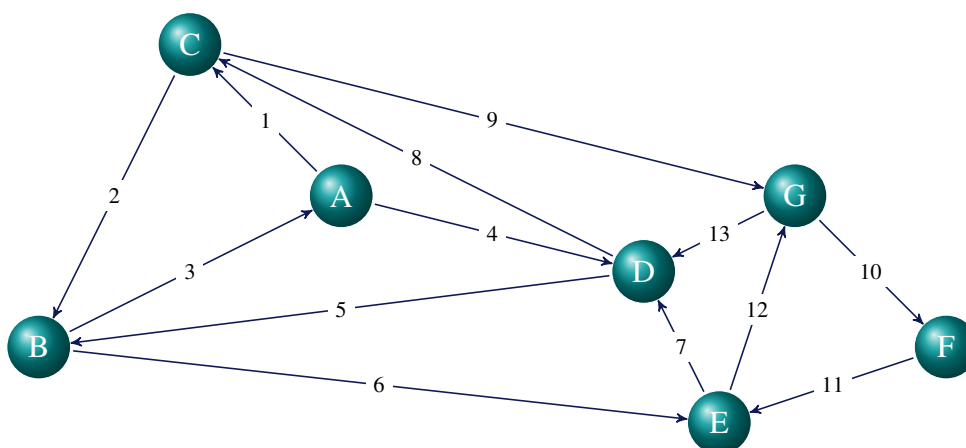
- 3 La question revient à savoir s'il existe une chaîne eulérienne.

Sommets	A	B	C	D	E	F	G
Degrés	3	4	4	5	4	2	4

Il y a 2 sommets de degrés impairs donc d'après le théorème d'Euler, ce graphe admet une chaîne eulérienne.

Il est donc possible de passer par toutes les arêtes du graphe une seule fois.

Un parcours possible est le suivant (j'ai ici indiqué l'ordre à l'aide de nombre) :



Chaîne : A,C,B,A,D,B,E,D,C,G,F,E,G,D.

Astuce : pour trouver une chaîne eulérienne, prenez comme extrémités les sommets de degrés impairs.

■ Corrigé de l'exercice 5.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

- 1 La matrice d'adjacence du graphe est la suivante :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2 La calculatrice nous donne :

$$M^3 = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 9 & 11 & 6 & 4 & 6 \\ 9 & 8 & 12 & 12 & 11 & 4 & 7 \\ 9 & 12 & 8 & 12 & 7 & 4 & 11 \\ 11 & 12 & 12 & 12 & 12 & 4 & 12 \\ 6 & 11 & 7 & 12 & 6 & 6 & 10 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 6 & 2 & 6 \\ 6 & 7 & 11 & 12 & 10 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

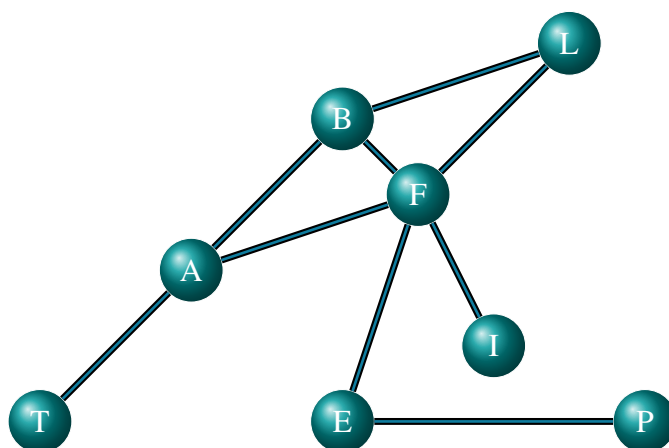
Ainsi, il y a 7 chemins de longueur 3 reliant E à C.

Rappel. Le coefficient de M^n situé à la i -ème ligne et j -ème colonne (ou à la j -ème ligne et i -ème colonne) est le nombre de chemins de longueur n reliant les sommets ayant pour position i et j dans la matrice d'adjacence.

■ Corrigé de l'exercice 6.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

1 Le graphe est le suivant :



2 La matrice d'adjacence de ce graphe est (en mettant les sommets dans l'ordre alphabétique :

A, B, E, F, I, L, P et T.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- 3 En calculant M^4 , on voit que le coefficient à la 3^e ligne et 1^{re} colonne est 9, donc il y a 9 voyages comportant 4 traversées de frontières entre l'Espagne et l'Allemagne :

E-P-E-F-A	E-F-L-F-A	E-F-A-B-A
E-F-I-F-A	E-F-L-B-A	E-F-A-F-A
E-F-B-F-A	E-F-A-T-A	E-F-E-F-A

Parmi ces voyages, tous comportent au maximum deux pays identiques.

■ Corrigé de l'exercice 7.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

On peut utiliser l'algorithme de Dijkstra.

Sommets	E	A	B	C	D		
Initialisation	0	∞	∞	∞	∞	$S = \{E\}$ et $\bar{S} = \{A; B; C; D\}$.	
Etape 1		8(E)	∞	∞	2(E)	$S = \{E; D\}$ et $\bar{S} = \{A; B; C\}$	<u>On garde D</u>
Etape 2		2+4=6(D)	∞	2(D)		$S = \{E; D; C\}$ et $\bar{S} = \{A; B\}$	<u>On garde C</u>
Etape 3		4+1=5(C)	4+2=6(C)			$S = \{E; D; C; A\}$ et $\bar{S} = \{B\}$	<u>On garde A</u>
Etape 4			6(C)			$S = \{E; D; C; A; B\}$ et $\bar{S} = \emptyset$	<u>On garde B</u>

On voit donc que :

- pour aller de E à A, la chaîne (E;D;C;A) a le poids minimal (5).
- pour aller de E à B, la chaîne (E;D;C;B) a le poids minimal (6).
- pour aller de E à C, la chaîne (E;D;C) a le poids minimal (4).
- pour aller de E à D, la chaîne (E;D) a le poids minimal (2).

■ Corrigé de l'exercice 8.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

Nous allons voir pas à pas comment utiliser l'algorithme de Dijkstra.

- Avant tout, construisons une grille carrée à 7 lignes (plus une ligne en haut pour mettre les sommets dans un ordre qui suit à peu près celui du graphe pour mieux y voir) et 7 colonnes car il y a 7 sommets.

A	B	C	D	E	F	G

- Nous partons du sommet A ; par conséquent, nous allons mettre des croix dans la colonne sous « A ». De A, nous pouvons aller jusqu'à B, C et E avec des distances respectives de 15, 13 et 11.

A	B	C	D	E	F	G
×	15 (A)	13 (A)		11 (A)		
×						
×						
×						
×						
×						
×						

Nous mettons entre parenthèses le sommet duquel nous sommes arrivés (donc ici : A).

- On prend le nombre le plus petit : 11 (A). On l'abaisse à la ligne suivante et on le marque (ici, j'ai colorié la cellule, mais on peut l'entourer), tout en mettant des croix dans la colonne correspondante :

A	B	C	D	E	F	G
×	15 (A)	13 (A)		11 (A)		
×				11 (A)		
×				×		
×				×		
×				×		
×				×		
×				×		

- On part de E. Sur la même ligne, on met tous les sommets qui peuvent être atteints : C (avec une distance totale de $11 + 9 = 20$), D (avec une distance totale de $11 + 8 = 19$), etc.

A	B	C	D	E	F	G
×	15 (A)	13 (A)		11 (A)		
×	26 (E)	20 (E)	19 (E)	11 (A)	30 (E)	41 (E)
×				×		
×				×		
×				×		
×				×		
×				×		

- Dans les colonnes où il n'y a pas encore de croix, on regarde quel est le nombre le plus petit qui n'a pas encore été marqué : il s'agit ici de « 13 (A) » : on l'abaisse donc à la ligne suivante, on met des croix dans la colonne et on le marque :

A	B	C	D	E	F	G
×	15 (A)	13 (A)		11 (A)		
×	26 (E)	20 (E)	19 (E)	11 (A)	30 (E)	41 (E)
×		13 (A)		×		
×		×		×		
×		×		×		
×		×		×		
×		×		×		

- En partant de C, on peut aller jusqu'à B, F, D et E (mais « E » étant déjà marqué, on l'oublie !). Donc sur cette même ligne où l'on vient de marqué le « 13 (A) », on reporte dans les colonnes B, F et D les distances totales : $13 + 6 = 19$ pour B, $13 + 18 = 31$ pour F et $13 + 7 = 20$ pour D.

A	B	C	D	E	F	G
×	15 (A)	13 (A)		11 (A)		
×	26 (E)	20 (E)	19 (E)	11 (A)	30 (E)	41 (E)
×	19 (C)	13 (A)	20 (C)	×	31 (C)	
×		×		×		
×		×		×		
×		×		×		
×		×		×		

- Dans les colonnes où il n'y a pas de croix, parmi les nombres non marqués, le plus petit est « 15 (A) ». On l'abaisse donc à la ligne suivante, on le marque et on met des croix dans cette colonne.

A	B	C	D	E	F	G
×	15 (A)	13 (A)		11 (A)		
×	26 (E)	20 (E)	19 (E)	11 (A)	30 (E)	41 (E)
×	19 (C)	13 (A)	20 (C)	×	31 (C)	
×	15 (A)	×		×		
×	×	×		×		
×	×	×		×		
×	×	×		×		

- En partant de B, on peut aller jusqu'à F (le sommet C étant déjà marqué, on l'oublie !). On marque donc sur la même ligne et dans la colonne F la distance totale : $15 + 16 = 31$.

A	B	C	D	E	F	G
×	15 (A)	13 (A)		11 (A)		
×	26 (E)	20 (E)	19 (E)	11 (A)	30 (E)	41 (E)
×	19 (C)	13 (A)	20 (C)	×	31 (C)	
×	15 (A)	×		×	31 (B)	
×	×	×		×		
×	×	×		×		
×	×	×		×		

- Dans les colonnes non encore complétées d'une croix, on regarde quel est le nombre le plus petit : c'est ici « 19 (E) », que l'on s'empresse donc d'abaisser à la ligne suivante tout en complétant la colonne de croix :

A	B	C	D	E	F	G
×	15 (A)	13 (A)		11 (A)		
×	26 (E)	20 (E)	19 (E)	11 (A)	30 (E)	41 (E)
×	19 (C)	13 (A)	20 (C)	×	31 (C)	
×	15 (A)	×		×	31 (B)	
×	×	×	19 (E)	×		
×	×	×	×	×		
×	×	×	×	×		

- En partant de D, on peut aller jusqu'à F (avec une distance totale de $19 + 2 = 21$) et G (avec une distance totale de $19 + 5 = 24$), que l'on met sur la même ligne :

A	B	C	D	E	F	G
×	15 (A)	13 (A)		11 (A)		
×	26 (E)	20 (E)	19 (E)	11 (A)	30 (E)	41 (E)
×	19 (C)	13 (A)	20 (C)	×	31 (C)	
×	15 (A)	×		×	31 (B)	
×	×	×	19 (E)	×	21 (D)	24 (D)
×	×	×	×	×		
×	×	×	×	×		

- Dans les colonnes non encore complétées de croix, le plus petit nombre est « 21 (D) » ; on l'abaisse donc à la ligne suivante, on le marque et on complète la colonne d'une croix :

A	B	C	D	E	F	G
×	15 (A)	13 (A)		11 (A)		
×	26 (E)	20 (E)	19 (E)	11 (A)	30 (E)	41 (E)
×	19 (C)	13 (A)	20 (C)	×	31 (C)	
×	15 (A)	×		×	31 (B)	
×	×	×	19 (E)	×	21 (D)	24 (D)
×	×	×	×	×	21 (D)	
×	×	×	×	×	×	

- Du sommet F, on peut aller jusqu'à G avec une distance totale de $21 + 1 = 22$. Comme 22 est le plus petit nombre de la colonne G, on le marque.

A	B	C	D	E	F	G
×	15 (A)	13 (A)		11 (A)		
×	26 (E)	20 (E)	19 (E)	11 (A)	30 (E)	41 (E)
×	19 (C)	13 (A)	20 (C)	×	31 (C)	
×	15 (A)	×		×	31 (B)	
×	×	×	19 (E)	×	21 (D)	24 (D)
×	×	×	×	×	21 (D)	
×	×	×	×	×	×	22 (F)

- « 22 » est donc le poids minimal et la chaîne correspondante se trouve à l'aide des sommets entre parenthèses lus à l'envers en partant de G :

G – F – D – E – A devient, à l'endroit :

$$A \rightarrow E \rightarrow D \rightarrow F \rightarrow G$$

■ **Corrigé de l'exercice 9.**

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

Utilisons l'algorithme de Dijkstra comme dans l'exercice précédent.

P	A	B	C	D	E	F	G	H
×	4 (P)	6 (P)	11 (P)	12 (P)				
×	4 (P)	7 (A)	11 (A)					
×	×	6 (P)		10 (B)				
×	×	×		10 (B)		15 (D)	19 (D)	
×	×	×	11 (P)	×	22 (C)	15 (D)	21 (C)	
×	×	×	×	×		×	23 (F)	
×	×	×	×	×		×	19 (D)	
×	×	×	×	×		×	×	29 (G)
×	×	×	×	×	22 (C)	×	×	31 (E)

La durée minimale est donc de 29 minutes avec le trajet $P \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow G \rightarrow H$.

Graphes orientés & probabilistes

Disponible sur <http://www.mathweb.fr>

A Exercices d'application du cours

R Exercices de réflexion

👉 Exercice & corrigé relus avec attention pour éviter les erreurs

12 juin 2018

Graphes orientés

■ Exercice 1. Site internet

(Source : tes-spe-graphesO-01)

★★★★☆

A

Corrigé page 158 👉

Une site internet est composée de 5 pages, notées A, B, C, D et E.

- Sur la page A, sont mis des liens vers les pages B et C ;
- Sur la page B, sont mis des liens vers les pages A, C et E ;
- Sur la page C, sont mis des liens vers les pages A et D ;
- Sur la page D, sont mis des liens vers les pages A, B, C et E ;
- Sur la page E, est mis un lien vers la page A.

- 1 Construire le graphe correspondant à ce site, où les sommets désignent les pages, et les arêtes désignent les liens.
- 2 Écrire la matrice d'adjacence de ce graphe.
- 3 Le webmaster se trouve sur la page A. Combien de chemins de longueur 4 existent pour revenir sur cette page ?
- 4 Proposer un chemin pour tester tous les liens de ce site en partant de la page A.

■ Exercice 2. Le jeu de Fan Tan (Matrice, longueur d'une chaîne)

(Source : tes-spe-graphesO-02)

★★★★★

R

Corrigé page 159 👉

Deux joueurs disposent de 2 ou plusieurs tas d'allumettes. À tour de rôle, chaque joueur peut enlever un certain nombre d'allumettes de l'un des tas (selon la règle choisie). Le joueur qui retire la dernière allumette perd la partie.

- 1 Modéliser ce jeu à l'aide d'un graphe $\mathcal{G}$ dans le cas où l'on dispose au départ de deux tas contenant chacun trois allumettes et où un joueur peut enlever une ou deux allumettes à chaque fois.

- 2 Soit c une chaîne allant du premier sommet au dernier.
À quelle condition sur la longueur de c le premier joueur gagne-t-il la partie ?
- 3 Écrire la matrice d'adjacence $\mathcal{A}$ de $\mathcal{G}$.
- 4 À l'aide de votre calculatrice, calculer les puissances successives de $\mathcal{A}$ jusqu'à prouver qu'il existe bien un « premier coup gagnant ».
- 5 En observant ce dernier résultat, pouvez-vous dire quel premier coup le joueur doit faire pour être assuré de gagner ?

Graphes probabilistes

■ Exercice 3. Les entreprises de couches culottes

★★★★☆ R

(Source : tes-spe-graphesO-03)

Corrigé page 160

Deux entreprises A et B se disputent le marché innovateur des couches culottes en papier recyclé. Les études de marché ont montrées que d'une année à l'autre :

- l'entreprise A perd 13 % de ses clients au profit de l'entreprise B ;
- l'entreprise B perd 15 % de ses clients au profit de l'entreprise A.

Les autres clients restent fidèles à leur marque.

L'année de lancement de ces produits, les deux entreprises avaient chacune d'elles 50 % du marché. On désigne par $P_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$ la matrice ligne représentant la répartition du marché sur ces deux entreprises. Ainsi, $P_0 = (0,5 \quad 0,5)$.

- 1 Construire le graphe probabiliste de cette situation.
- 2 Donner la matrice de transition de ce graphe.
- 3 Quelle sera la répartition du marché 1 année après le lancement du produit ? Après 5 années ?
- 4 Déterminer l'état stable de ce marché, puis interpréter ce résultat.

■ Exercice 4. Lucas le glandeur

★★★★☆ R

(Source : tes-spe-graphesO-04)

Corrigé page 161

Quand Lucas est en vacances, s'il n'est pas sur son lit en train d'écouter de la musique, il peut être devant un jeu vidéo ou en train de manger.

D'une heure à l'autre,

- la probabilité qu'il passe de son lit à la cuisine est égale à 0,2 ;
- la probabilité qu'il passe de son lit au jeu vidéo est égale à 0,5 ;
- la probabilité qu'il passe de son jeu vidéo à la cuisine est égale à 0,6 ;
- la probabilité qu'il passe de son jeu vidéo à son lit est égale à 0,3 ;
- la probabilité qu'il passe de la cuisine à son lit est égale à 0,7 ;
- la probabilité qu'il passe de la cuisine au jeu vidéo est égale à 0,2.

- 1 Construire le graphe de cette situation.
- 2 Donner la matrice de transition de ce graphe, puis évaluer son état stable. Interpréter.

■ Exercice 5. La côte de popularité de Squeezie

★★★★☆ R

(Source : tes-spe-graphesO-05)

Corrigé page 162

Dans cet exercice, on s'intéresse à la notoriété de Squeezie, le youtubeur.

Cette année, en France, sur l'ensemble des personnes interrogées connaissant le personnage, 78 % affirmaient qu'ils l'aimaient bien.

Les statistiques montrent que d'une année sur l'autre :

- 7 % des personnes qui l'aimaient bien ne l'aiment plus ;
- 30 % de celles qui ne l'aimaient pas l'aiment bien.

Pour tout entier naturel n , on note :

- a_n la probabilité qu'une personne aime bien Squeezie dans n années ;
- $P_n = \begin{pmatrix} a_n & 1 - a_n \end{pmatrix}$ la matrice traduisant l'état probabiliste dans n années.

- 1 Trouver P_0 , l'état probabiliste initial.
- 2 Déterminer le graphe probabiliste traduisant la notoriété de notre ami Squeezie auprès de la population française, puis en donner la matrice de transition.
- 3 Quelle est la probabilité qu'une personne choisie au hasard en France aime Squeezie dans 4 ans ?
- 4 a. On note $P = \begin{pmatrix} a & 1 - a \end{pmatrix}$ l'état stable du graphe.
Montrer que $a = 0,63a + 0,3$.
b. À longs termes, selon ce modèle mathématique, montrer que plus de 80 % des français aimeront le youtubeur.

■ Exercice 6. Fumeurs et non-fumeurs

★★★★☆ A

(Source : tes-spe-graphesO-06)

Corrigé page 163

On a divisé une population en deux catégories : « fumeurs » et « non-fumeurs ».

Une étude statistique a permis de constater que, d'une génération à l'autre,

- 60 % des descendants de fumeurs sont des fumeurs,
- 10 % des descendants de non-fumeurs sont des fumeurs.

On suppose que le taux de fécondité des fumeurs est le même que celui des non-fumeurs.

On désigne par :

- f_n le pourcentage de fumeurs à la génération de rang n ,
- $g_n = 1 - f_n$ le pourcentage de non-fumeurs à la génération de rang n , où n est un entier naturel.

On considère qu'à la génération 0, il y a autant de fumeurs que de non-fumeurs.

On a donc $f_0 = g_0 = 0,5$.

- 1 Traduire les données de l'énoncé par un graphe probabiliste.
- 2 Justifier l'égalité matricielle :

$$\begin{pmatrix} f_{n+1} & g_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_n & g_n \end{pmatrix} \times A, \quad \text{où } A \text{ désigne la matrice : } \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,1 & 0,9 \end{pmatrix}.$$

- 3 Déterminer le pourcentage de fumeurs à la génération de rang 2.
- 4 Déterminer l'état probabiliste stable et l'interpréter.
- 5 Montrer que pour tout entier naturel n , $f_{n+1} = 0,5f_n + 0,1$.
- 6 On pose, pour tout entier naturel n , $u_n = f_n - 0,2$.
 - a. Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
 - b. Donner l'expression de u_n en fonction de n .
 - c. En déduire que, pour tout entier naturel n , $f_n = 0,3 \times 0,5^n + 0,2$.
 - d. Déterminer la limite de la suite (f_n) lorsque n tend vers $+\infty$ et l'interpréter.

■ Exercice 7. Norman faisait des vidéos



(Source : tes-spe-graphesO-07)

Corrigé page 165

À une certaine époque, Norman était un jeune homme faisant des vidéos animalières (FAUX !) et les diffusait sur un célèbre réseau social de vidéos (logique !).

Nous allons prendre comme référence la semaine où il a posté sa première vidéo.

Nous allons supposer que, d'une semaine à l'autre,

- la probabilité qu'il poste une nouvelle vidéo est égale à 0,6 s'il a posté une vidéo la semaine précédente ;
- la probabilité qu'il poste une nouvelle vidéo est égale à 0,8 s'il n'a pas posté une vidéo la semaine précédente.

On note $P_n = (a_n \ b_n)$, où a_n est la probabilité que Norman ait posté une vidéo la semaine n .

Ainsi, on a $P_0 = (1 \ 0)$.

- 1 Construire le graphe représentant la situation.
- 2 Se sont écoulés 6 ans depuis la création de sa chaîne.

Calculer la probabilité qu'il poste une nouvelle vidéo la semaine prochaine si le modèle mathématique n'a pas changé depuis le début.

Le modèle utilisé précédemment est peu crédible en raison du marché actuel de la vidéo sur Internet. Le Pr Mat Reesse propose un nouveau modèle avec pour matrice de transition la matrice suivante :

$$B_n = \begin{pmatrix} e^{-0,5n} & 1 - e^{-0,5n} \\ e^{-0,5n} \ln(n) & 1 - e^{-0,5n} \ln(n) \end{pmatrix}$$

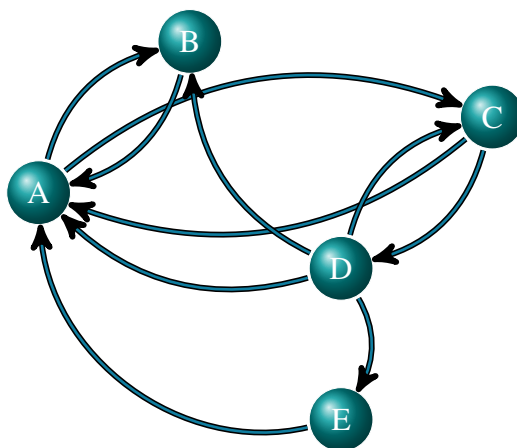
où n est exprimé cette fois-ci en *année*. On note alors $Q_n = (p_n \ q_n)$ l'état probabiliste après n années, où p_n est la probabilité que Norman fasse au moins 10 vidéos au cours de la n -ième année, avec $Q_0 = P_0$.

- 3 Justifier que B_n est bien une matrice de transition de graphe probabiliste.
On pourra s'aider de la calculatrice pour conjecturer certains résultats nécessaires.
- 4
 - a. À l'aide de ce nouveau modèle mathématique, montrer que $p_{n+1} = [(1 - \ln(n))p_n + \ln(n)] e^{-0,5n}$.
 - b. À l'aide de votre calculatrice, conjecturer la limite de (p_n) .
 - c. On appelle « demi-vie » l'instant où la probabilité est égale à 0,5.
En vous aidant de cette notion de « demi-vie », ce modèle vous semble-t-il crédible ?

■ Corrigé de l'exercice 1.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

1 Le graphe est le suivant :



2 En convenant de respecter l'ordre alphabétique, la matrice d'adjacence de ce graphe est :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

→ 1 lien de C vers D

3 Après avoir calculé M^4 , on voit que le coefficient de la 1^{re} ligne et 1^{re} colonne est 7.

Il y a donc 7 chemins possibles pour passer de la page A à la page A en 4 clics.

4 Le chemin :

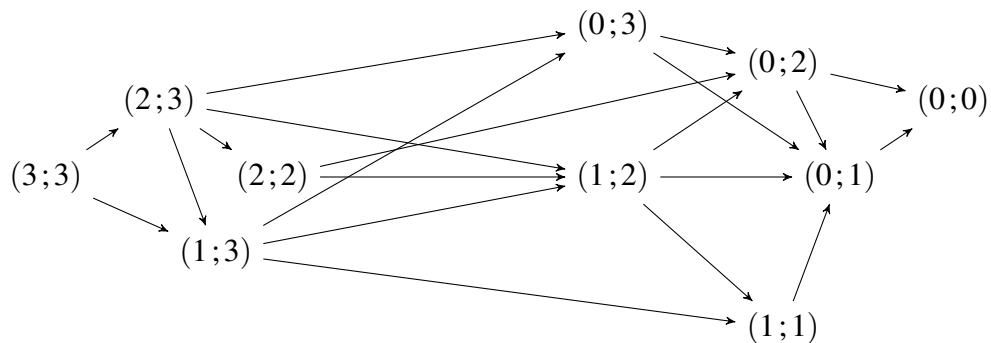
$$A \rightarrow B \rightarrow A \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow A \rightarrow C \rightarrow A \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow B \rightarrow A \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow A$$

convient, même s'il passe plusieurs fois par les mêmes sommets et s'il emprunte plusieurs fois les mêmes arêtes.

■ Corrigé de l'exercice 2.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

- 1 Si chaque sommet est un couple $(i; j)$ où i désigne le nombre d'allumettes du premier tas et j celui du second tas, alors le graphe est le suivant :



- 2 Pour que le premier joueur gagne, il faut que l'autre joueur joue en dernier, ce qui nécessite un nombre pair de coups. Il faut donc que la longueur de c soit paire.

- 3 On a :

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- 4 À l'aide du logiciel Xcas, on cherche la plus petite puissance paire de $\mathcal{A}$ telle que $a_{1,10} \neq 0$. Pour $\mathcal{A}^2$, $a_{1,10} = 0$ mais pour $\mathcal{A}^4$, on a $a_{1,10} = 10$.

On peut donc dire qu'il y a 10 chaînes de longueur 4 qui mènent du premier sommet au dernier. Par exemple : $(3;3) \rightarrow (1;3) \rightarrow (0;3) \rightarrow (0;2) \rightarrow (0,0)$.

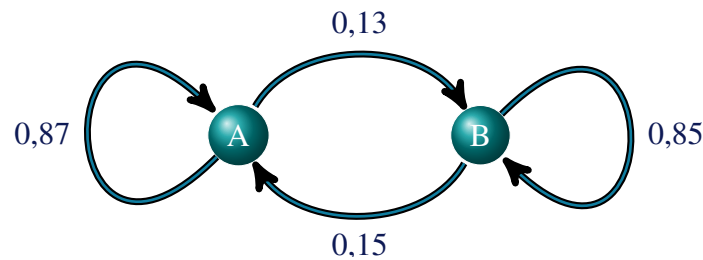
- 5 Sur le graphe $\mathcal{G}$, on peut observer que si le joueur retire deux allumettes, alors il est assuré de gagner.

En effet, la chaîne $(3;3) \rightarrow (2;3) \rightarrow (2;2) \rightarrow (1;2) \rightarrow (0;1) \rightarrow (0;0)$ a une longueur impaire, donc ne convient pas. Par contre, toutes les chaînes commençant par $(3;3) \rightarrow (1;3)$ ont une longueur paire.

■ Corrigé de l'exercice 3.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

1 Le graphe correspondant à cette situation est le suivant :



2 La matrice de transition est :

$$M = \begin{pmatrix} 0,87 & 0,13 \\ 0,15 & 0,85 \end{pmatrix}$$

3 • On souhaite calculer P_1 :

$$P_1 = P_0 \times M = (0,5 \quad 0,5) \begin{pmatrix} 0,87 & 0,13 \\ 0,15 & 0,85 \end{pmatrix} = \boxed{(0,51 \quad 0,49)} = P_1$$

Ainsi, après 1 année, l'entreprise A détiendra 51 % du marché.

• On souhaite calculer P_5 :

$$P_5 = P_0 \times M^5 = \boxed{(0,5288 \quad 0,4712)} = P_5$$

Ainsi, après 5 années, l'entreprise A détiendra 52,88 % du marché.

4 Notons $P = (a \quad b)$ l'état stable du graphe. Alors, par définition :

$$P = PM \quad \text{soit} \quad (a \quad b) = (a \quad b) \begin{pmatrix} 0,87 & 0,13 \\ 0,15 & 0,85 \end{pmatrix}.$$

On arrive ainsi au système suivant :

$$\begin{cases} 0,87a + 0,15b = a \\ 0,13a + 0,85b = b \end{cases}$$

ou encore, en faisant tout passer à gauche :

$$\begin{cases} -0,13a + 0,15b = 0 \\ 0,13a - 0,15b = 0 \end{cases}$$

On obtient ainsi deux équations équivalentes (car la 1^{re} est l'opposée de la 2^{de}).

De plus, $a + b = 1$ car a et b sont les deux seules probabilités de notre situation.

On a finalement le système suivant :

$$\begin{cases} a + b = 1 \\ 0,13a - 0,15b = 0 \end{cases}$$

que l'on peut aussi écrire de façon matricielle :

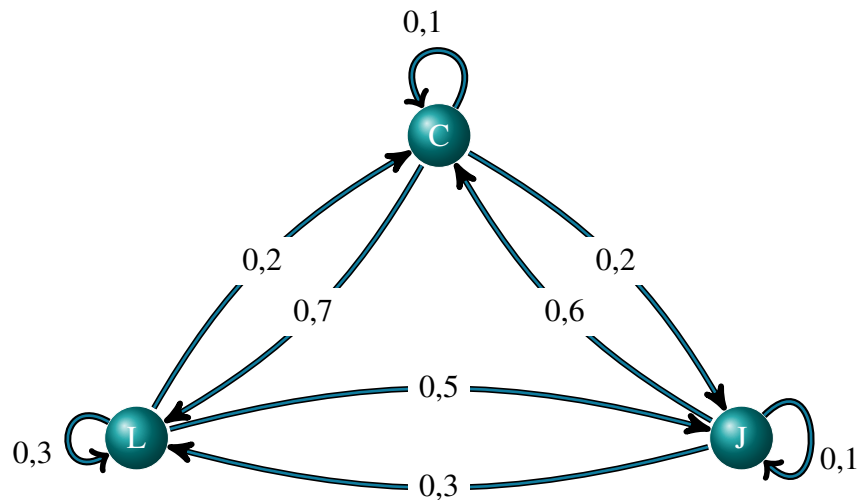
$$AX = B \quad , \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0,13 & -0,15 \end{pmatrix} \quad , \quad X = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi,

$$X = A^{-1}B = \boxed{\begin{pmatrix} 0,5357 \\ 0,4643 \end{pmatrix}}$$

ce qui signifie qu'à longs termes, l'entreprise A possèdera 53,57 % du marché.

1 Le graphe est le suivant :



2 La matrice de transition de ce graphe est :

$$M = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,2 & 0,7 \\ 0,6 & 0,1 & 0,3 \\ 0,2 & 0,5 & 0,3 \end{pmatrix}$$

en convenant de mettre les sommets dans l'ordre alphabétique : C, J, L.

Notons $P = (a \ b \ c)$ l'état stable du graphe. Alors, par définition,

$$P = P \times M \quad \text{soit} \quad (a \ b \ c) = (a \ b \ c) \begin{pmatrix} 0,1 & 0,2 & 0,7 \\ 0,6 & 0,1 & 0,3 \\ 0,2 & 0,5 & 0,3 \end{pmatrix}$$

d'où le système suivant :

$$\begin{cases} 0,1a + 0,6b + 0,2c = a \\ 0,2a + 0,1b + 0,5c = b \\ 0,7a + 0,3b + 0,3c = c \end{cases}$$

En mettant tout à gauche, on obtient :

$$\begin{cases} -0,9a + 0,6b + 0,2c = 0 \\ 0,2a - 0,9b + 0,5c = 0 \\ 0,7a + 0,3b - 0,7c = 0 \end{cases}$$

En ajoutant les deux dernières équations, on obtient :

$$0,9a - 0,6b - 0,2c = 0$$

c'est-à-dire la 1^{re} équation. On peut donc supprimer cette dernière et ajouter au système l'équation : $a + b + c = 1$ (somme des probabilités).

On obtient alors le système :

$$\begin{cases} a + b + c = 1 \\ 0,2a - 0,9b + 0,5c = 0 \\ 0,7a + 0,3b - 0,7c = 0 \end{cases}$$

On peut multiplier par 10 les deux dernières équations (pour enlever les virgules) :

$$\begin{cases} a + b + c = 1 \\ 2a - 9b + 5c = 0 \\ 7a + 3b - 7c = 0 \end{cases}$$

et écrire de façon matricielle ce dernier système :

$$AX = B \quad , \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -9 & 5 \\ 7 & 3 & -7 \end{pmatrix} \quad , \quad X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi,

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} \frac{24}{83} \\ \frac{49}{166} \\ \frac{69}{166} \end{pmatrix}$$

L'état stable du graphe est donc :

$$P = \left(\frac{24}{83} \quad \frac{49}{166} \quad \frac{69}{166} \right)$$

ce qui signifie qu'à longs termes,

- la probabilité que Lucas soit dans la cuisine en train de manger est égale à $\frac{24}{83} \approx 0,289$,
- la probabilité que Lucas soit en train de jouer au jeu vidéo est égale à $\frac{49}{166} \approx 0,295$,
- la probabilité que Lucas soit sur son lit est égale à $\frac{69}{166} \approx 0,416$.

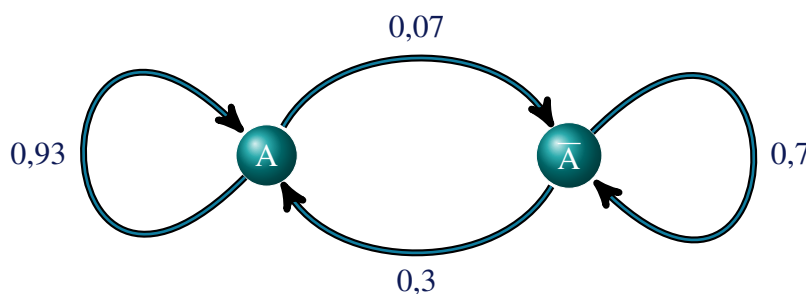
Quel branleur ce Lucas !

■ Corrigé de l'exercice 5.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

1 D'après l'énoncé, $P_0 = (0,78 \quad 0,22)$.

2 Le graphe est le suivant, où A est l'événement : « Le jeune aime Squeezie » :



La matrice de transition est alors :

$$M = \begin{pmatrix} 0,93 & 0,07 \\ 0,30 & 0,70 \end{pmatrix}$$

3 $P_4 = P_0 \times M^4 = (0,80 \quad 0,20).$

Ainsi, dans 4 ans, 80% des personnes aimeront Squeezie.

4 a. Par définition, $P = P \times M$ donc :

$$(a \quad 1-a) = (a \quad 1-a) \begin{pmatrix} 0,93 & 0,07 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix} = (0,93a + 0,3(1-a) \quad 0,07a + 0,7(1-a).)$$

En ne regardant que la première composante des deux matrices de part et d'autre du signe « = », on a :

$$\begin{aligned} a &= 0,93a + 0,3(1-a) \iff a = 0,93a + 0,3 - 0,3a \\ &\iff \boxed{a = 0,63a + 0,3} \end{aligned}$$

b. De la question précédente, on déduit que :

$$0,37a = 0,3$$

et donc que :

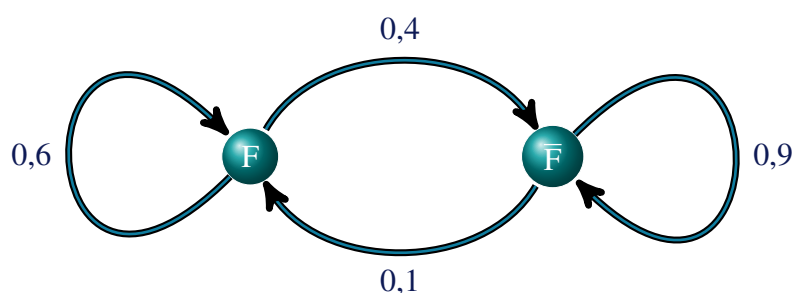
$$a = \frac{0,3}{0,37} \approx 0,8108.$$

Ainsi, à longs termes, il y aura à peu près 81% des français aimeront Squeezie selon ce modèle mathématique (qui n'est vraisemblablement pas réaliste).

■ Corrigé de l'exercice 6.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

1 Le graphe probabiliste est le suivant, où F représente l'état « fumeur » et $\bar{F}$ l'état « non-fumeur » :



2 La matrice de transition de ce graphe est : $A = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,1 & 0,9 \end{pmatrix}$, et par définition, si on note $P_n = (f_n \quad g_n)$, alors $P_{n+1} = P_n \times A$.

3 On cherche f_2 , donc P_2 .

$$P_2 = P_0 \times A^2 = (0,275 \quad 0,725).$$

Ainsi, à la génération de rang 2, il y a 27,5% de fumeurs.

4 Notons $P = (f \quad g)$ l'état stable du graphe. Alors, par définition, $P = P \times A$:

$$(f \quad g) = (f \quad g) \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,1 & 0,9 \end{pmatrix} = (0,6f + 0,1g \quad 0,4f + 0,9g)$$

Ainsi,

$$\begin{cases} 0,6f + 0,1g = f \\ 0,4f + 0,9g = g \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} -0,4f + 0,1g = 0 \\ 0,4f - 0,1g = 0 \end{cases}$$

Ces deux équations sont équivalentes car l'une est l'opposée de l'autre, donc on peut n'en prendre qu'une des deux.

De plus, $g = 1 - f$, ce qui donne :

$$\begin{aligned} 0,4f - 0,1g = 0 &\iff 0,4f - 0,1(1 - f) = 0 \\ &\iff 0,4f - 0,1 + 0,1f = 0 \\ &\iff 0,5f = 0,1 \\ &\iff f = \frac{0,1}{0,5} \\ &\iff f = 0,2. \end{aligned}$$

L'état stable est donc $P = (0,2 \quad 0,8)$, ce qui signifie qu'à longs termes, il y aura 20 % de fumeurs et donc 80 % de non-fumeurs.

5 De la question 2, on déduit :

$$\begin{aligned} (f_{n+1} \quad g_{n+1}) &= (f_n \quad g_n) \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,1 & 0,9 \end{pmatrix} \implies f_{n+1} = 0,6f_n + 0,1g_n \\ &\implies f_{n+1} = 0,6f_n + 0,1(1 - f_n) \\ &\implies f_{n+1} = 0,6f_n + 0,1 - 0,1f_n \\ &\implies \boxed{f_{n+1} = 0,5f_n + 0,1} \end{aligned}$$

6 a. $u_{n+1} = f_{n+1} - 0,2$

$$\begin{aligned} &= 0,5f_n + 0,1 - 0,2 \\ &= 0,5f_n - 0,1 \\ &= 0,5 \left(f_n - \frac{0,1}{0,5} \right) \\ &= 0,5(f_n - 0,2) \\ &= 0,5u_n. \end{aligned}$$

Ainsi, (u_n) est une suite géométrique de raison $q = 0,5$. Son premier terme est alors :

$$u_0 = f_0 - 0,2 = 0,5 - 0,2 = 0,3.$$

b. D'après le cours, $u_n = u_0 \times q^n$, donc $\boxed{u_n = 0,3 \times 0,5^n}$.

c. On sait que $u_n = f_n - 0,2$, donc $f_n = u_n + 0,2$, c'est-à-dire :

$$f_n = 0,3 \times 0,5^n + 0,2$$

d. $0 < 0,5 < 1$ donc d'après le cours, $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,5^n = 0$. Alors, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (0,3 \times 0,5^n) = 0$ et donc

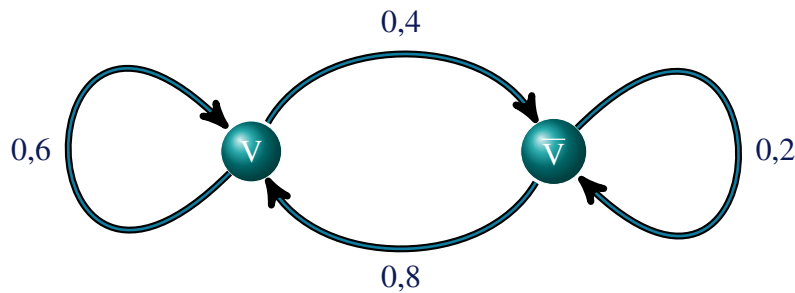
$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n = 0,2}.$$

On peut interpréter ce dernier résultat en disant qu'à longs termes, il y aura 20 % de fumeurs, ce qui n'est pas une surprise dans la mesure où on l'avait déjà trouvé à la question 4.

■ Corrigé de l'exercice 7.

[\[Retour à l'énoncé de l'exercice\]](#)

1 Le graphe probabiliste est le suivant, où V représente l'état « Norman poste une vidéo » :



2 La matrice de transition de ce graphe est : $A = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,8 & 0,2 \end{pmatrix}$, et par propriété du cours, $P_n = P_0 \times A^n$.

Si 6 années se sont écoulées, c'est-à-dire à peu près 312 semaines (6×52), on doit chercher a_{313} (1 semaine de plus !).

$$P_{313} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \times A^{313}.$$

L'exposant étant assez grand, on peut assimiler P_{313} à l'état stable $P = (a \ b)$ du graphe, et par définition,

$$P = P \times A \iff (a \ b) = (0,6a + 0,8b \quad 0,4a + 0,2b)$$

soit, en ne prenant qu'une égalité :

$$a = 0,6a + 0,8b = 0,6a + 0,8(1 - a)$$

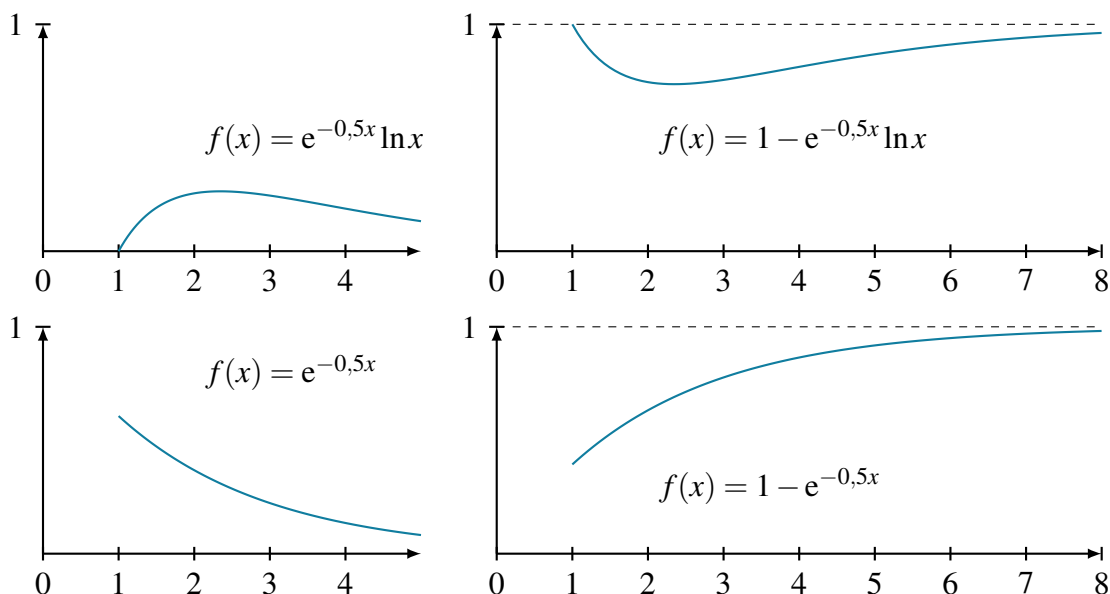
ou encore :

$$0,8 - 0,2a = a \iff a = \frac{0,8}{1,2} = \frac{2}{3}.$$

Ainsi, il y a 2 chances sur 3 pour que Norman publie une nouvelle vidéo la semaine prochaine si le modèle mathématique n'a pas changé depuis le début.

3 La somme des coefficients de chaque ligne de B_n vaut 1.

De plus, on a les représentations graphiques suivantes :



On peut alors conjecturer que les 4 coefficients sont compris entre 0 et 1 et peuvent donc représenter des probabilités.

Ainsi, B_n peut être une matrice de transition.

4 a. $Q_{n+1} = Q_n \times B_n \iff (p_{n+1} \quad q_{n+1}) = (p_n \quad q_n) \begin{pmatrix} e^{-0,5n} & 1 - e^{-0,5n} \\ e^{-0,5n} \ln(n) & 1 - e^{-0,5n} \ln(n) \end{pmatrix}$

$$\implies p_{n+1} = e^{-0,5n} p_n + e^{-0,5n} \ln(n) q_n$$

$$\implies p_{n+1} = [p_n + \ln(n) \times (1 - p_n)] e^{-0,5n}$$

$$\implies p_{n+1} = [p_n + \ln(n) - \ln(n) p_n] e^{-0,5n}$$

$$\implies p_{n+1} = [(1 - \ln(n)) p_n + \ln(n)] e^{-0,5n}$$

b. Sur la calculatrice, on peut construire un tableau de valeurs de la suite (p_n) et on trouve :

n	p_n
0	1
1	0,6065306597
2	0,3234627162
3	0,2380162642
4	0,1751712266
5	0,1233476438
6	0,0843441632
7	0,0563521872
8	0,0369721804
9	0,0239172316
10	0,0153047808
11	0,0097122156
12	0,0061237199
13	0,0038418375
14	0,0024007667
15	0,0014955122
16	0,0009292106
17	0,0005761227
18	0,0003565658
19	0,0002203447
20	0,0001359861

On peut alors conjecturer que la limite de la suite (p_n) vaut 0.

c. On cherche n tel que $p_n = 0,5$. D'après le tableau de valeurs précédent, la demi-vie se trouve entre $n = 1$ et $n = 2$.

Ce modèle n'est donc pas vraiment crédible car après 2 ans d'existence de la chaîne, la probabilité que Norman ait fait plus de 10 vidéos était sans doute plus grande que 0,5.

Le Pr Mat Reesse peut donc aller se rhabiller...