

Baccalauréat Série ES

Nouvelle Calédonie Mars 2011

Stéphane PASQUET
<http://www.mathweb.fr>
contact@mathweb.fr

2 mai 2011

Exercice 1 (5 points) Commun à tous les candidats

Lors d'un sondage organisé dans différents pays de l'Union Européenne sur une population comportant 52 % de femmes et 48 % d'hommes, on a posé la question suivante : « Qu'est-ce qui renforcerait le plus votre sentiment d'être un citoyen européen ? »

31 % des femmes interrogées et 34 % des hommes interrogés ont répondu qu'un système européen de protection sociale serait l'élément qui renforcerait le plus leur sentiment d'être un citoyen européen.

(Source : « le futur de l'Europe », Commission Européenne, sondage réalisé en mars 2006)

On prélève au hasard la réponse d'une personne prise au hasard parmi les réponses des personnes interrogées lors de ce sondage.

On appelle :

- H : l'évènement « la réponse est celle d'un homme ».
- F : l'évènement « la réponse est celle d'une femme ».
- S : l'évènement « la réponse est un système de protection social européen ».

1. Dessiner un arbre pondéré traduisant la situation.
2. Calculer la probabilité qu'une réponse du sondage soit celle d'un homme souhaitant avoir un système de protection social européen. On donnera la valeur exacte.
3. Montrer que la probabilité de l'évènement S est 0,324 4.
4. Sachant que la personne souhaite avoir un système de protection social européen, calculer la probabilité, arrondie au millièème, que ce soit une femme.
5. On choisit au hasard trois réponses de ce sondage.

On admet que le nombre de réponses est suffisamment grand pour assimiler le choix de trois réponses à des tirages successifs indépendants avec remise Déterminer la probabilité qu'au moins deux des trois réponses soient « avoir un système de protection social européen ». On arrondira le résultat au millièème.

Exercice 2 (3 points) Commun à tous les candidats

Cet exercice est un QCM (Questionnaire à Choix Multiples). Chaque question admet une seule réponse exacte : a, b ou c.

Pour chacune des questions, indiquer sur la copie le numéro de la question et recopier la réponse choisie.

Barème : une bonne réponse rapporte 1 point. Une mauvaise réponse enlève 0,25 point. L'absence de réponse ne rapporte et n'enlève aucun point. Si le total des points est négatif, la note globale attribuée à l'exercice est ramenée à 0.

Soit f la fonction définie pour tout réel x appartenant à $\left]-\frac{1}{2}; 5\right]$ par

$$f(x) = -x + 2 + \ln(2x + 1)$$

et soit $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal.

1. $\mathcal{C}$ admet une tangente horizontale au point :

(a) (a) $A\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2} + \ln 2\right)$

(b) (b) $B(0; 2)$

(c) (c) $C\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2} + \ln 2\right)$

2. La limite de f en $-\frac{1}{2}$ est égale à :

(a) (a) $\frac{5}{2}$

(b) (b) $-\infty$

(c) (c) $+\infty$

3. Le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$ dans l'intervalle $\left]-\frac{1}{2}; 5\right]$ est égal à :

(a) (a) 0

(b) (b) 1

(c) (c) 2

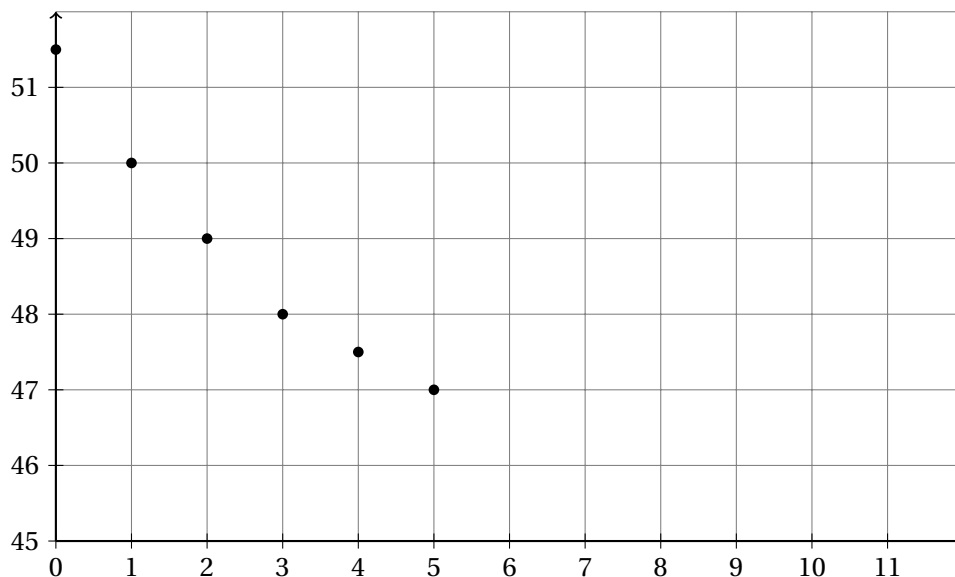
Exercice 3 (5 points) Commun à tous les candidats

Le tableau ci-dessous donne le nombre de clients ayant fréquenté un restaurant donné pour la période 2000 - 2005.

Chaque année est remplacée par son rang x_i et le nombre de clients correspondant y_i est donné en centaines.

Année	2000	2001	2002	2003	2004	2005
Rang x_i	0	1	2	3	4	5
Nombre y_i	51,5	50	49	48	47,5	47

Le graphique ci-dessous donne le nuage de points $(x_i; y_i)$ avec i compris entre 0 et 5.



PARTIE A

1. Déterminer à l'aide de la calculatrice l'équation $y = ax + b$ de la droite D d'ajustement de y en x par la méthode des moindres carrés.

Les coefficients a et b seront arrondis au centième. Aucune justification n'est demandée.

2. Tracer la droite D dans le repère de l'annexe 1.

3. En utilisant ce modèle, quel nombre de clients pouvait-on prévoir pour les années 2006 et 2007 ?

Partie B

Une étude plus récente a permis d'obtenir le nombre de clients pour la période 2006 - 2009. Ces résultats sont donnés dans le tableau suivant :

Année	2006	2007	2008	2009
Rang x_i	6	7	8	9
Nombre y_i	47	47,2	47,5	47,9

- À l'aide de ces valeurs compléter le nuage de points de coordonnées $(x_i ; y_i)$ de la série statistique sur le document de l'annexe 1.
 - Le modèle d'ajustement trouvé dans la partie A vous paraît-il pertinent pour la période 2006-2009 ? Justifier la réponse.
- On considère la fonction f définie sur $[0 ; 9]$ par

$$f(x) = 2x + 15 + e^{-0,1x+3,6}.$$

On choisit un nouveau modèle d'évolution : on prend le nombre $f(x)$ comme estimation du nombre de centaines de clients de ce restaurant au cours de l'année $2000 + x$.

- Calculer $f(7)$.
Le choix de ce modèle d'évolution semble-t-il pertinent pour l'année 2007 ?
- D'après ce modèle d'évolution, à combien peut-on estimer le nombre de clients qui fréquenteront le restaurant en 2010 ? (*On donnera le résultat arrondi à la centaine de clients*).

Exercice 4 (7 points) Commun à tous les candidats

L'entreprise CoTon produit du tissu en coton. Celui-ci est fabriqué en 1 mètre de large et pour une longueur x exprimée en kilomètre, x étant compris entre 0 et 10.

Le coût total de production en euros de l'entreprise CoTon est donné en fonction de la longueur x par la formule

$$C(x) = 15x^3 - 120x^2 + 500x + 750.$$

Le graphique de l'annexe 2 donne la représentation graphique de la fonction C .

Les deux parties A et B de cet exercice sont indépendantes

PARTIE A : ÉTUDE DU BÉNÉFICE

Si le marché offre un prix p en euros pour un kilomètre de ce tissu, alors la recette de l'entreprise CoTon pour la vente d'une quantité x est égal à $R(x) = px$.

- Tracer sur le graphique de l'annexe 2 la droite D_1 d'équation $y = 400x$.
Expliquer, au vu de ce tracé, pourquoi l'entreprise CoTon ne peut pas réaliser un bénéfice si le prix p du marché est égal à 400 euros.
- Dans cette question on suppose que le prix du marché est égal à 680 euros.
 - Tracer sur le graphique de l'annexe 2 la droite D_2 d'équation $y = 680x$.
Déterminer graphiquement, avec la précision permise par le graphique, pour quelles quantités produites et vendues, l'entreprise CoTon réalise un bénéfice si le prix p du marché est de 680 euros.

(b) On considère la fonction B définie sur l'intervalle $[0; 10]$ par

$$B(x) = 680x - C(x).$$

Démontrer que pour tout x appartenant à l'intervalle $[0; 10]$ on a :

$$B'(x) = -45x^2 + 240x + 180.$$

(c) Étudier les variations de la fonction B sur $[0; 10]$.

En déduire pour quelle quantité produite et vendue le bénéfice réalisé par l'entreprise CoTon est maximum. Donner la valeur de ce bénéfice.

PARTIE B : ÉTUDE DU COÛT MOYEN

On rappelle que le coût moyen de production C_M mesure le coût par unité produite. On considère la fonction C_M définie sur l'intervalle $[0; 10]$ par

$$C_M(x) = \frac{C(x)}{x}.$$

1. Démontrer que pour tout x appartenant à l'intervalle $]0; 10]$ on a :

$$C'_M(x) = \frac{30(x-5)(x^2+x+5)}{x^2}.$$

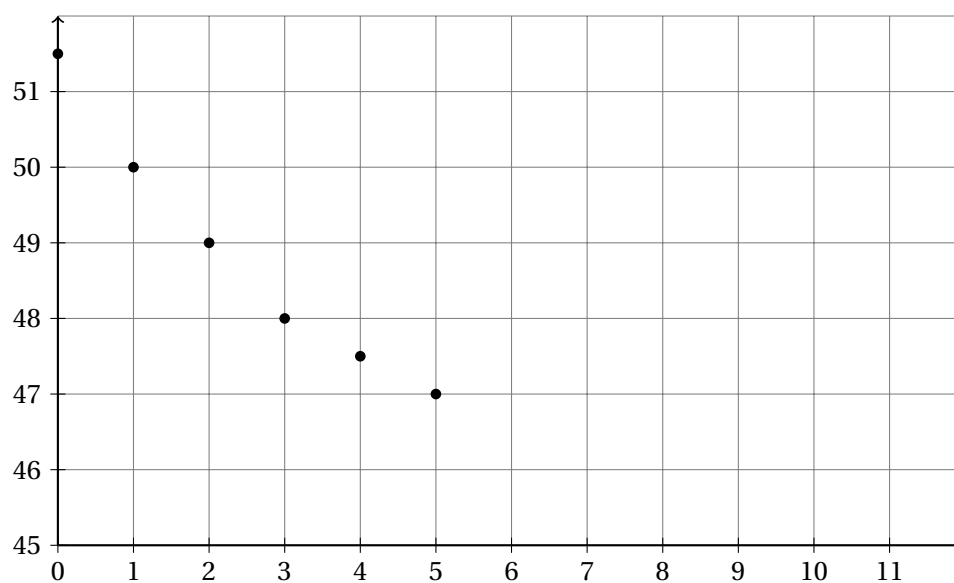
2. (a) Démontrer que pour tout x appartenant à l'intervalle $]0; 10]$, $C'_M(x)$ est du signe de $(x-5)$.

En déduire les variations de la fonction C_M sur l'intervalle $]0; 10]$.

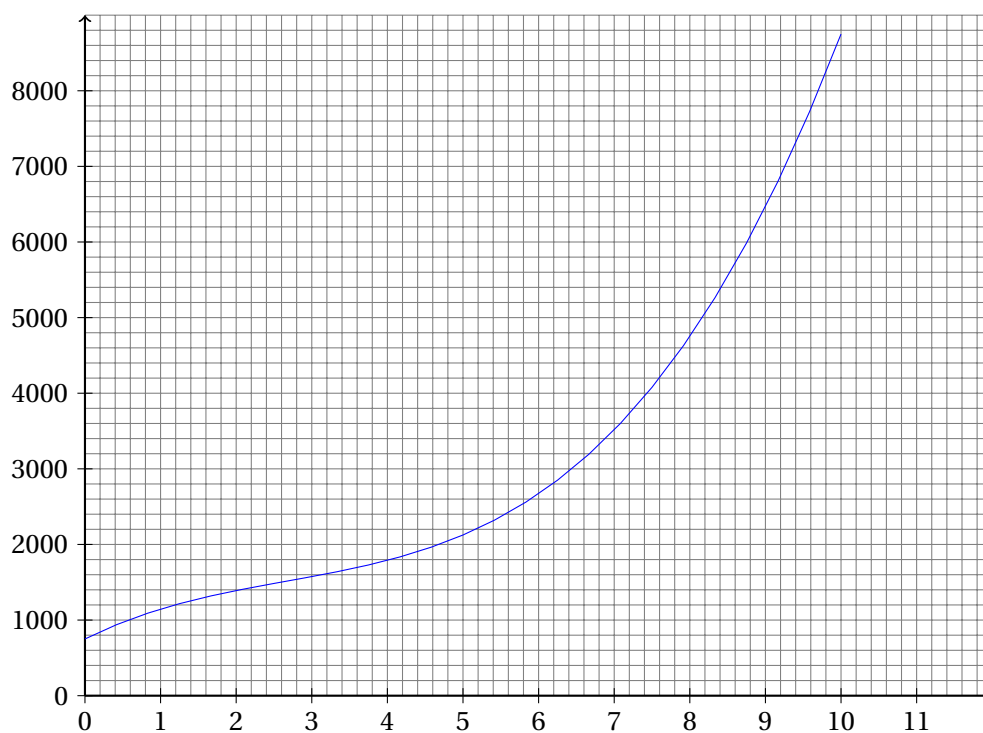
(b) Pour quelle quantité de tissu produite le coût moyen de production est-il minimum ?

Que valent dans ce cas le coût moyen de production et le coût total ?

Annexe 1 (exercice 3) – à rendre avec la copie



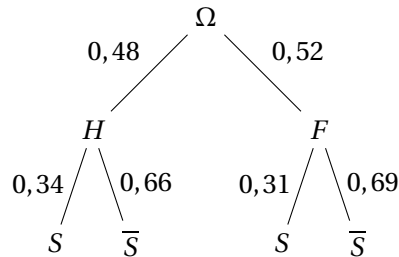
Annexe 2 (exercice 4) – à rendre avec la copie



CORRECTION

Exercice 1 Commun à tous les candidats

1. L'arbre pondéré traduisant la situation est le suivant :



2. La probabilité demandé est :

$$p(H \cap S) = 0,48 \times 0,34 = 0,1632$$

3. La formule des probabilités totales nous donne :

$$p(S) = p(H \cap S) + p(F \cap S) = 0,1632 + 0,52 \times 0,31 = 0,1768 + 0,1612 = 0,3244$$

4. On a :

$$p_S(F) = \frac{p(F \cap S)}{p(S)} = \frac{0,52 \times 0,31}{0,3244} = 0,497$$

5. Notons X la variable aléatoire représentant le nombre de personnes ayant répondu « avoir un système de protection social européen ». Alors X suit une loi binomiale de paramètre $p = p(S) = 0,3244$ et $n = 3$.
On cherche à calculer $p(X \geq 2)$ soit $p(X = 2) + p(X = 3)$.

La loi de probabilité de X est donnée par le tableau suivant :

x_i	0	1	2	3
$p(X = x_i)$	0,6756	0,444202892352	0,213291027648	0,034138350784

On rappelle que $p(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

Ainsi, $p(X \geq 2) = 0,213291027648 + 0,034138350784 \approx 0,247$.

Exercice 2 Commun à tous les candidats

1. La dérivée de f est : $f'(x) = -1 + \frac{2}{2x+1} = \frac{1-2x}{2x+1}$. Elle s'annule en changeant de signe pour $x = \frac{1}{2}$. De plus, $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2} + \ln 2$.

La réponse correcte est donc la réponse (a).

2. On sait que $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} (2x+1) = 0$ et $\lim_{X \rightarrow 0} \ln X = -\infty$. Donc $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \ln(2x+1) = -\infty$.

De plus, $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} (-x+2) = \frac{3}{2}$ donc $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f(x) = -\infty$.

La réponse correcte est donc la réponse (b).

3. $f'(x) < 0$ sur $]-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}[$ et $f'(x) > 0$ sur $]\frac{1}{2}; 5[$. De plus, $f\left(\frac{1}{2}\right) > 0$ donc $f(x) > 0$ sur $]-\frac{1}{2}; 5[$. Donc l'équation $f(x) = 0$ n'admet aucune solution sur ce dernier intervalle.

La réponse correcte est donc la réponse (a).

Exercice 3 Commun à tous les candidats

PARTIE A

1. La calculatrice nous donne :

$$y = -0,89x + 51,05$$

2. Voir graphique en fin d'exercice (en rouge).
3. Pour l'année 2006, on remplace x par 1 dans l'équation précédente :

$$y = 0,89 \times 1 + 51,05 = 51,94$$

On pouvait donc prévoir 5 194 clients en 2006.

Pour 2007 :

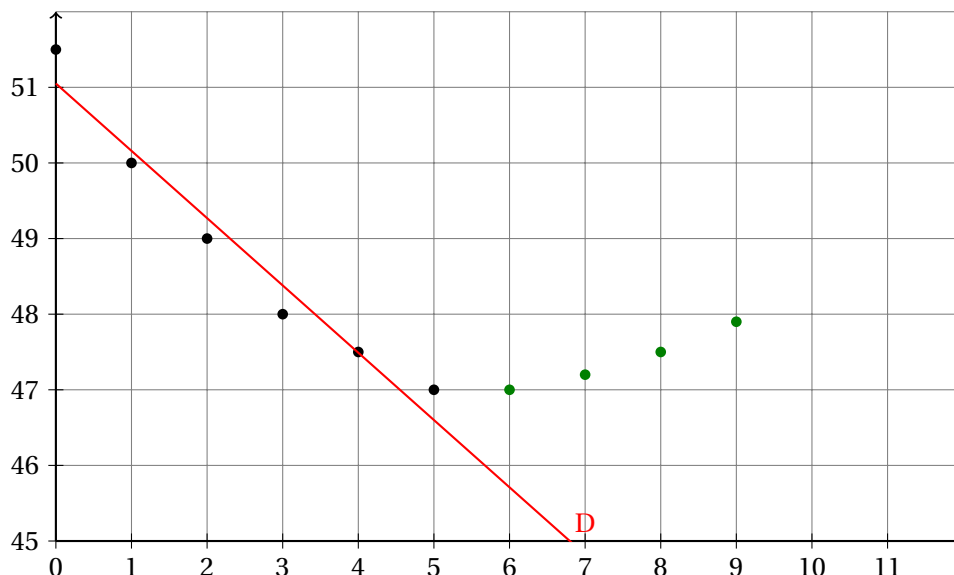
$$y = 0,89 \times 2 + 51,05 = 52,83$$

On pouvait donc prévoir 5 283 clients en 2007.

PARTIE B

1. (a) Voir graphique. (points en vert)
(b) Le modèle précédent ne semble pas approprié car le nombre de clients augmente après 2005 (et donc, ne continue pas à diminuer).
2. (a) $f(7) = 14 + 15 + e^{-0,7+3,6} \approx 47,17$. Ce résultat est très proche du nombre de clients en 2007 donc ce modèle semble a priori pertinent.
(b) $f(10) = 35 + e^{2,6} \approx 48,46$. On peut donc espérer 4 846 clients en 2010.

Annexe 1 (exercice 3) – à rendre avec la copie



Exercice 4 Commun à tous les candidats

PARTIE A

1. Voir graphique en fin d'exercice (droite en rouge).
Nous pouvons voir que D_1 est sous la courbe sans jamais la toucher, ce qui signifie que le coût est toujours supérieur à la recette. Le bénéfice est donc négatif.

2. (a) Voir graphique (droite en vert). La société réalise un bénéfice quand la droite D_2 est au-dessus de la courbe représentant le coût, c'est-à-dire si $x \in [2, 1; 8, 7]$ (approximativement).
- (b) $B(x) = 680x - C(x) = -15x^3 + 120x^2 + 180x - 750$ donc $B'(x) = -15 \times 3x^2 + 120 \times 2x + 180 \times 1 = -45x^2 + 240x + 180$.
- (c) Calculons le discriminant de $B'(x)$:

$$\Delta = 240^2 - 4 \times (-45) \times 180 = 90000 = 300^2$$

Donc $B'(x)$ admet deux racines distinctes :

$$x_1 = \frac{-240 - 300}{-90} = 6 \quad ; \quad x_- = \frac{-240 + 300}{-90} = -\frac{2}{3}$$

Ainsi, on a le tableau suivant :

x	0	6	10	
$B'(x)$		+	0	-
B				

Ainsi, le bénéfice atteint son maximum pour $x = 6$, c'est-à-dire pour 6 km de tissu. Là, le bénéfice est alors égal à $B(6) = 2670$, soit 2 670 €.

PARTIE B

1. On a :

$$C_m(x) = \frac{C(x)}{x}$$

Donc :

$$C'_m(x) = \frac{xC'(x) - C(x)}{x^2}$$

$$C'_m(x) = \frac{45x^3 - 240x^2 + 500x - 15x^3 + 120x^2 - 500x - 750}{x^2}$$

$$C'_m(x) = \frac{30x^3 - 120x^2 - 750}{x^2}$$

De plus, en développant, on a :

$$\frac{30(x-5)(x^2+x+5)}{x^2} = \frac{30(x^3+x^2+5x-5x^2-5x-25)}{x^2} = \frac{30(x^3-4x^2-25)}{x^2} = C'_m(x)$$

2. (a) Le discriminant du polynôme $x^2 + x + 5$ est égal à -19 , donc négatif : par conséquent, il n'admet aucune racine réelle et est du signe du coefficient de x^2 , donc positif.
« 30 » étant positif, ainsi que x^2 , $C'_m(x)$ est donc du signe de $x - 5$. D'où le tableau suivant :

x	0	5	10
$C'_m(x)$	-	0	+
C_m			

(b) Le coût moyen est minimum pour $x = 5$, soit 5 kilomètres de tissu.

Là, il est égal à $C_m(5) = \frac{C(5)}{5} = \frac{2125}{5} = 425$ €.

Le coût total est alors égal à 2 125 €.

Annexe 2 (exercice 4) – à rendre avec la copie

