

Baccalauréat Série ES

Pondichéry 2011

Stéphane PASQUET
<http://www.mathweb.fr>
contact@mathweb.fr

1^{er} mai 2011

Exercice 1 (5 points) Commun à tous les candidats

Un restaurant propose à sa carte deux types de dessert :

- un assortiment de macarons, choisi par 50% des clients ;
- une part de tarte tatin, choisie par 30% des clients.

20% des clients ne prennent pas de dessert et aucun client ne prend plusieurs desserts.

Le restaurateur a remarqué que :

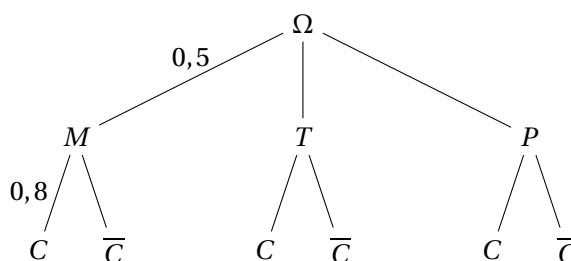
- parmi les clients ayant pris un assortiment de macarons, 80% prennent un café ;
- parmi les clients ayant pris une part de tarte tatin, 60% prennent un café ;
- parmi les clients n'ayant pas pris de dessert, 90% prennent un café.

On interroge au hasard un client de ce restaurant. On note p la probabilité associée à cette expérience aléatoire.

On note :

- M l'évènement : « Le client prend un assortiment de macarons » ;
- T l'évènement : « Le client prend une part de tarte tatin » ;
- P l'évènement : « Le client ne prend pas de dessert » ;
- C l'évènement : « Le client prend un café » et $\bar{C}$ l'évènement contraire de C .

1. En utilisant les données de l'énoncé, préciser la valeur de $p(T)$ et celle de $P_T(C)$, probabilité de l'évènement C sachant que T est réalisé.
2. Recopier et compléter l'arbre ci-dessous :



3. (a) Exprimer par une phrase ce que représente l'évènement $M \cap C$ puis calculer $p(M \cap C)$.
(b) Montrer que $p(C) = 0,76$.
4. Quelle est la probabilité que le client prenne un assortiment de macarons sachant qu'il prend un café ?
(On donnera le résultat arrondi au centième).

5. Un assortiment de macarons est vendu 6 €, une part de tarte tatin est vendue 7 €, et un café est vendu 2 €.

Chaque client prend un plat (et un seul) au prix unique de 18 €, ne prend pas plus d'un dessert ni plus d'un café.

- (a) Quelles sont les six valeurs possibles pour la somme totale dépensée par un client ?
 (b) Reproduire et compléter le tableau ci-dessous donnant la loi de probabilité de la somme totale dépensée par un client :

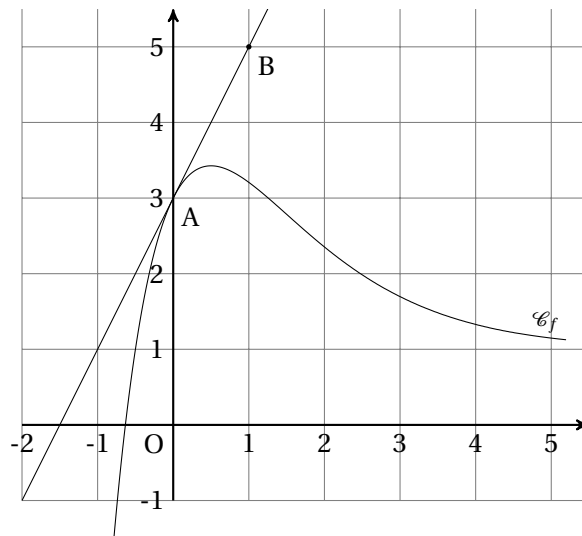
Sommes s_i	18	20	24	...	...	...
$p(s_i)$	0,02	0,18	...			

- (c) Calculer l'espérance mathématique de cette loi et interpréter ce résultat.

Exercice 2 (4 points) Commun à tous les candidats

La courbe $\mathcal{C}_f$ tracée ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On note f' la fonction dérivée de f .

- La tangente T à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point $A(0;3)$ passe par le point $B(1;5)$.
- La droite D d'équation $y = 1$ est asymptote horizontale à la courbe $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.



- En utilisant les données et le graphique, préciser :
 - La valeur du réel $f(0)$ et la valeur du réel $f'(0)$.
 - La limite de la fonction f en $+\infty$.
- Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A .
- Préciser un encadrement par deux entiers consécutifs de l'aire, en unités d'aire, de la partie du plan située entre la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 1$.
- On admet que la fonction f est définie, pour tout nombre réel x , par une expression de la forme $f(x) = 1 + \frac{ax+b}{e^x}$, où a et b sont des nombres réels.
 - Déterminer l'expression de $f'(x)$ en fonction de a , de b et de x .
 - A l'aide des résultats de la question 1. a., démontrer que l'on a, pour tout réel x :

$$f(x) = 1 + \frac{4x+2}{e^x}.$$

5. Soit F la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = x + \frac{-4x-6}{e^x}$. On admet que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Déterminer la valeur exacte puis une valeur approchée à 10^{-2} près de l'aire, en unités d'aire, de la partie du plan située entre la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 1$.

Ce résultat est-il cohérent avec l'encadrement obtenu à la question 3. ?

Exercice 3 (5 points) Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le responsable d'un site Internet s'intéresse au nombre de pages visitées sur son site chaque semaine.

PARTIE A

Le tableau ci-dessous donne le nombre de pages visitées, exprimé en milliers, durant chacune des quatre semaines suivant l'ouverture du site.

Semaine $x_i, 1 \leq i \leq 4$	1	2	3	4
Nombre de pages visitées en milliers : $y_i, 1 \leq i \leq 4$	40	45	55	70

Ainsi, au cours de la deuxième semaine après l'ouverture du site, 45 000 pages ont été visitées.

- Le nuage de points $M_i(x_i; y_i)$ associé à cette série statistique est représenté en annexe 1 dans un repère orthogonal. L'allure de ce nuage suggère un ajustement affine.
 - Déterminer les coordonnées du point moyen G de ce nuage puis placer ce point sur le graphique de l'annexe 1.
 - On appelle (d) la droite d'ajustement de y en x obtenue par la méthode des moindres carrés. Parmi les deux propositions ci-dessous, une seule correspond à l'équation réduite de la droite (d) . Préciser laquelle, en utilisant le point moyen G :

$$y = 9x + 29 \quad y = 10x + 27,5$$

- Tracer la droite (d) sur le graphique de l'annexe 1.
- En supposant que cet ajustement reste valable pendant les deux mois qui suivent l'ouverture du site, donner une estimation du nombre de pages visitées au cours de la huitième semaine suivant l'ouverture du site.

PARTIE B

Le responsable décide de mettre en place, au cours de la quatrième semaine suivant l'ouverture du site, une vaste campagne publicitaire afin d'augmenter le nombre de visiteurs du site.

Il étudie ensuite l'évolution du nombre de pages du site visitées au cours des trois semaines suivant cette opération publicitaire.

Le tableau ci-dessous donne le nombre de pages visitées au cours des sept semaines suivant l'ouverture du site.

Semaine $x_i, 1 \leq i \leq 7$	1	2	3	4	5	6	7
Nombre de pages visitées en milliers : $y_i, 1 \leq i \leq 7$	40	45	55	70	95	125	175

- Compléter le nuage de points fourni dans l'annexe 1 par les trois nouveaux points définis dans le tableau précédent.
Compte tenu de l'allure du nuage, un ajustement exponentiel semble approprié.
Pour cela on pose $z = \ln y$.

2. On donne ci-dessous les valeurs de $z_i = \ln(y_i)$ pour $1 \leq i \leq 7$, les résultats étant arrondis au centième.

Semaine $x_i, 1 \leq i \leq 7$	1	2	3	4	5	6	7
$z_i = \ln(y_i), 1 \leq i \leq 7$	3,69	3,81	4,01	4,25	4,55	4,83	5,16

(a) A l'aide de la calculatrice, déterminer une équation de la droite d'ajustement de z en x obtenue par la méthode des moindres carrés.

On donnera la réponse sous la forme $z = ax + b$, en arrondissant les coefficients a et b au centième.

(b) En déduire la relation $y = ae^{\beta x}$, où 27,94 et 0,25 sont des valeurs approchées au centième des réels α et β respectivement.

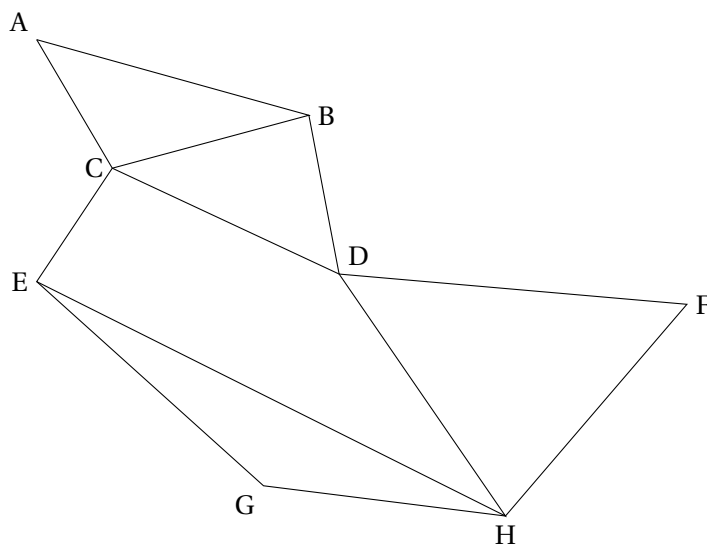
(c) A l'aide de ce nouvel ajustement, donner une estimation du nombre de pages visitées au cours de la huitième semaine suivant l'ouverture du site.

Combien de semaines auraient été nécessaires pour atteindre ce résultat sans campagne publicitaire? (on utilisera l'ajustement obtenu dans la **partie A**).

Exercice 3 (5 points) Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Un orchestre doit effectuer une tournée passant par les villes A, B, C, D, E, F, G et H, en utilisant le réseau autoroutier.

Le graphe Γ ci-dessous représente les différentes villes de la tournée et les autoroutes reliant ces villes (une ville est représentée par un point, une autoroute par une arête) :



1. Est-il possible d'organiser la tournée en passant au moins une fois par chaque ville, tout en empruntant une fois et une seule chaque tronçon d'autoroute? (la réponse sera justifiée).

Si oui citer un trajet de ce type.

2. On appelle M la matrice associée au graphe Γ (les sommets étant pris dans l'ordre alphabétique).

On donne la matrice M^3 :

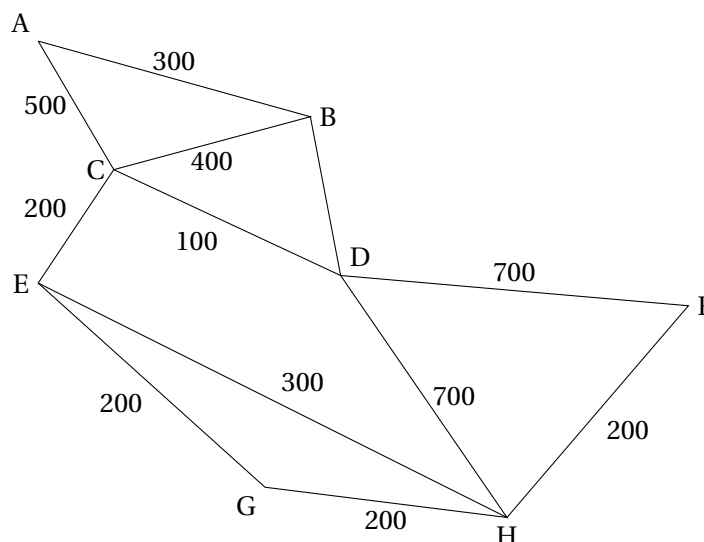
$$M^3 = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 & 2 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 5 & 4 & 6 & 7 & 3 & 2 & 2 & 3 \\ 6 & 6 & 4 & 9 & 7 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 7 & 9 & 4 & 3 & 5 & 3 & 8 \\ 1 & 3 & 7 & 3 & 2 & 3 & 4 & 7 \\ 2 & 2 & 3 & 5 & 3 & 2 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 2 & 3 & 4 & 2 & 2 & 5 \\ 3 & 3 & 3 & 8 & 7 & 5 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

Combien existe-t-il de chemins de longueur 3 reliant B à H ? (la réponse devra être justifiée).

Préciser ces chemins.

3. Des contraintes de calendrier imposent en fait d'organiser un concert dans la ville F immédiatement après un concert dans la ville A.

Le graphe Γ est complété ci-dessous par les longueurs en kilomètres de chaque tronçon (les longueurs des segments ne sont pas proportionnelles aux distances).



Déterminer, en utilisant un algorithme dont on citera le nom, le trajet autoroutier le plus court (en kilomètres) pour aller de A à F.

Préciser la longueur en kilomètres de ce trajet.

Exercice 4 (6 points) Commun à tous les candidats

Un laboratoire pharmaceutique fabrique un médicament qu'il commercialise sous forme liquide. Sa capacité journalière de production est comprise entre 25 et 500 litres, et on suppose que toute la production est commercialisée.

Dans tout l'exercice, les coûts et recettes sont exprimés en milliers d'euros, les quantités en centaines de litres.

Si x désigne la quantité journalière produite, on appelle $C_T(x)$, pour x variant de 0,25 à 5, le coût total de production correspondant.

La courbe Γ_1 fournie en **annexe 2** est la représentation graphique de la fonction C_T sur l'intervalle $[0,25; 5]$.

La tangente à Γ_1 au point $A(1; 1)$ est horizontale.

PARTIE A

1. (a) On admet que la recette $R(x)$ (en milliers d'euros) résultant de la vente de x centaines de litres de médicament, est définie sur $[0,25; 5]$ par

$$R(x) = 1,5x.$$

Quelle est la recette (en euros) pour 200 litres de médicament vendus ?

- (b) Tracer, sur le graphique fourni en **annexe 2**, le segment représentant graphiquement la fonction R .

2. Lectures graphiques

Les questions a., b., c. suivantes seront résolues à l'aide de lectures graphiques seulement. On fera apparaître les traits de construction sur le graphique en annexe 2.

Toute trace de recherche même non aboutie sera prise en compte.

- (a) Déterminer des valeurs approximatives des bornes de la « plage de rentabilité », c'est-à-dire de l'intervalle correspondant aux quantités commercialisées dégagant un bénéfice positif.
- (b) Donner une valeur approximative du bénéfice en euros réalisé par le laboratoire lorsque 200 litres de médicament sont commercialisés.
- (c) Pour quelle quantité de médicament commercialisée le bénéfice paraît-il maximal ?
À combien peut-on évaluer le bénéfice maximal obtenu ?

PARTIE B

Dans la suite de l'exercice, on admet que la fonction coût total C_T est définie sur l'intervalle $[0,25; 5]$ par

$$C_T(x) = x^2 - 2x \ln(x).$$

1. Justifier que le bénéfice, en milliers d'euros, réalisé par le laboratoire pour x centaines de litres commercialisés, est donné par :

$$B(x) = 1,5x - x^2 + 2x \ln(x).$$

Calculer $B(2)$, et comparer au résultat obtenu à la question 2. b. de la **partie A**.

2. On suppose que la fonction B est dérivable sur l'intervalle $[0,25; 5]$ et on note B' sa fonction dérivée. Montrer que $B'(x) = 2 \ln(x) - 2x + 3,5$.
3. On donne ci-dessous le tableau de variation de la fonction B' , dérivée de la fonction B , sur l'intervalle $[0,25; 5]$:

x	0	25	1	5
$B'(x)$	y_1	1.5	y_2	

On précise les encadrements : $0,22 < y_1 < 0,23$ et $-3,29 < y_2 < -3,28$.

- (a) Démontrer que l'équation $B'(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[0,25; 5]$.

Pour la suite de l'exercice, on prendra 2,77 pour valeur approchée de α .

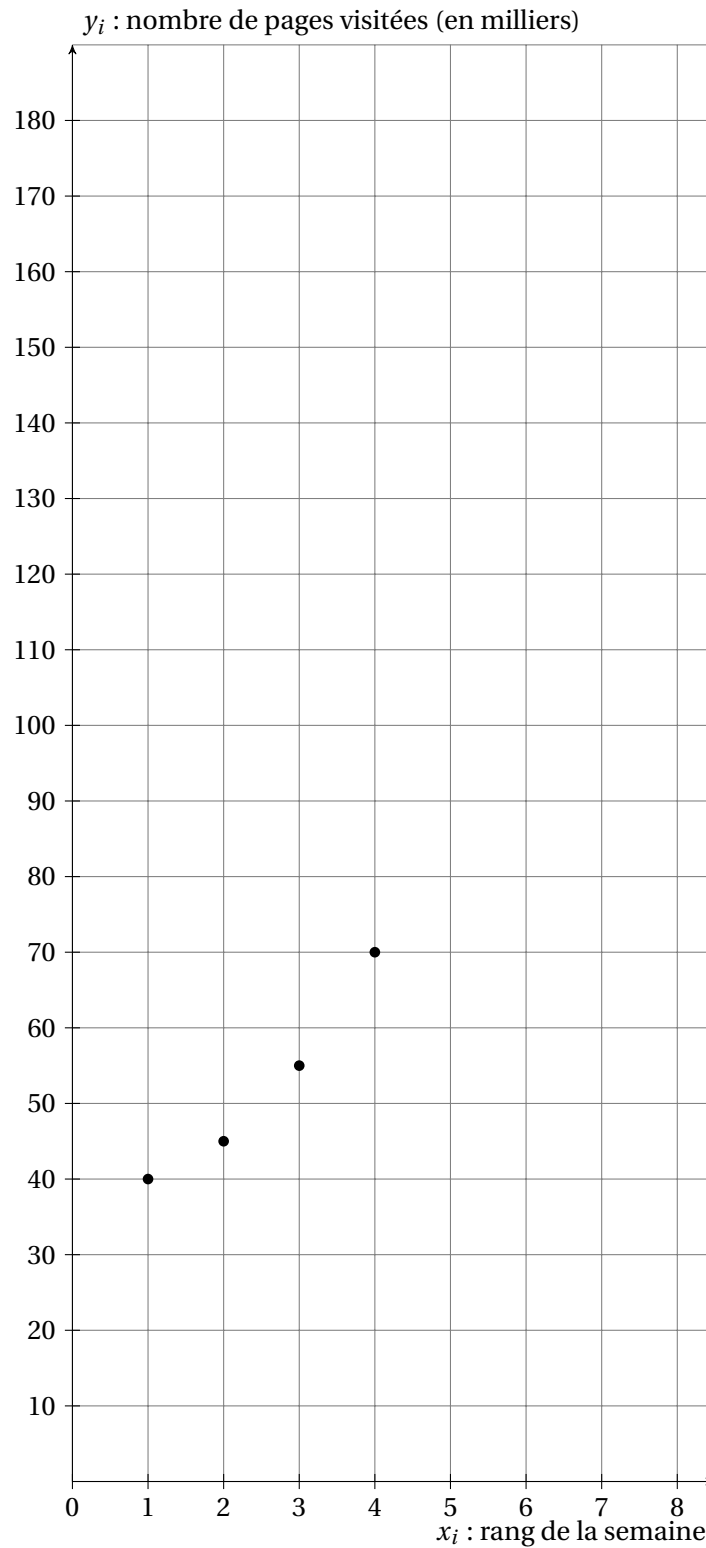
- (b) Dresser le tableau précisant le signe de $B'(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $[0,25 ; 5]$.
En déduire le tableau de variations de la fonction B sur l'intervalle $[0,25 ; 5]$.
4. (a) Pour quelle quantité de médicament commercialisée, le bénéfice est-il maximal ? (On donnera une valeur approchée de cette quantité en litres). Donner alors une valeur approchée en euros de ce bénéfice maximal.
- (b) Ces résultats sont-ils cohérents avec ceux obtenus graphiquement à la question 2. c. de la partie A ?

ANNEXE 1

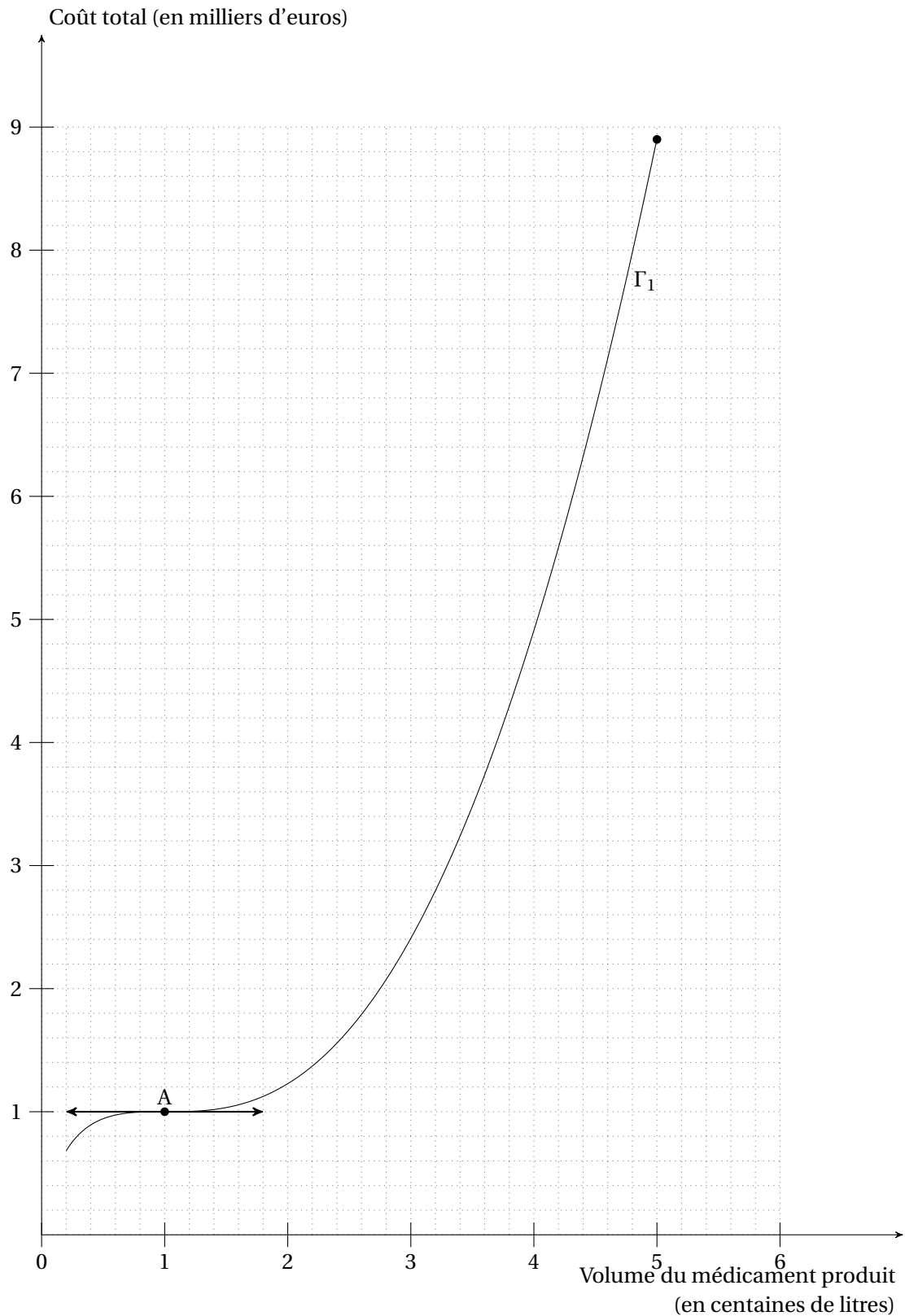
Exercice 3

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

A rendre avec la copie



ANNEXE 2
Exercice 4
A rendre avec la copie



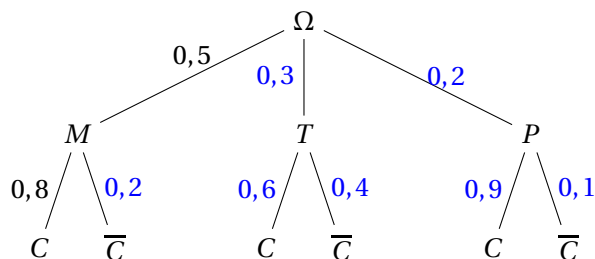
CORRECTION

Exercice 1 Commun à tous les candidats

1. D'après l'énoncé, on peut dire que :

$$p(T) = 0,3 \quad ; \quad P_T(C) = 0,6$$

2. On a :



3. (a) $M \cap C$ représente l'évènement « Le client prend un assortiment de macarons et un café ».

D'après l'arbre de probabilités, on a : $p(M \cap C) = 0,5 \times 0,8 = \underline{0,4}$

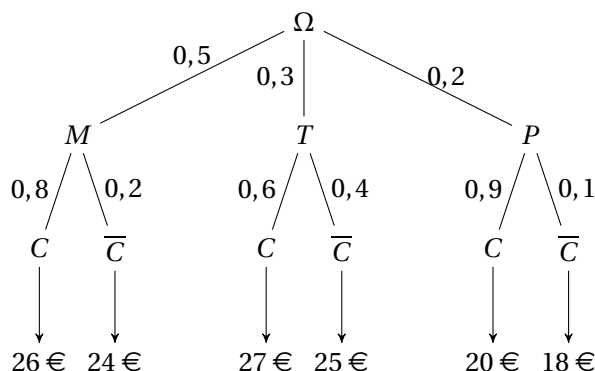
(b) D'après la formule des probabilités totales, on a :

$$p(C) = p(M \cap C) + p(T \cap C) + p(P \cap C) = 0,4 + 0,3 \times 0,6 + 0,2 \times 0,9 = 0,4 + 0,18 + 0,18 = \underline{0,76}$$

4. La probabilité que le client prenne un assortiment de macarons sachant qu'il prend un café est :

$$P_C(M) = \frac{M \cap C}{p(C)} = \frac{0,4}{0,76} \approx \underline{0,53}$$

5. Mettons les différentes sommes possibles sur l'arbre de probabilités :



(a) On a :

Sommes s_i	18	20	24	25	26	27
$p(s_i)$	0,02	0,18	0,1	0,12	0,4	0,18

(b) L'espérance mathématique de cette loi est :

$$18 \times 0,02 + 20 \times 0,18 + 24 \times 0,1 + 25 \times 0,12 + 26 \times 0,4 + 27 \times 0,18 = 24,62$$

Ainsi, le restaurateur peut espérer gagner en moyenne 24,62 € par client.

Exercice 2 Commun à tous les candidats

1. (a) Par lecture graphique, on trouve $f(0) = 3$ et $f'(0) = 2$.

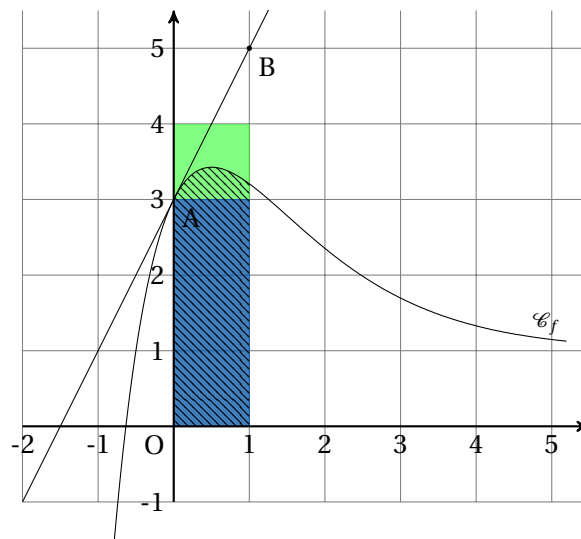
(b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$

2. L'équation de la tangente est donnée par la formule :

$$y = f'(0)(x - 0) + f(0)$$

$$y = 2x + 3$$

3. On a :



L'aire de la partie du plan délimitée par $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 1$ (hachuré ci-dessus) est plus grande que celle du rectangle bleu et plus petite que celle du rectangle vert (tout deux de base 1). Donc, elle est comprise entre 3 et 4.

4. (a) Si $f(x) = 1 + \frac{ax+b}{e^x}$, alors $f'(x) = \frac{ae^x - (ax+b)e^x}{e^{2x}} = \frac{a-b-ax}{e^x}$.

(b) On sait que $f'(0) = 2$ donc $\frac{a-b-a \times 0}{e^0} = 2$, soit $a - b = 2$.

De plus, $f(0) = 3$ donc $1 + \frac{a \times 0 + b}{e^0} = 3$, d'où $1 + b = 3$. Ainsi, $b = 2$ et donc $a = 2 + b = 2 + 2 = 4$. d'où :

$$f(x) = 1 + \frac{4x+2}{e^x}$$

5. L'aire concernée est :

$$\int_0^1 f(x) dx = F(1) - F(0) = 1 + \frac{-4-6}{e^1} - \frac{-6}{e^0} = 1 - \frac{10}{e} + 6 = 7 - 10e^{-1} \approx 3,32$$

Ce dernier résultat est cohérent avec celui trouvé précédemment car il est bien compris entre 3 et 4.

Exercice 3 (5 points) Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

PARTIE A

1. (a) Les coordonnées $(x_G; y_G)$ du point moyen G de la série statistique sont :

$$x_G = \frac{1+2+3+4}{4} = 2,5 \quad ; \quad y_G = \frac{40+45+55+70}{4} = 52,5$$

- (b) On sait que G appartient à la droite obtenue par la méthode des moindres carrés ; ainsi, ses coordonnées doivent vérifier l'équation :

$$y_G = ax_G + b$$

Or :

$$9 \times x_G + 29 = 9 \times 2,5 + 29 = 51,5 \neq y_G$$

et

$$10 \times x_G + 27,5 = 10 \times 2,5 + 27,5 = 52,5$$

Ainsi, l'équation de la droite est $y = 10x + 27,5$.

- (c) Voir graphique en fin d'exercice.

2. Si l'ajustement reste valable les deux mois qui suivent l'ouverture du site, on peut utiliser l'équation de la droite d'ajustement en remplaçant x par 8 afin de trouver y :

$$y = 10 \times 8 + 27,5 = 107,5$$

Ainsi, 107 500 pages auront été visitées au cours de la huitième semaine.

PARTIE B

1. Voir graphique en fin d'exercice (points verts)
2. (a) La calculatrice nous donne :

$$z = 0,25x + 3,33$$

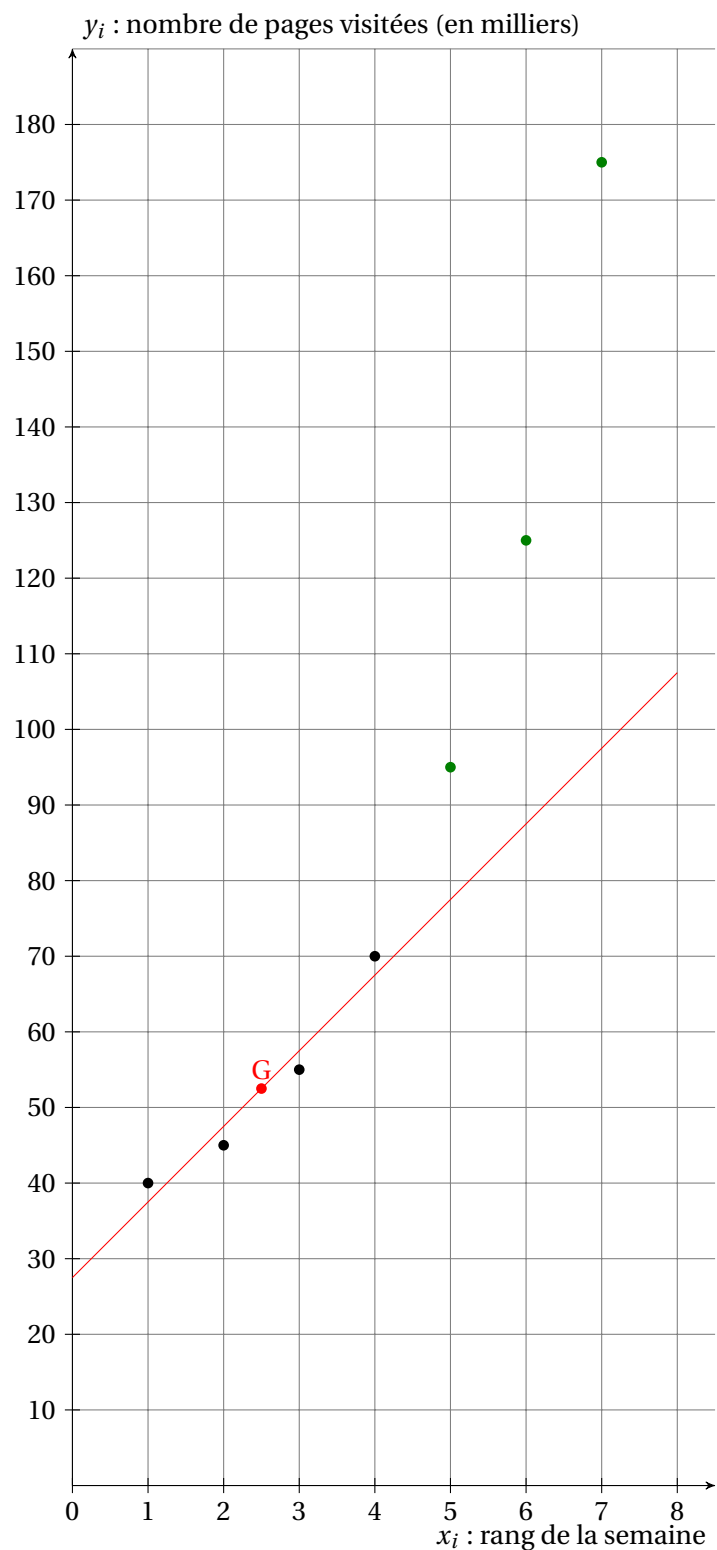
- (b) On sait que $z = \ln y$ donc $e^z = e^{\ln y}$, soit $y = e^z$. Ainsi :

$$z = e^{0,25x+3,33} = e^{0,25x} \times e^{3,33} = 27,94e^{0,25x}$$

- (c) A l'aide de ce nouvel ajustement, en remplaçant x par 8 dans l'équation $y = 27,94e^{0,25x}$, on obtient : $y = 206,45$.

Ainsi, 206 450 visites auront été faites au cours de la huitième semaine.

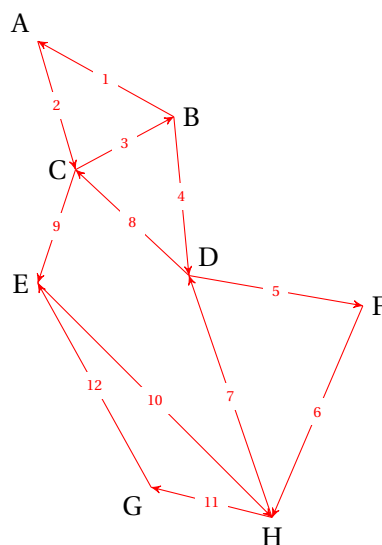
Sans campagne publicitaire, il aurait fallu que $10x + 27,5 = 206,45$, soit $x = \frac{206,45 - 27,5}{10} = 17,895$.
Ainsi, il aurait fallu 18 semaines pour atteindre 206 450 visites sans campagne publicitaire.



Exercice 3 *Candidats ayant suivis l'enseignement de spécialité*

1. Le graphe Γ est connexe (deux sommets quelconques peuvent être reliés par une chaîne) et comporte exactement 2 sommets de degré impair (B et E).

D'après le théorème d'Euler, Γ contient donc une chaîne eulérienne. Par exemple : B ; A ; C ; B ; D ; F ; H ; D ; C ; E ; H ; G ; E ;



2. Par théorème, on sait que « le terme a_{ij} , situé à la $i^{\text{ième}}$ ligne et à la $j^{\text{ième}}$ colonne, de la matrice M^n , où M est la matrice d'un graphe, est égal au nombre de chaînes de longueur n reliant S_i à S_j ».

Ainsi, ici, on lit qu'il y a 3 chemins reliant B à H. Ces chemins sont :

$$B \rightarrow D \rightarrow F \rightarrow H \quad ; \quad B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow H \quad ; \quad B \rightarrow C \rightarrow E \rightarrow H$$

3. On va ici utiliser l'algorithme de Dijkstra .

On a alors le chemin :

$$A \rightarrow C(500) \rightarrow E(700) \rightarrow H(1000) \rightarrow F(1200)$$

La distance à parcourir est donc 1 200 kilomètres.

Exercice 4 Commun à tous les candidats

PARTIE A

1. (a) Si $R(x) = 1,5x$, alors $R(2) = 1,5 \times 2 = 3$ donc la recette sera de 3 000 € pour 200 litres.
(b) Voir graphique en fin d'exercice.
2. (a) Le bénéfice est positif si la recette est supérieure au coût total, ce qui signifie que l'on doit regarder l'intervalle sur lequel Γ_1 est au-dessous de la droite représentant $R(x)$.
On trouve alors l'intervalle $[0, 65; 4, 5]$ (tracé en mauve sur le graphique).
(b) Quand 200 litres sont commercialisés, le bénéfice est donné par $R(2) - C_T(2)$, soit approximativement $3 - 1,2 = 1,8$. Ainsi, le bénéfice est approximativement de 1 800 €.
(c) La distance séparant les deux courbes semble être maximale pour $x = 2,5$, soit pour 250 litres de médicaments commercialisés. Là, le bénéfice maximal serait à peu près de 2 000 €.

PARTIE B

1. Le bénéfice est la différence entre la recette et le coût total. Ainsi, $B(x) = R(x) - C_T(x)$, soit :

$$B(x) = 1,5x - x^2 + 2x \ln x$$

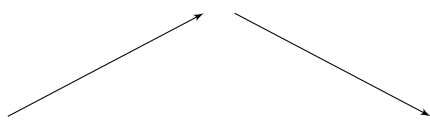
On alors :

$$B(2) = 1,5 \times 2 - 2^2 + 2 \times 2 \ln 2 = 4 \ln 2 - 1 \approx 1,77$$

On avait trouvé à la question 2)b. un bénéfice de 1,8 ; donc le dernier résultat est cohérent.

2. $B'(x) = 1,5 - 2x + 2\left(\ln x + x \times \frac{1}{x}\right) = 1,5 - 2x + 2\ln x + 2 = 3,5 - 2x + 2\ln x$
3. (a) $1,5 > 0$ et $y_2 < 0$; donc $0 \in [y_2; 1,5]$. De plus, B' est dérivable et strictement décroissante sur $[1; 5]$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $b'(x) = 0$ admet une unique solution sur $[1; 5]$, donc a fortiori sur $[,25; 5]$.

(b) On a :

x	0.25	α	5
$B'(x)$	+	0	-
$B(x)$			

4. (a) Le bénéfice est maximal lorsque $x = \alpha \approx 2,77$.
Pour cette valeur de x , on a :

$$B(2,77) \approx 1,5 \times 2,77 - 2,77^2 + 2 \times 2,77 \times \ln 2,77 \approx 2,127$$

Ainsi, pour approximativement 277 litres de médicaments, le bénéfice est d'à peu près 2 127 €.

- (b) Ces résultats ne sont pas très éloignés de ceux émis dans la partie A. (on avait trouvé $x = 2,5$ (au lieu de 2,77) pour un bénéfice de 2 000 € (au lieu de 2 127 €).

