
Sommaire

SUJET	1
Exercice 1. Statistiques (Commun à tous les candidats)	1
Exercice 2. Probabilités (Enseignement obligatoire)	2
Exercice 2. Graphe probabiliste (Enseignement de spécialité)	3
Exercice 3. Lecture graphique, étude d'une fonction exp. (Commun à tous les candidats)	4
Exercice 4. Lecture graphique, équation, primitive (Commun à tous les candidats)	5
CORRECTION	6
Exercice 1. Statistiques (Commun à tous les candidats)	6
Exercice 2. Probabilités (Enseignement obligatoire)	7
Exercice 2. Graphe probabiliste (Enseignement de spécialité)	8
Exercice 3. Lecture graphique, étude d'une fonction exp. (Commun à tous les candidats)	9
Exercice 4. Lecture graphique, équation, primitive (Commun à tous les candidats)	10

Document réalisé le 14 juin 2012.
Disponible sur <http://www.mathweb.fr>

Si une erreur s'est glissée, n'hésitez pas à me contacter par email :
contact@mathweb.fr

Exercice 1 (6 points)**Commun à tous les candidats**

Le tableau ci-dessous donne l'évolution de la population du Nigeria, en millions d'habitants .

	1960	1965	1970	1975	1980	1985	1990	1995	2000	2005
Rang (x_i)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Population en millions (y_i)	45,158	50,414	56,467	63,948	74,523	85,151	97,338	110,449	124,842	140,879

Source : perspective monde, université de Sherbrooke. La banque mondiale

PARTIE A

- Dans un premier temps, on décide de faire un ajustement affine. On note (d) la droite d'ajustement de y en x obtenue par la méthode des moindres carrés.
Déterminer en utilisant la calculatrice, une équation de (d) . On arrondira les coefficients au millièm.
- À l'aide de cet ajustement, faire une estimation de la population du Nigeria en 2010. On arrondira la réponse au millier d'habitants.

PARTIE B

Dans cette partie, toutes les valeurs seront arrondies au millièm.

- En 2010 on a noté une population de 154,729 millions d'habitants au Nigeria. On décide alors de faire un ajustement exponentiel.
Reproduire et compléter le tableau ci-dessous.

Rang (x_i)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$z_i = \ln(y_i)$										

- Déterminer l'équation de la droite d'ajustement de z en x obtenue par la méthode des moindres carrés.
- En déduire une expression de la population du Nigeria y en millions d'habitants en fonction du rang x de l'année sous la forme $y = ke^{mx}$.
- Utiliser cet ajustement pour estimer la population du Nigeria en 2010.
- D'après l'Institut National d'Études Démographiques (INED) la population du Nigeria devrait dépasser 430 millions d'habitants en 2050.
Que peut-on penser de cette estimation ?

Exercice 2 (5 points)

Enseignement obligatoire

Un restaurateur propose trois formules à midi :

Formule A : Plat du jour / Dessert / Café

Formule B : Entrée / Plat du jour / Dessert / Café

Formule C : Entrée / Plat du jour / Fromage / Dessert / Café

Lorsqu'un client se présente au restaurant pour le repas de midi, il doit choisir une des trois formules proposées et commander ou non du vin.

Le restaurateur a constaté qu'un client sur cinq choisit la formule A , tandis qu'un client sur deux choisit la formule B .

On sait aussi que :

- Parmi les clients qui choisissent la formule A , une personne sur quatre commande du vin.
- Parmi les clients qui choisissent la formule B , deux personnes sur cinq commandent du vin.
- Parmi les clients qui choisissent la formule C , deux personnes sur trois commandent du vin.

Un client se présente au restaurant pour le repas de midi. On considère les évènements suivants :

A : « le client choisit la formule A »

B : « le client choisit la formule B »

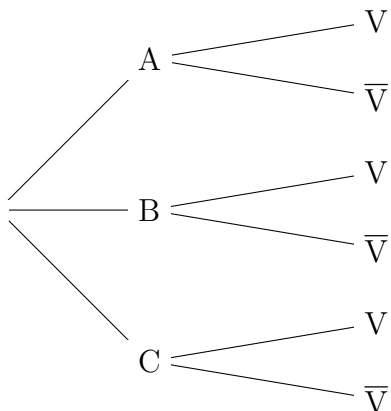
C : « le client choisit la formule C »

V : « le client commande du vin »

Si A et B désignent deux évènements d'une même expérience aléatoire, alors on notera $\bar{A}$ l'évènement contraire de A , $p(A)$ la probabilité de l'évènement A et $P_A(B)$ la probabilité de l'évènement B sachant que A est réalisé.

Les probabilités demandées seront arrondies, si c'est nécessaire, au centième.

1. Calculer $p(C)$.
2. Reproduire et compléter l'arbre de probabilités donné ci-dessous.



3. Montrer que $p(V) = 0,45$.
4. Le client commande du vin. Calculer la probabilité qu'il ait choisi la formule A .
5. La formule A coûte 8 euros, la formule B coûte 12 euros et la formule C coûte 15 euros. Le vin est en supplément et coûte 3 euros. On note D la dépense en euro d'un client venant manger à midi dans ce restaurant.
 - (a) Déterminer la loi de probabilité de D .
 - (b) Calculer la dépense moyenne par client en euro.

Exercice 2 (5 points)**Enseignement de spécialité**

Un club de sport propose à ses adhérents deux types d'abonnements : l'abonnement de type A qui donne accès à toutes les installations sportives et l'abonnement de type B qui, en plus de toutes les installations sportives, donne accès au sauna, au hammam et au jacuzzi. Chaque adhérent doit choisir un des deux abonnements.

La première année, en 2010, 80% des clients ont choisi l'abonnement de type A. On considère ensuite que 30% des adhérents ayant un abonnement de type A changent d'abonnement pour l'année suivante, tandis que 10% des adhérents ayant un abonnement de type B changent d'abonnement pour l'année suivante.

Soit n un entier supérieur ou égal à 0.

On note a_n la proportion des adhérents ayant un abonnement de type A l'année $2010 + n$.

On note b_n la proportion des adhérents ayant un abonnement de type B l'année $2010 + n$.

Enfin on note $P_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$ la matrice traduisant l'état probabiliste de l'année $2010 + n$.

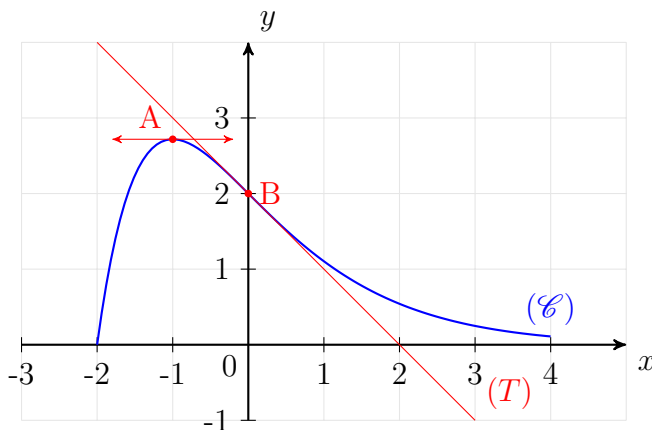
1. Déterminer P_0 .
2. Représenter cette situation par un graphe probabiliste.
3. Écrire la matrice de transition M associée à cette situation.
4. Déterminer la matrice P_2 . En déduire la probabilité pour qu'en 2012 un adhérent choisisse l'abonnement de type A.
5. Montrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 0, $a_{n+1} = 0,6a_n + 0,1$.
6. Pour tout entier n supérieur ou égal à 0, on pose $u_n = 4a_n - 1$.
Montrer que la suite (u_n) est géométrique de raison 0,6. Préciser son premier terme.
7. Pour tout entier n supérieur ou égal à 0, exprimer u_n en fonction de n . En déduire a_n en fonction de n .
8. Calculer la limite de la suite (a_n) puis interpréter concrètement ce résultat.

PARTIE A

On donne ci-dessous, dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, la courbe représentative $(\mathcal{C})$ d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-2; 4]$.

On nomme A le point de $(\mathcal{C})$ d'abscisse -1 et B le point de $(\mathcal{C})$ d'abscisse 0 .

- La fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[-2; -1]$ et strictement décroissante sur l'intervalle $[-1; 4]$
- La tangente à $(\mathcal{C})$ au point A est horizontale.
- La droite $(\mathcal{T})$ est la tangente à $(\mathcal{C})$ au point B et a pour équation $y = -x + 2$



Pour chacune des questions qui suivent, toute réponse sera justifiée.

1. (a) Donner la valeur de $f'(-1)$.
 (b) Déterminer le signe de $f'(2)$.
 (c) Interpréter graphiquement $f'(0)$, puis donner sa valeur.
2. Encadrer, avec deux entiers consécutifs, l'intégrale $\int_{-1}^0 f(x)dx$ exprimée en unité d'aire.

PARTIE B

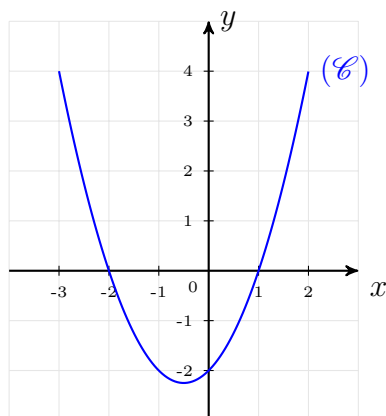
La fonction f de la **Partie A** a pour expression $f(x) = (x + 2)e^{-x}$.

1. Calculer la valeur exacte de l'ordonnée du point A de la courbe $(\mathcal{C})$.
2. Justifier par le calcul le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[-2; 4]$.
3. Montrer que la fonction F définie sur l'intervalle $[-2; 4]$ par $F(x) = (-x - 3)e^{-x}$ est une primitive de f .
4. (a) Calculer la valeur exacte de l'intégrale $\int_{-1}^0 f(x)dx$.
 (b) Vérifier la cohérence de ce résultat avec celui de la question 2 de la partie A.

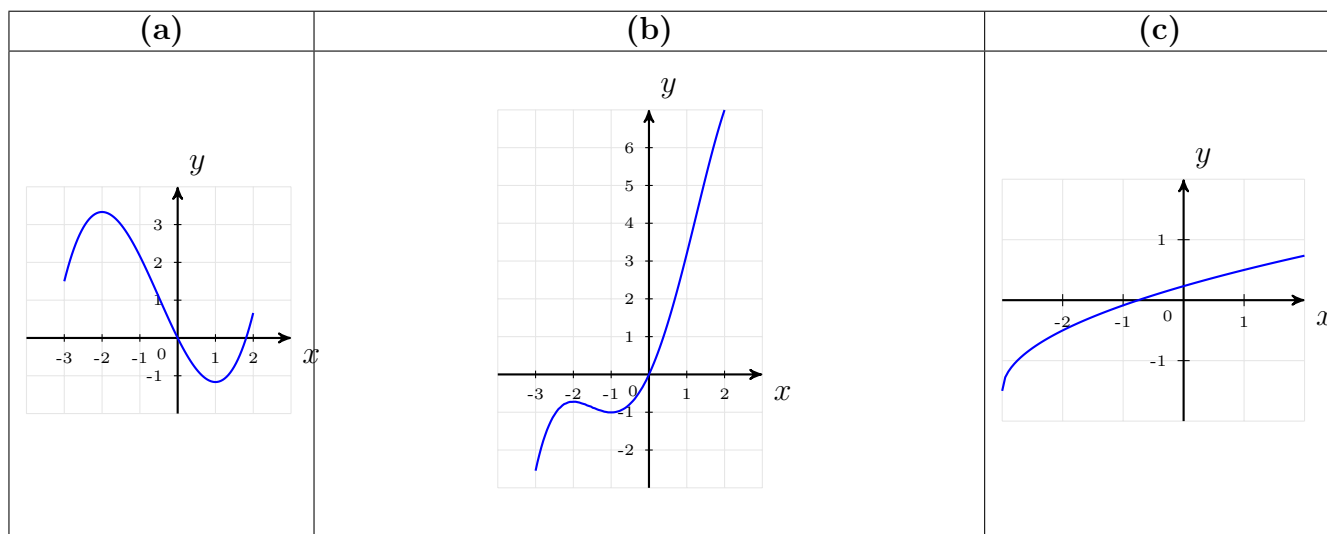
Exercice 4 (3 points)**Commun à tous les candidats**

Les questions 1, 2 et 3 sont indépendantes.

1. On donne ci-dessous, dans un repère orthonormé, la courbe $(\mathcal{C})$ d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-3; 2]$. La courbe $(\mathcal{C})$ coupe l'axe des abscisses au point A d'abscisse -2 et au point B d'abscisse 1 .



Parmi les trois courbes proposées ci-dessous, déterminer la seule qui représente une primitive de f sur l'intervalle $[-3; 2]$.



2. On admet que l'équation $xe^{2x-1} = 2$ n'a qu'une solution α dans $\mathbb{R}$.
Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-2} près.
3. Dans cette question, toute trace de recherche même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Une entreprise produit des tentes. Le coût marginal, en milliers d'euros, pour la production de x centaines de tentes, avec $0 \leq x \leq 20$ est donné par la fonction f définie sur l'intervalle $[0; 20]$ par $f(x) = \frac{2}{x+1}$.

On note C la fonction qui représente le coût total exprimé en milliers d'euros pour une production de x centaines de tentes, avec $0 \leq x \leq 20$.

On assimile le coût marginal à la dérivée de la fonction coût total, c'est à dire à la dérivée de la fonction C .

Sachant que les coûts fixes sont de 5 000 euros, déterminer le coût total en milliers d'euros, pour une production de x centaines de tentes, avec $0 \leq x \leq 20$.

CORRECTION

Exercice 1 (6 points)

Commun à tous les candidats

PARTIE A

1. A l'aide de la calculatrice, on trouve que l'équation est :

$$y = 10,686x + 26,144$$

2. En 2010, $x = 11$. On remplace donc x par 15 dans l'équation obtenue précédemment. On trouve alors :

$$\begin{aligned} y &= 10,686 \times 11 + 26,144 \\ &= 143,69 \end{aligned}$$

Ainsi, on peut donc estimer à 143 000 le nombre d'habitants au Nigeria en 2010.

PARTIE B

1. Le tableau est le suivant :

Rang (x_i)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$z_i = \ln(y_i)$	3.81	3.92	4.034	4.158	4.311	4.444	4.578	4.705	4.827	4.948

2. A l'aide de la calculatrice, on trouve l'équation suivante :

$$z = 0,131x + 3,658$$

3. On sait que $z = \ln y$ donc $y = e^z$. Ainsi :

$$\begin{aligned} y &= e^{0,131x+3,658} \\ &= e^{0,131x} \times e^{3,658} \end{aligned} \qquad \underline{38,784e^{0,131x}}$$

4. Avec ce dernier ajustement, en prenant $x = 11$, on a :

$$\begin{aligned} y &= 38,784e^{0,131 \times 11} \\ &\approx 153,859 \end{aligned}$$

On peut donc estimer à 154 000 le nombre d'habitants du Nigeria en 2010.

5. Pour 2050, $x = 19$ et le dernier ajustement nous donne :

$$\begin{aligned} y &= 38,784e^{0,131 \times 19} \\ &\approx 467,317 \end{aligned}$$

Ainsi, cette estimation est fondée.

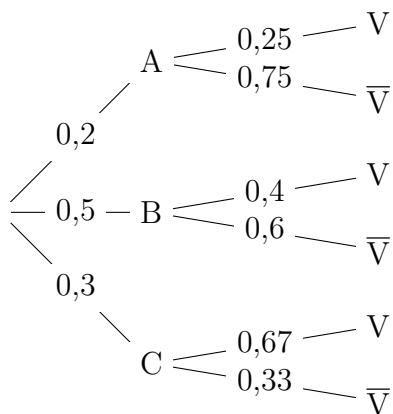
Exercice 2 (5 points)**Enseignement obligatoire**

1. D'après l'énoncé, $p(A) = \frac{1}{5}$ et $p(B) = \frac{1}{2}$. Ainsi,

$$\begin{aligned} p(C) &= 1 - p(A) - p(B) \\ &= 1 - \frac{1}{5} - \frac{1}{2} \\ &= \frac{3}{10} \end{aligned}$$

La probabilité de l'événement C est donc égale à $p(C) = \frac{3}{10}$.

2. L'arbre est le suivant :



3. D'après la formule des probabilités totales, on a :

$$\begin{aligned} p(V) &= p(A) \times P_A(V) + p(B) \times P_B(V) + p(C) \times P_C(V) \\ &\approx 0,2 \times 0,25 + 0,5 \times 0,4 + 0,3 \times 0,67 \\ &\approx 0,45 \end{aligned}$$

Ainsi, $p(V) \approx 0,45$.

4. Nous devons calculer $P_V(A)$.

$$P_V(A) = \frac{p(A \cap V)}{p(V)} = \frac{0,2 \times 0,25}{0,45} \approx 0,11$$

Ainsi, $P_V(A) \approx 0,11$.

5. (a) La loi de probabilité de D est :

Valeurs k de D (en €)	8	11	12	15	18
$p(D = k)$	$p(A \cap \bar{V})$ 0,15	$p(A \cap V)$ 0,05	$p(B \cap \bar{V})$ 0,3	$p(B \cap V) + p(C \cap \bar{V})$ 0,3	$p(C \cap V)$ 0,2

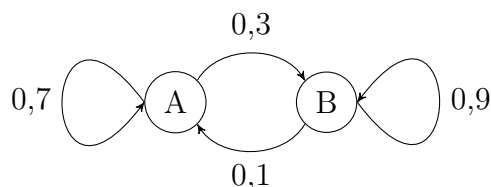
- (b) La dépense moyenne est donnée par l'espérance mathématique de D :

$$\mathbb{E}(D) = 0,15 \times 8 + 0,05 \times 11 + 0,3 \times 12 + 0,3 \times 15 + 0,2 \times 18 = 13,45$$

Ainsi, la dépense moyenne est de 13,45 €.

Exercice 2 (5 points)**Enseignement de spécialité**

1. P_0 correspond à la proportion d'adhérents qui ont choisi l'abonnement A initialement, en 2010.
Ainsi, $P_0 = 0,8$.
2. Le graphe probabiliste est le suivant :



3. La matrice de transition de ce graphe est :

$$M = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,1 & 0,9 \end{pmatrix}$$

4. On a :

$$P_1 = P_0 M = (0,8 \quad 0,2) \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,1 & 0,9 \end{pmatrix} = (0,58 \quad 0,42)$$

$$P_2 = P_1 M = (0,58 \quad 0,42) \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,1 & 0,9 \end{pmatrix} = (0,448 \quad 0,552)$$

Ainsi, la probabilité pour qu'un adhérent choisisse l'abonnement A en 2012 est égale à 0,448.

5. On a :

$$\begin{aligned}
 a_{n+1} &= 0,7a_n + 0,1b_n \\
 &= 0,7a_n + 0,1(1 - a_n) \\
 &= 0,7a_n + 0,1 - 0,1a_n \\
 &= \underline{0,6a_n + 0,1}
 \end{aligned}$$

6. $u_n = 4a_n - 1$. On a alors :

$$\begin{aligned}
 u_{n+1} &= 4a_{n+1} - 1 \\
 &= 4(0,6a_n + 0,1) - 1 \\
 &= 2,4a_n + 0,4 - 1 \\
 &= 2,4a_n - 0,6 \\
 &= 0,6(4a_n - 1) \\
 &= 0,6u_n
 \end{aligned}$$

Ainsi, la suite (u_n) est géométrique de raison 0,6. et de premier terme $u_0 = 4a_0 - 1 = 2,2$.

7. La suite étant géométrique, on a, pour tout entier naturel n :

$$u_n = u_0 \times q^n$$

$$u_n = 2,2 \times (0,6)^n$$

Ainsi :

$$u_n = 4a_n - 1$$

$$\Leftrightarrow 2,2 \times (0,6)^n = 4a_n - 1$$

$$\Leftrightarrow 2,2 \times (0,6)^n + 1 = a_n$$

$$\Leftrightarrow a_n = \frac{2,2 \times (0,6)^n + 1}{4}$$

8. On sait que $0 < 0,6 < 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} (0,6)^n = 0$.

Ainsi, $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0,25$.

Cela signifie qu'à long terme, il y aura un quart d'adhérents qui auront choisi la formule A.

Exercice 3 (6 points)

Commun à tous les candidats

PARTIE A

1. (a) $f'(-1)$ représente le coefficient directeur de la tangente à $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse -1 , donc en A.

Ainsi, $f'(-1) = 0$ car la tangente en A est horizontale.

(b) $f'(2) < 0$ car la tangente à $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse 2 est décroissante.

(c) $f'(0)$ représente le coefficient directeur de $(\mathcal{T})$.

Les points de coordonnées $(0; 2)$ et $(2; 0)$ sont sur cette droite donc son coefficient directeur est :

$$m = \frac{0 - 2}{2 - 0} = -1$$

Ainsi, $f'(0) = -1$.

2. $\int_{-1}^0 f(x)dx$ représente l'aire du domaine délimité par $(\mathcal{C})$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = -1$ et $x = 0$. Ainsi :

$$2 \leq \int_{-1}^0 f(x)dx \leq 3$$

PARTIE B

1. $A(-1; f(-1))$. Et :

$$\begin{aligned} f(-1) &= (-1 + 2)e^{-(-1)} \\ &= e \end{aligned}$$

Ainsi, $A(-1; e)$.

2. Exprimons la dérivée de f : $f(x)$ est de la forme uv , avec $u(x) = x + 2$ et $v(x) = e^{-x}$. Donc $f'(x) = (u'v + uv')(x)$, avec $u'(x) = 1$ et $v'(x) = -e^{-x}$, d'où :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 \times e^{-x} + (x + 2)(-e^{-x}) \\ &= e^{-x}(1 - (x + 2)) \\ &= -(x + 1)e^{-x} \end{aligned}$$

Or, $e^{-x} > 0$ pour tout réel x donc :

$$\begin{aligned} f'(x) > 0 &\Leftrightarrow -(x + 1) > 0 \\ &\Leftrightarrow x + 1 < 0 \\ &x < -1 \end{aligned}$$

Par conséquent, f est croissante pour $x < -1$ et croissante pour $x > 1$.

3. Dérivons la fonction F :

$$\begin{aligned} F'(x) &= -1 \times e^{-x} + (-x - 3)(-e^{-x}) \\ &= e^{-x}(-1 - (-x - 3)) \\ &= (x + 2)e^{-x} \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Ainsi, F est bien une primitive de f .

4. (a) On a, d'après la question précédente :

$$\begin{aligned} \int_{-1}^0 f(x) dx &= F(0) - F(-1) \\ &= -3 - (-2e) \\ &= \underline{2e - 3} \end{aligned}$$

- (b) A l'aide de la calculatrice, on a : $2e - 3 \approx 2,44$, ce qui est bien cohérent avec la réponse donnée à la question 2 de la partie A.

Exercice 4 (3 points)

Commun à tous les candidats

- Réponse (a).
En effet, on voit que $f(x) > 0$ pour $x \in [-3; -2] \cup [1; 2]$ donc F est nécessairement croissante sur ces deux intervalles.
- A l'aide du tableur de la calculatrice, on trouve $\alpha \approx 0,90$.
- f est la dérivée de C . Une primitive de f est $C(x) = 2 \ln(x + 1) + K$, $K \in \mathbb{R}$.
Les coûts fixes sont de 5 000 €, donc $C(0) = 5$ (car exprimé en milliers).
Ainsi, $K = 5$ et donc $C(x) = 2 \ln(x + 2) + 5$.