
Sommaire

SUJET	2
Exercice 1. Pourcentages, statistiques (Commun à tous les candidats)	2
Exercice 2. Graphe probabiliste (Enseignement de spécialité)	4
Exercice 2. Probabilités (Enseignement obligatoire)	5
Exercice 3. QCM, Lectures graphiques (Commun à tous les candidats)	6
Exercice 4. Etude d'une fonction exponentielle (Commun à tous les candidats)	7
CORRECTION	8
Exercice 1. Pourcentages, statistiques (Commun à tous les candidats)	8
Exercice 2. Graphe probabiliste (Enseignement de spécialité)	9
Exercice 2. Probabilités (Enseignement obligatoire)	10
Exercice 3. QCM, Lectures graphiques (Commun à tous les candidats)	11
Exercice 4. Etude d'une fonction exponentielle (Commun à tous les candidats)	12

Document réalisé le 23 juin 2012.
Disponible sur <http://www.mathweb.fr>

Si une erreur s'est glissée, n'hésitez pas à me contacter par email :
contact@mathweb.fr

Exercice 1 (5 points)**Commun à tous les candidats**

Sur le site <http://www.agencebio.org>, on a extrait des informations concernant l'agriculture en France métropolitaine.

Document 1.

En 2008, la surface agricole utilisée (SAU) était de 27 537 688 hectares dont 583 799 hectares en mode de production biologique.

Document 2.

Année	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008
Rang de l'année : x_i	1	2	3	4	5	6	7	8
Surface en mode de production biologique (en hectares)	419 750	517 965	550 990	534 037	550 488	552 824	557 133	583 799
Part (en %) de la surface en mode de production biologique dans la SAU : y_i	1,4	1,75	1,87	1,93	1,99	2	2,02	2,12

PARTIE A

1. D'après le document 2, la part de la surface en mode de production biologique dans la SAU est de 2,12% en 2008. En utilisant le document 1, justifier par le calcul cette information.
2. Calculer le pourcentage d'évolution de la surface en mode de production biologique entre 2007 et 2008. Ce pourcentage sera arrondi à 0,01%.

PARTIE B

On a représenté sur l'annexe, partie B, à rendre avec la copie, le nuage de points représentant la série statistique $(x_i; y_i)$.

1. A l'aide de la calculatrice, donner une équation de la droite d'ajustement affine de y en x obtenue par la méthode des moindres carrés. Les coefficients seront arrondis à 10^{-2} .
2. Tracer cette droite dans le repère fourni sur l'annexe, partie B.
3. Á l'occasion d'un TPE, un groupe d'élèves a trouvé sur une autre page du site qu'en 2009 et en 2010, les parts de la surface en mode de production biologique dans la SAU sont respectivement 2,46% et 3,09%. L'ajustement affine précédent est-il adapté à ces nouvelles données ?

PARTIE C

Pour la suite de ce TPE, les élèves ont modélisé à l'aide d'un logiciel l'évolution de la part de surface en mode de production biologique dans la SAU sur la période de 2001 à 2012 par la fonction f définie sur l'intervalle $[1; 12]$ par :

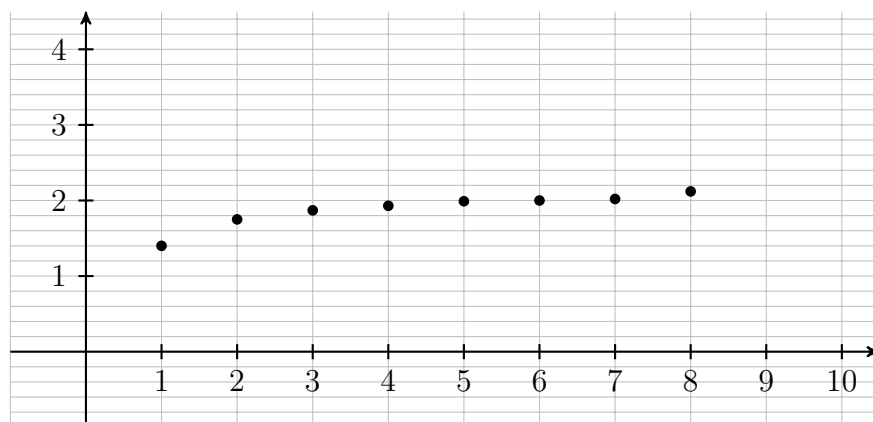
$$f(x) = 0,0096x^3 - 0,1448x^2 + 0,7132x + 0,813$$

Cet ajustement est représenté sur l'annexe, partie C.

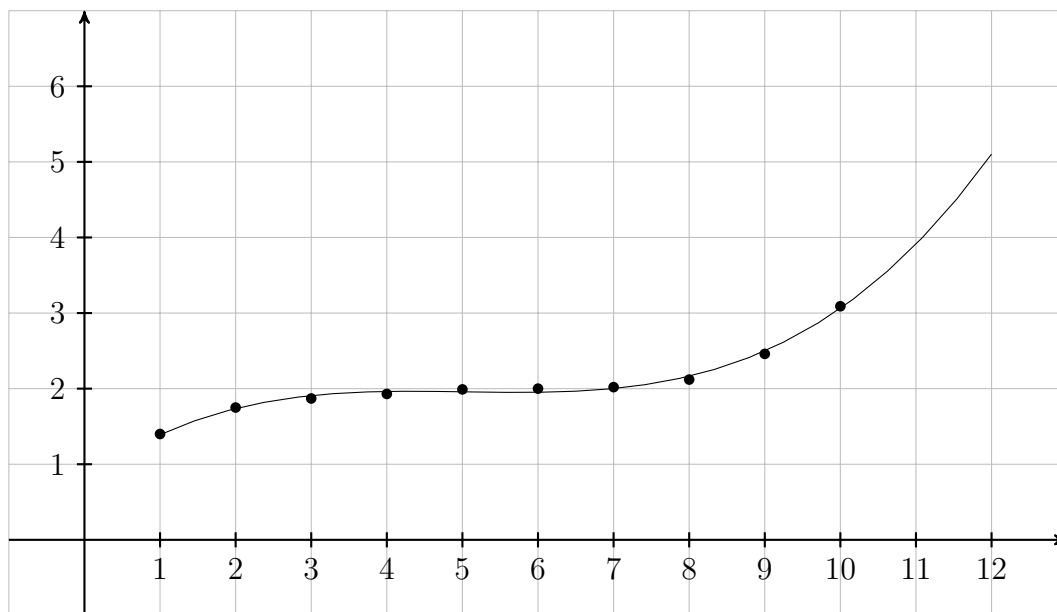
Dans cet question, toute trace de recherche, même incomplète, on d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Le Grenelle de l'environnement s'est fixé comme objectif d'avoir 6% de la SAU en mode de production biologique en 2012. Selon ce modèle, peut-on espérer que cet objectif soit atteint ?

Annexe - Partie B



Annexe - Partie C



Exercice 2 (5 points)

Enseignement de spécialité

Une région se divise en deux zones :

- une zone A à proximité d'une grande agglomération
- une zone B à proximité de la mer

Chaque année, 20% des habitants de la zone A partent habiter dans la zone B pour avoir un meilleur cadre de vie, et 5% des habitants de la zone B partent habiter dans la zone A pour se rapprocher de leur lieu de travail.

On sait de plus qu'en 2010, 40% de la population habitait dans la zone A.

On suppose que le nombre total d'habitants de la région reste constant au cours du temps.

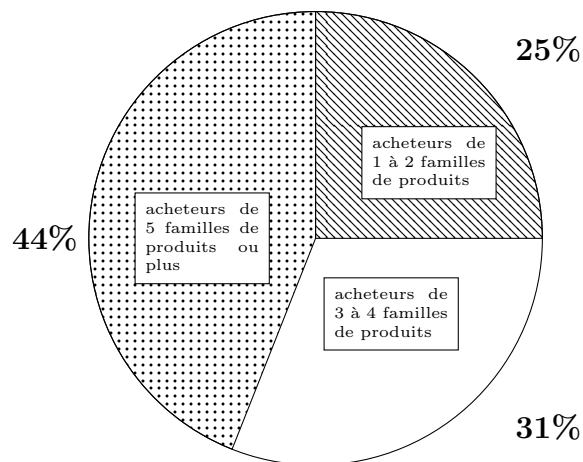
Pour tout entier naturel n , l'état probabiliste correspondant à l'année $2010 + n$ est défini par la matrice ligne $P_n = (a_n \ b_n)$, où a_n et b_n désignent respectivement les proportions d'habitants des zones A et B.

1. Déterminer la matrice ligne P_0 de l'état initial.
2. Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets A et B.
3. (a) Écrire la matrice de transition M de ce graphe en respectant l'ordre alphabétique des sommets.
(b) Donner la répartition de la population en 2012.
4. Dans la question suivante, on considère la matrice ligne $P = (a \ b)$ où a et b sont deux nombres réels tels que $a + b = 1$.
 - (a) Déterminer a et b pour que $P = PM$.
 - (b) Les infrastructures de la zone B permettent d'accueillir au maximum 75% de la population. Lors d'un conseil municipal, le maire affirme qu'il va falloir prévoir de nouvelles infrastructures. A-t-il raison ?

Exercice 2 (5 points)

Enseignement obligatoire

La Fédération e-commerce et Vente à Distance (FEVAD) a effectué en octobre 2010 une enquête auprès de 719 acheteurs à distance âgés de 18 ans et plus. Sur le questionnaire proposé, ces personnes ont été interrogées sur le nombre de familles de produits (vêtements, informatique, loisirs, ...) achetés à distance au cours des 12 derniers mois. L'étude statistique a permis d'obtenir les informations suivantes :



Parmi les acheteurs de 1 à 2 familles de produits, 45% sont retraités.

Parmi les acheteurs de 3 à 4 familles de produits, 25% sont retraités.

Le responsable des ventes tire un questionnaire au hasard, chacun ayant la même probabilité d'être tiré. On note :

- A l'événement : « Le questionnaire tiré est celui d'un acheteur de 1 à 2 familles de produits. »
- B l'événement : « Le questionnaire tiré est celui d'un acheteur de 3 à 4 familles de produits. »
- C l'événement : « Le questionnaire tiré est celui d'un acheteur de 5 familles de produits ou plus. »
- R l'événement : « Le questionnaire tiré est celui d'un retraité. »

1. Traduire les données de l'énoncé à l'aide d'un arbre.
2. (a) Calculer la probabilité $p(A \cap R)$.
(b) Déterminer la probabilité de l'événement : « Le questionnaire tiré est celui d'un retraité acheteur de 3 à 4 familles de produits. »
(c) On sait de plus que 21,7% des acheteurs interrogés sont des retraités. Vérifier que $p(C \cap R) = 0,027$.
3. Le responsable des ventes décide de lancer une campagne publicitaire dès lors que le pourcentage de retraités parmi les acheteurs de 5 familles de produits ou plus est inférieur à 8%. Quelle décision prendra-t-il ?

Exercice 3 (4 points)**Commun à tous les candidats**

Cet exercice est un Q.C.M. (questionnaire à choix multiples).

Pour chacune des questions posées, une seule des quatre réponses est exacte.

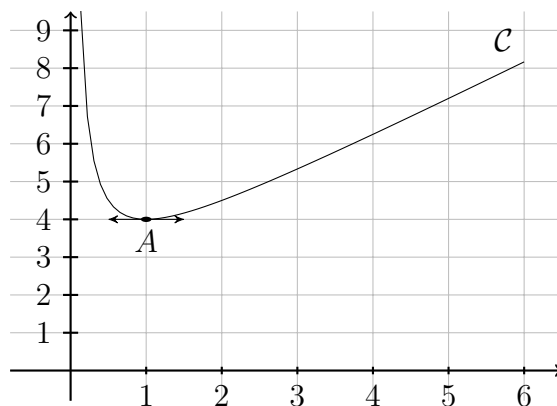
Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.

Aucune justification n'est demandée.

Une réponse exacte rapporte 1 point, une réponse fausse ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point.

On a représenté ci-dessous, dans le plan muni d'un repère orthogonal, la courbe représentative $\mathcal{C}$ d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $]0; 6]$. Le point $A(1; 4)$ appartient à la courbe $\mathcal{C}$. La tangente en A à la courbe $\mathcal{C}$ est parallèle à l'axe des abscisses.

On note f' la fonction dérivée de la fonction f



1. Le nombre dérivé de la fonction f en 1 est égal à :

- (a) 4 (b) 0 (c) -2 (d) 1

2. Sur l'intervalle $]0; 6]$, l'inéquation $f'(x) \geq 0$ admet comme ensemble de solutions :

- (a) $]0; 1]$ (b) $]0; 6]$ (c) $[1; 6]$ (d) $[4; 9]$

3. On pose $I = \int_3^5 f(x)dx$. On peut affirmer que :

- (a) $12 < I < 13$ (b) $0 < I < 2$ (c) $5 < I < 8$ (d) $-2 < I < 0$

4. On appelle F une primitive de la fonction f sur l'intervalle $]0; 6]$. L'expression de F peut être :

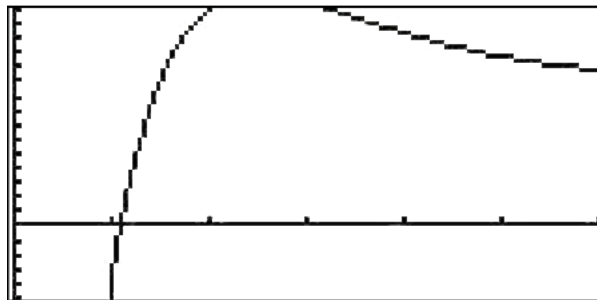
- (a) $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 1$ (b) $F(x) = 2 + \frac{1}{x}$
(c) $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x + \ln x$ (d) $F(x) = 2x + \ln x$

Exercice 4 (6 points)**Commun à tous les candidats**

Le bénéfice en milliers d'euros que réalise une entreprise lorsqu'elle fabrique et vend x centaines d'objets (pour x compris entre 0 et 6) est donné par :

$$f(x) = (200x - 300)e^{-x-1} + 10$$

Alix a affiché sur l'écran de sa calculatrice la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle $[0; 6]$:

**PARTIE A : OBJECTIF « RÉALISER UN BÉNÉFICE MAXIMAL »**

L'écran ne permet pas à Alix de déterminer le bénéfice maximal.

Il décide donc d'étudier la fonction f sur l'intervalle $[0; 6]$. On admet que cette fonction est dérivable sur l'intervalle $[0; 6]$. On désigne par f' la dérivée de la fonction f .

1. Établir que, pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0; 6]$,

$$f'(x) = (500 - 200x)e^{-x-1}$$

2. Dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0; 6]$.
3. En déduire le nombre d'objets à vendre pour réaliser un bénéfice maximal.
Quel est ce bénéfice maximal en euros ? (Donner la réponse arrondie à l'euro).
4. Proposer un réglage de la fenêtre graphique permettant de visualiser le maximum de la fonction f .

PARTIE B : OBJECTIF « NE PAS VENDRE À PERTE »

1. Au vu du graphique obtenu par Alix, à partir de combien d'objets l'entreprise ne vend-elle pas à perte ?
2. Démontrer que sur l'intervalle $[1; 2]$, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution notée α .
3. Donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près.
4. Préciser le nombre d'objets à partir duquel l'entreprise ne vend pas à perte.

CORRECTION

Exercice 1 (5 points)

Commun à tous les candidats

PARTIE A

1. Le pourcentage se calcule ainsi :

$$\frac{583\,799}{27\,537\,688} \times 100 \approx 2,12$$

2. Le pourcentage d'évolution entre 2007 et 2008 est :

$$\frac{583\,799 - 557\,133}{557\,133} \times 100 \approx 4,786$$

Ainsi, le pourcentage est 4,79%.

PARTIE B

1. A l'aide de la calculatrice, on a l'équation suivante :

$$y = 0,08x + 1,52$$

2. Voir graphique ci-dessous.

3. D'après ce dernier ajustement, la part de la surface de production biologique en 2009 serait :

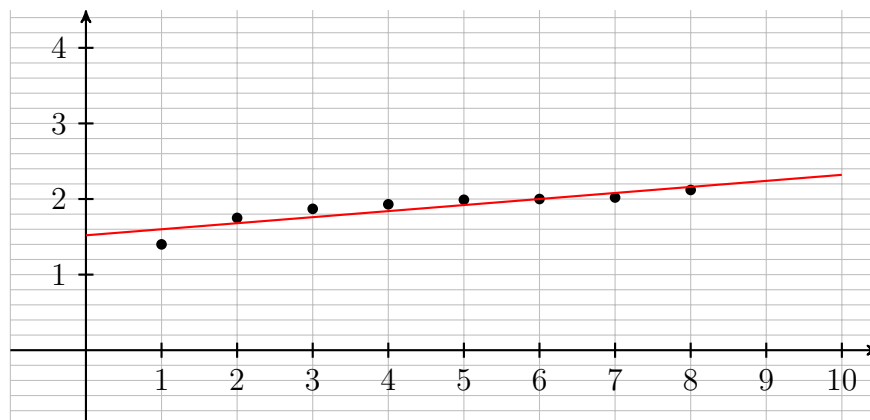
$$y_9 = 0,08 \times 9 + 1,52 = 2,24$$

Celle en 2010 serait :

$$y_{10} = 0,08 \times 10 + 1,52 = 2,32$$

Ces dernières valeurs sont assez éloignées de celles fournies par le site.
On peut alors conclure que ce dernier ajustement n'est pas judicieux.

Annexe - Partie B



PARTIE C

Sur le graphique donné en annexe, on voit que $f(12)$ est inférieur à 6.

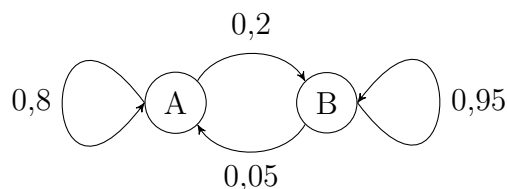
Ainsi, l'objectif d'atteindre les 6% ne sera pas atteint selon cet ajustement.

Exercice 2 (5 points)**Enseignement de spécialité**

1. D'après l'énoncé, $P_0 = (0,4 \quad 0,6)$.

En effet, en 2010, 40% de la population était dans la zone A, ce qui correspond à une proportion de 0,4.

2. Le graphe est le suivant :



3. (a) La matrice de transition est : $M = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,05 & 0,95 \end{pmatrix}$.

- (b) La répartition de la population en 2012 est donnée par P_2 .

$$P_1 = P_0 M = (0,4 \quad 0,6) \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,05 & 0,95 \end{pmatrix} = (0,35 \quad 0,65)$$

$$P_2 = P_1 M = (0,35 \quad 0,65) \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,05 & 0,95 \end{pmatrix} = (0,3125 \quad 0,6875)$$

Ainsi, 31,25% de la population habitera en zone A et 68,75% en zone B.

4. (a) On a :

$$\begin{aligned} P = PM &\Leftrightarrow (a \quad b) = (a \quad b) \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,05 & 0,95 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow (a \quad b) = (0,8a + 0,05b \quad 0,2a + 0,95b) \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{cases} 0,8a + 0,05b = a \\ 0,2a + 0,95b = b \end{cases}$$

Soit : $0,05b = 0,2a$. Donc : $b = 4a$ (1).

De plus, $a + b = 1 \Leftrightarrow a = 1 - b$. Ainsi : $(1) \Leftrightarrow b = 4(1 - b)$. D'où : $b = 4 - 4b$. On a alors :

$$b = \frac{4}{5} \quad \text{et donc} \quad a = \frac{1}{5}$$

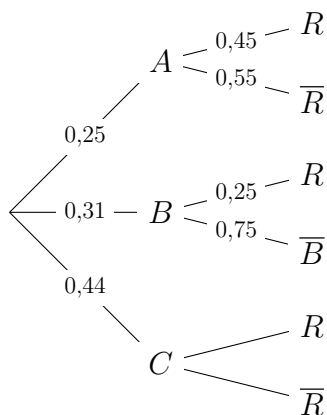
Finalement, on a :

$$\boxed{P = (0,2 \quad 0,8)}$$

- (b) Le maire a en effet raison de prévoir de nouvelles infrastructures car la proportion d'habitants dans la zone B se rapprochera des 80%.

Exercice 2 (5 points)**Enseignement obligatoire**

1. L'arbre est le suivant :



2. (a) On a :

$$\begin{aligned} p(A \cap R) &= p_A(R) \times p(A) \\ &= 0,45 \times 0,25 \\ &= \underline{0,1125} \end{aligned}$$

(b) La probabilité demandée est :

$$\begin{aligned} p(B \cap R) &= p_B(R) \times p(B) \\ &= 0,25 \times 0,31 \\ &= \underline{0,0775} \end{aligned}$$

(c) L'énoncé nous donne : $p(R) = 0,217$.

La formule des probabilités totales nous donne :

$$p(R) = p(A \cap R) + p(B \cap R) + p(C \cap R)$$

Soit :

$$0,217 = 0,1125 + 0,0775 + p(C \cap R)$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} p(B \cap R) &= 0,217 - 0,1125 - 0,0775 \\ &= \underline{0,027} \end{aligned}$$

3. On a :

$$p(C \cap R) = p_C(R) \times p(C)$$

Soit :

$$0,027 = p_C(R) \times 0,44$$

D'où :

$$p_C(R) \approx 0,06136$$

Ainsi, le pourcentage de retraités est de 6%.

Le responsable devra donc lancer sa campagne publicitaire.

Exercice 3 (4 points)**Commun à tous les candidats**

1. La tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 1 est horizontale.

Ainsi, son coefficient directeur est égal à 0.

Or, $f'(1)$ représente le coefficient directeur de $\mathcal{C}$ en A .

Ainsi, $f'(1) = 0$.

Réponse (b).

2. $f'(x) \geq 0$ sur les intervalles où la courbe $\mathcal{C}$ est croissante. Ainsi, l'ensemble des solutions à l'inéquation $f'(x) \geq 0$ est $[1; 6]$.

Réponse (c).

3. $\int_3^5 f(x)dx$ représente l'aire (en unité d'aire) comprise entre l'axe des abscisses et $\mathcal{C}$ sur $[3; 5]$.

On compte alors le nombre de rectangles sous $\mathcal{C}$: il y en a entre 12 et 13, donc $12 < I < 13$.

Réponse (a).

4. Si F représente une primitive de f , alors $F' = f$.

Si $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 1$, alors $F'(x) = x + 2$, qui est une fonction affine et cela ne correspond pas à f .

Si $F(x) = 2x + \ln x$, alors $F'(x) = 2 + \frac{1}{x}$ et $F'(1) = 3 \neq f(1)$ donc cela ne correspond pas à f .

Si $F(x) = 2 + \frac{1}{x}$, alors $F'(x) = -\frac{1}{x^2}$ et $F'(1) = -1 \neq f(1)$ donc cela ne correspond pas à f .

Il reste donc $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x + \ln x$.

Réponse (c).

PARTIE A : OBJECTIF « RÉALISER UN BÉNÉFICE MAXIMAL »

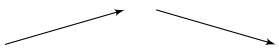
1. $f = uv + 10$, où $u(x) = 200x - 300$ et $v(x) = e^{-x-1}$.
Ainsi, $f' = u'v + uv'$, où $u'(x) = 200$ et $v'(x) = -e^{-x-1}$. D'où :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 200e^{-x-1} + (200x - 300)(-e^{-x-1}) \\ &= e^{-x-1}(200 + (200x - 300) \times (-1)) \\ &= (200 - 200x + 300)e^{-x-1} \\ &= \underline{(500 - 200x)e^{-x-1}} \end{aligned}$$

2. $f'(x)$ est du signe de $500 - 200x$ car $e^{-x-1} > 0$ pour tout x (comme exponentielle).

$$\begin{aligned} 500 - 200x > 0 &\Leftrightarrow 500 > 200x \\ &\Leftrightarrow \frac{500}{200} > x \\ &\Leftrightarrow x < 2,5 \end{aligned}$$

D'où le tableau de variation suivant :

x	0	2,5	6
$f'(x)$	+	0	-
f			

3. Le bénéfice est maximal pour $x = 2,5$, donc pour 250 objets (car x est exprimé en centaines).
De plus, $f(2,5) \approx 16,039$; ainsi, pour 250 objets, le bénéfice est 16 039 €.
4. On pourrait régler la calculatrice afin de dessiner la courbe dans une fenêtre allant jusqu'à $y = 17$.
(ymax=17).

PARTIE B : OBJECTIF « NE PAS VENDRE À PERTE »

1. L'entreprise ne vend pas à perte quand le bénéfice est positif.
D'après le graphique obtenu par Alix, la courbe coupe l'axe des abscisses pour $x = 1,1$ (à peu près).
Donc, à partir de 110 objets, l'entreprise ne vend pas à perte.
2. f est une fonction dérivable et strictement croissante sur $[1; 2]$.
De plus, $f(1) \approx -3,53 < 0$ et $f(2) \approx 94,98 > 0$.
Ainsi, d'après le théorème de la valeur intermédiaire, il existe une solution unique à l'équation $f(x) = 0$ sur $[1; 2]$.
3. À l'aide de la calculatrice, on obtient $\alpha \approx 1,09$.
4. D'après la question précédente, l'entreprise ne vend pas à perte à partir de 110 objets (pour 109 objets, elle ne fait pas encore de bénéfices).