
Sommaire

SUJET	2
Exercice 1. Lecture graphique, primitive et intégrale (Commun à tous les candidats)	2
Exercice 2. Statistiques (Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité)	3
Exercice 2. Graphes (candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité)	4
Exercice 3. Probabilités (Commun à tous les candidats)	5
Exercice 4. Etude d'une fonction exponentielle (Commun à tous les candidats)	6
CORRECTION	7
Exercice 1. Lecture graphique, primitive et intégrale (Commun à tous les candidats)	7
Exercice 2. Statistiques (Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité)	8
Exercice 3. Graphe (Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité)	9
Exercice 4. Probabilités (Commun à tous les candidats)	10
Exercice 5. Etude d'une fonction exponentielle (Commun à tous les candidats)	11

Document réalisé le 27 avril 2012.
Disponible sur <http://www.mathweb.fr>

Si une erreur s'est glissée, n'hésitez pas à me contacter par email :
contact@mathweb.fr

Exercice 1 (4 points)**Commun à tous les candidats**

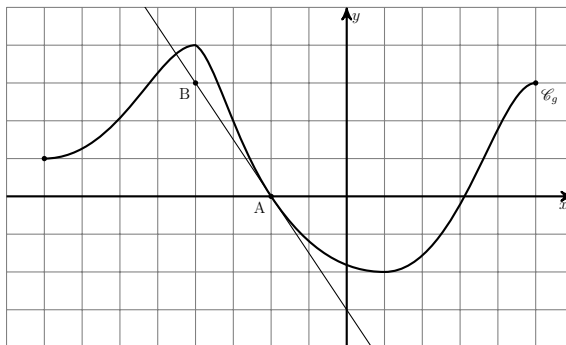
Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Il est constitué de quatre questions indépendantes. Pour chacune des questions posées, une seule des trois réponses proposées est exacte.

Recopier le numéro de chaque question et indiquer la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

Une réponse exacte rapporte 1 point, une réponse fausse ou l'absence de réponse n'apporte ni n'enlève aucun point.

1. La courbe $\mathcal{C}_g$ tracée ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction g définie et dérivable sur l'intervalle $[-8 ; 5]$. La droite (AB) tracée sur le graphique est la tangente à la courbe $\mathcal{C}_g$ au point A d'abscisse -2 .

On note g' la fonction dérivée de la fonction g sur l'intervalle $[-8 ; 5]$.



- (a) $g'(-2) = -1,5$
(b) $g'(-2) = 0$
(c) $g'(-2) = -\frac{2}{3}$
2. On note G une primitive sur l'intervalle $[-8 ; 5]$ de la fonction g introduite à la question 1.
- (a) la fonction G admet un minimum en -2
(b) la fonction G est décroissante sur l'intervalle $[-4 ; 1]$
(c) la fonction G est croissante sur l'intervalle $[-8 ; -2]$
3. Soit $I = \int_2^7 \left(2x + 1 - \frac{1}{x} \right) dx$;
- (a) $I = 50 + \ln \left(\frac{2}{7} \right)$
(b) $I = 48,7$
(c) $I = 10 - \frac{1}{7} + \frac{1}{2}$
4. Soit f la fonction définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par :

$$f(x) = \frac{6x - 5}{3x^2 - 5x + 7}$$

On note F la primitive de f sur $\mathbb{R}$ telle que $F(1) = 1$.

- (a) Pour tout x de $\mathbb{R}$, $F(x) = \ln(3x^2 - 5x + 7)$
(b) Pour tout x de $\mathbb{R}$, $F(x) = \ln(3x^2 - 5x + 7) + 1 - \ln(5)$
(c) Pour tout x de $\mathbb{R}$, $F(x) = \frac{1}{(3x^2 - 5x + 7)} + 1$

Exercice 2 (5 points)**Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité**

Anna a créé un site web. Le tableau ci-dessous présente l'évolution du nombre hebdomadaire de visiteurs de ce site au cours des huit premières semaines suivant sa création.

Rang de la semaine x_i	1	2	3	4	5	6	7	8
Nombre de visiteurs y_i	205	252	327	349	412	423	441	472

1. (a) Représenter le nuage de points $M_i(x_i ; y_i)$ dans le plan muni d'un repère orthogonal, en prenant pour unités 1 cm pour une semaine sur l'axe des abscisses et 1 cm pour 50 visiteurs sur l'axe des ordonnées.
- (b) Déterminer les coordonnées du point moyen G de ce nuage de points, et le placer dans le repère précédent (on arrondira l'ordonnée du point G à l'unité près).
2. (a) Pour cette question, les calculs pourront être effectués à l'aide de la calculatrice ; aucun détail n'est exigé à leur propos.
Déterminer l'équation $y = ax + b$ de la droite (D) d'ajustement affine de y en x , obtenue par la méthode des moindres carrés. Les coefficients a et b seront arrondis à l'entier le plus proche.
- (b) Tracer la droite (D) dans le repère précédent.
- (c) En utilisant l'ajustement affine précédent, estimer le nombre de visiteurs lors de la dixième semaine suivant la création du site.
3. En remarquant que l'augmentation du nombre de visiteurs est plus faible sur les dernières semaines, on peut penser à faire un ajustement de type « logarithmique ».

Pour cela, On pose : $z = \ln(x)$.

- (a) On donne le tableau suivant :

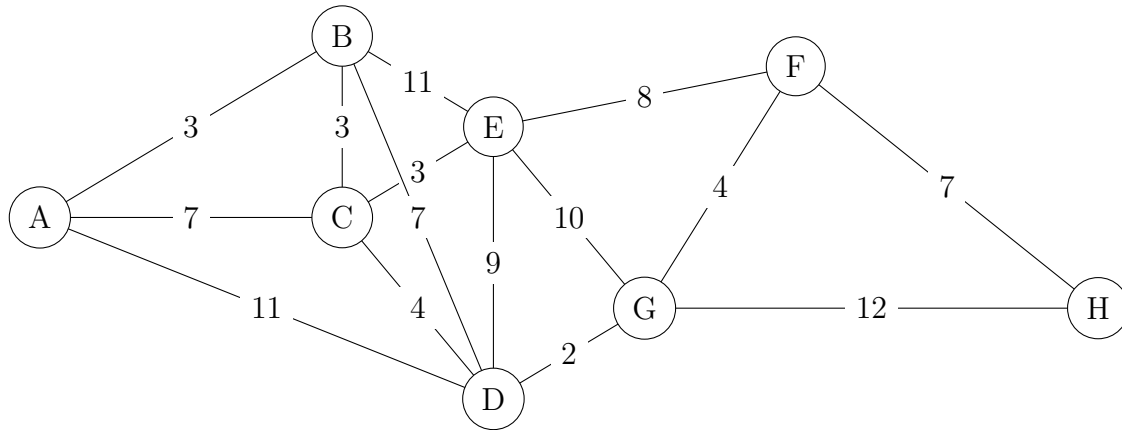
Rang de la semaine x_i	1	2	3	4	5	6	7	8
$z_i = \ln(x_i)$	0	0,693		1,386	1,609		1,946	2,079
Nombre de visiteurs y_i	205	252	327	349	412	423	441	472

Préciser les valeurs manquantes z_3 et z_6 en arrondissant les résultats obtenus à 10^{-3} près.

- (b) On admet que l'équation de la droite (d) d'ajustement affine de y en z , obtenue par la méthode des moindres carrés, est : $y = 133z + 184$.
En utilisant ce résultat, procéder à une nouvelle estimation du nombre de visiteurs lors de la dixième semaine (le résultat sera arrondi à l'unité).
- (c) A l'aide de ce nouvel ajustement, déterminer le rang de la semaine au cours de laquelle le nombre prévisible de visiteurs dépassera 600.

Exercice 2 (5 points)**candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité**

Les points de collecte d'un camion d'une société recyclant des « déchets papier », ainsi que les temps de trajet (en minutes) entre ces différents points, sont représentés par le graphe n° 1. Le dépôt est représenté par le sommet A et les autres sommets représentent les différents points de collecte.

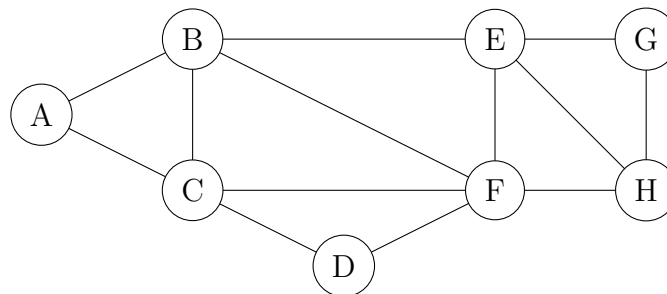


1. Afin de rendre son plan plus lisible, le chauffeur du camion souhaite colorer les sommets du graphe représentant son réseau de manière à ce que deux sommets adjacents n'aient jamais la même couleur. Peut-il utiliser seulement trois couleurs ? Justifier.
2. On appelle M la matrice associée au graphe n° 1, M étant construite en utilisant les sommets dans l'ordre alphabétique. On donne ci-dessous la matrice M^4 :

$$M^4 = \begin{pmatrix} 31 & 34 & 34 & 38 & 40 & 13 & 23 & 9 \\ 34 & 47 & 46 & 50 & 44 & 22 & 33 & 10 \\ 34 & 46 & 47 & 50 & 44 & 22 & 33 & 10 \\ 38 & 50 & 50 & 62 & 54 & 28 & 34 & 16 \\ 40 & 44 & 44 & 54 & 60 & 24 & 36 & 20 \\ 13 & 22 & 22 & 28 & 24 & 21 & 23 & 11 \\ 23 & 33 & 33 & 34 & 36 & 23 & 35 & 13 \\ 9 & 10 & 10 & 16 & 20 & 11 & 13 & 11 \end{pmatrix}$$

Combien y a-t-il de trajets possibles permettant d'aller du dépôt A au point de collecte H en quatre étapes ? Justifier la réponse.

3. Le conducteur doit se rendre du dépôt A au point de collecte H. Il cherche le chemin qui minimise le temps de trajet. Déterminer ce chemin en expliquant le procédé utilisé, et préciser le temps minimum de parcours obtenu.
4. Le point de collecte H est lui-même un lotissement résidentiel privé dont un plan est représenté à l'aide du graphe (non pondéré) ci-dessous. Les sommets sont les différents carrefours et les arêtes sont les voies de circulation.



- (a) Justifier que ce graphe est connexe.
- (b) Le conducteur du camion doit passer le long de chaque voie afin de collecter les déchets individuels de chaque habitation. Il entre dans le lotissement par le sommet 8 : lui est-il possible de parcourir le lotissement en empruntant chaque voie une fois et une seule ? Justifier.

Exercice 3 (5 points)

Commun à tous les candidats

Un fournisseur d'accès internet effectue une enquête de satisfaction sur un panel de 2 000 clients, dont l'abonnement a plus de 12 mois d'ancienneté.

Parmi eux :

- 900 n'ont jamais subi de coupure prolongée de connexion.
- 500 clients ont connu leur dernière coupure prolongée de connexion dans les 12 derniers mois.
- les autres clients ont connu leur dernière coupure prolongée de connexion il y a plus d'un an.

L'enquête révèle que :

- 95 % des clients n'ayant jamais subi de coupure prolongée se déclarent satisfaits du service fourni.
- 50 % des clients ayant subi une coupure prolongée de connexion dans les douze derniers mois se déclarent satisfaits du service fourni.
- 70 % des clients ayant subi une coupure prolongée de connexion il y a plus d'un an se déclarent satisfaits du service fourni.

On choisit au hasard un client parmi ceux qui ont été interrogés. On considère les événements suivants :

J : « le client n'a jamais subi de coupure prolongée de connexion »

R : « la dernière coupure prolongée de connexion du client est survenue au cours des douze derniers mois » (elle est « récente »)

A : « la dernière coupure prolongée de connexion du client date d'il y a plus d'un an » (elle est « ancienne »)

S : « le client se déclare satisfait »

$\bar{S}$ désigne l'évènement contraire de S .

1. (a) Calculer les probabilités des événements J , R et A .
(b) Construire un arbre pondéré décrivant la situation, en indiquant sur chaque branche la probabilité correspondante.
2. Calculer la valeur exacte de la probabilité que le client soit satisfait et n'ait jamais subi de coupure prolongée de connexion.
3. Démontrer que la probabilité que le client choisi se déclare satisfait est égale à 0,762 5.
4. Le client choisi se déclare satisfait du service fourni. Quelle est la probabilité qu'il ait subi une coupure prolongée de connexion au cours des douze derniers mois (on donnera le résultat sous forme décimale arrondie au centième) ?
5. On choisit au hasard trois clients parmi ceux du panel interrogé durant l'enquête. On admet que ce panel est suffisamment important pour assimiler ces choix à des tirages successifs indépendants avec remise.
Déterminer la probabilité qu'exactement un des clients choisis se déclare non satisfait du service fourni (on donnera le résultat sous forme décimale arrondie au centième).

Exercice 4 (6 points)**Commun à tous les candidats****Partie A**

On considère la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = (-4x^2 + 5) e^{-x} + 3$$

On note $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal.

On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

1. (a) Démontrer que pour tout réel x de $[0 ; +\infty[$, on a :

$$f'(x) = (4x^2 - 8x - 5) e^{-x}.$$

- (b) Étudier le signe de la fonction f' sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

2. (a) Démontrer que pour tout $x \geq 0$, on a $f(x) = -\frac{4x^2}{e^x} + \frac{5}{e^x} + 3$.

- (b) En déduire la limite de la fonction f en $+\infty$.

(on pourra utiliser le résultat suivant : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0$).

- (c) Interpréter graphiquement cette limite.

3. À l'aide des questions 1. et 2., dresser le tableau de variation de la fonction f .

4. Justifier que l'équation $f(x) = 3$ admet une unique solution x_0 dans l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

Donner une valeur approchée de x_0 à 10^{-2} près.

Partie B

Une entreprise produit de la peinture qu'elle vend ensuite. Toute la production est vendue. Le coût moyen unitaire de cette production peut être modélisé par la fonction f de la partie A :

pour x hectolitres de peinture fabriqués (avec $x \in [0,5 ; 8]$), le nombre $f(x)$ désigne le coût moyen unitaire de production par hectolitre de peinture, exprimé en centaines d'euros (on rappelle qu'un hectolitre est égal à 100 litres).

Dans la suite de l'exercice, on utilise ce modèle. On pourra utiliser les résultats de la partie A.

Chaque réponse sera justifiée.

1. Déterminer le coût moyen unitaire de production en euros, arrondi à l'euro près, pour une production de 500 litres de peinture.
2. (a) Combien de litres de peinture l'entreprise doit-elle produire pour minimiser le coût moyen unitaire de production ? Quel est alors ce coût, arrondi à l'euro près ?
(b) Le prix de vente d'un hectolitre de peinture est fixé à 100 euros. À l'aide de la question précédente, déterminer si l'entreprise peut réaliser des bénéfices.

Pour cette question, toute trace de recherche même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

3. Le prix de vente d'un hectolitre de peinture est fixé à 300 euros.

On appelle seuil de rentabilité la quantité à partir de laquelle la production est rentable, c'est-à-dire qu'elle permet à l'entreprise de réaliser un bénéfice.

Quel est le seuil de rentabilité pour cette entreprise ?

CORRECTION

Exercice 1 (4 points)

Commun à tous les candidats

1. $g'(-2)$ désigne le nombre dérivé de la fonction g en $x = -2$, ce qui coïncide avec le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}_g$ en A.

On lit alors : $g'(-2) = -1,5$.

On peut aussi le calculer à l'aide de la formule $g'(-2) = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{0 - 3}{-2 - (-4)} = -\frac{3}{2} = -1,5$.

2. G est une primitive de g , donc $G' = g$. Ainsi, les variations de G sont données par le signe de $g(x)$. on a alors :

x	-8	-2	3	5	
$g(x)$	+	0	-	0	+
G					

La fonction G est donc croissante sur $[-8; -2]$.

3. Une primitive de $h(x) = 2x + 1 - \frac{1}{x}$ est $H(x) = x^2 + x - \ln x$ (peu importe la constante ici).

Donc $\int_2^7 h(x)dx = H(7) - H(2) = 50 + \ln\left(\frac{2}{7}\right)$. Réponse (a).

4. $f(x)$ est de la forme $\frac{u'(x)}{u(x)}$, avec $u(x) = 3x^2 - 5x + 7$.

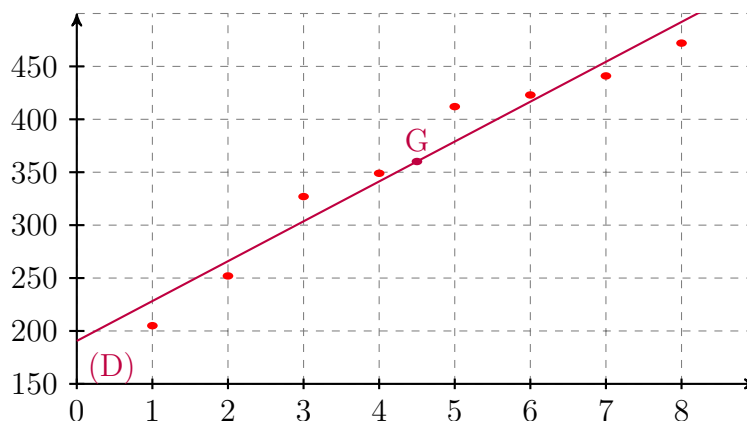
Donc une primitive de f est $F(x) = \ln u(x) + k = \ln(3x^2 - 5x + 7)$, où $k \in \mathbb{R}$.

On sait de plus que $F(1) = 1$ donc $\ln 5 + k = 1$, soit $k = 1 - \ln 5$.

La réponse correcte est donc la réponse (b).

Exercice 2 (5 points)**Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité**

1. (a) On a le nuage de points suivant :



- (b) Le point moyen est $G(\bar{x}; \bar{y})$ où :

$$\bar{x} = \frac{1 + 2 + \cdots + 7 + 8}{8} = 4,5 \quad ; \quad \bar{y} = \frac{205 + 252 + \cdots + 441 + 472}{8} \approx 360$$

2. (a) La droite d'ajustement affine de y en x a pour équation : $y = 38x + 191$.
 (b) Voir graphique pour le tracé de la droite (D).
 (c) On remplace x par 10 dans l'équation précédente afin de connaître une estimation du nombre de visiteurs lors de la dixième semaine :

$$y = 38 \times 10 + 191 = 571$$

Ainsi, on peut estimer à 571 le nombre de visiteurs lors de la dixième semaine.

3. (a) On a :

Rang de la semaine x_i	1	2	3	4	5	6	7	8
$z_i = \ln(x_i)$	0	0,693	1,099	1,386	1,609	1,792	1,946	2,079
Nombre de visiteurs y_i	205	252	327	349	412	423	441	472

- (b) Le nombre de visiteurs lors de la dixième semaine selon la nouvelle approximation est :

$$y = 133 \times \ln 10 + 184 \approx 490$$

On peut donc estimer à 490 le nombre de visiteurs lors de la dixième semaine.

- (c) On cherche x tel que $133 \ln x + 184 \geq 600$. On résout donc cette dernière inéquation :

$$133 \ln x + 184 \geq 600 \Leftrightarrow 133 \ln x \geq 600 - 184$$

$$\Leftrightarrow 133 \ln x \geq 416$$

$$\Leftrightarrow \ln x \geq \frac{416}{133}$$

$$\Leftrightarrow x \geq e^{\frac{416}{133}}$$

Or, $e^{\frac{416}{133}} \approx 22,82$.

Ainsi, le nombre de visiteurs atteindra 600 lors de la 23^e semaine.

Exercice 3 (5 points)**Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité**

1. Considérons le sous-graphe complet $(A; B; C; D)$.

Si l'on attribue au sommet A la couleur c_1 , à B la couleur c_2 et à C la couleur c_3 , c_1 , c_2 et c_3 étant différentes, on ne pourra pas attribuer à D une des couleurs c_1 , c_2 ou c_3 car D est adjacent aux trois autres sommets.

Ainsi, le nombre chromatique du graphe $\gamma(G)$ est supérieur ou égal à 4. Or, « si un graphe G admet un sous-graphe complet d'ordre maximal p , alors $\gamma(G) \leq p$ ». Par conséquent, $\gamma(G) = 4$.

2. D'après le cours, « le coefficient $m_{i,j}$ de la matrice M^4 désigne le nombre de chaînes de longueur 4 reliant le sommet i au sommet j ».

Ainsi, il y a 9 trajets possibles pour relier le dépôt A au lieu de collecte H .

3. Afin de déterminer le chemin le plus court, on utilise l'algorithme de Dijkstra :

A	B	C	D	E	F	G	H
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
.	3_A	7 _A	11 _A	∞	∞	∞	∞
.	.	6_B	10 _B	14 _B	∞	∞	∞
.	.	.	10 _C	9_C	∞	∞	∞
.	.	.	18 _E	.	17_E	19 _E	∞
.	.	.	18 _E	.	.	21 _F	24 _F

Ainsi, le chemin à emprunter est $(A; B; C; E; F; H)$ et son poids est 24.

Il faudra donc 24 minutes pour relier le dépôt au lieu de collecte H en empruntant ce chemin.

4. (a) Le graphe est connexe car tous les sommets sont reliés à au moins un autre (on peut donc relier deux sommets quelconques par au moins une chaîne).

- (b) La question revient à savoir s'il existe une chaîne eulérienne.

Le théorème d'Euler stipule qu'« un graphe connexe non orienté contient une chaîne eulérienne si et seulement s'il possède 0 ou 2 sommets de degré impair. ».

Le tableau suivant donne le degré des sommets :

Sommets	1	2	3	4	5	6	7	8
Degrés	2	4	4	2	4	5	2	3

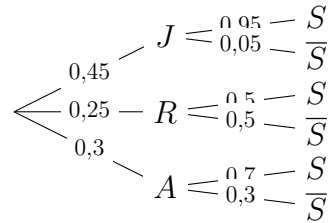
Nous voyons alors que le graphe possède exactement 2 sommets de degré impair. Par conséquent, le conducteur du camion pourra parcourir le lotissement en empruntant chaque voie une fois et une seulement.

Exercice 4 (5 points)**Commun à tous les candidats**

1. (a) L'énoncé nous donne directement les probabilités suivantes :

$$p(J) = \frac{900}{2000} = 0,45 \quad ; \quad p(R) = \frac{500}{2000} = 0,25 \quad ; \quad p(A) = 1 - (0,45 + 0,25) = 0,3$$

- (b) L'arbre pondéré est le suivant :



2. La probabilité pour que le client soit satisfait et n'ait jamais subi une coupure prolongée de connexion est $P(S \cap J)$.

D'après la formule du cours, nous avons :

$$\begin{aligned} P(S \cap J) &= P(J) \times P_J(S) \\ &= 0,45 \times 0,95 \\ &= 0,4275 \end{aligned}$$

Ainsi, $\underline{P(S \cap J) = 0,4275.}$

3. D'après la formule des probabilités totales, on a :

$$\begin{aligned} P(S) &= P(S \cap J) + P(S \cap R) + P(S \cap A) \\ &= 0,4275 + 0,25 \times 0,5 + 0,3 \times 0,7 \\ &= 0,7625 \end{aligned}$$

Ainsi, $\underline{P(J) = 0,7625.}$

4. Le client se déclare satisfait. Nous avons donc à calculer une probabilité conditionnelle (la condition est que l'événement « S » est réalisé).

$$\begin{aligned} P_S(R) &= \frac{P(S \cap R)}{P(S)} \\ &= \frac{0,25 \times 0,5}{0,7625} \\ &\approx 0,1639 \end{aligned}$$

Ainsi, $\underline{P_S(R) \approx 0,16.}$

5. Si « $SS\bar{S}$ » désigne le fait que sur les 3 clients choisis, le premier et le second sont satisfaits et que le 3^e n'est pas, alors, il n'y a que 3 possibilités pour qu'il n'y ait qu'un client non satisfait :

$$SS\bar{S} \quad ; \quad S\bar{S}S \quad ; \quad \bar{S}SS$$

La probabilité du schéma « $\bar{S}SS$ » est égal à $P(\bar{S}) \times P(S) \times P(S)$; ainsi, la probabilité pour qu'exactement un client ne soit pas satisfait sur les trois est :

$$\begin{aligned} P &= 3 \times P(\bar{S}) \times [P(S)]^2 \\ &= 3 \times (1 - 0,7625) \times (0,7625)^2 \\ &\approx 0,41425 \end{aligned}$$

Ainsi, la probabilité demandée est à peu près égale à 0,41.

Exercice 5 (6 points)**Commun à tous les candidats****Partie A**

1. (a) La fonction f est de la forme $f = uv + 3$, où $u(x) = (-4x^2 + 5)$ et $v(x) = e^{-x}$. Donc $f' = u'v + uv'$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= -8xe^{-x} + (-4x^2 + 5) \times (-e^{-x}) \\ &= e^{-x} (-8x - (-4x^2 + 5)) \\ &= \underline{(4x^2 - 8x - 5)e^{-x}} \end{aligned}$$

- (b) $f'(x)$ est du signe de $P(x) = 4x^2 - 8x - 5$ car e^{-x} est toujours strictement positif.
Le discriminant de $P(x)$ est :

$$\begin{aligned} \Delta &= b^2 - 4ac \\ &= (-8)^2 - 4 \times 4 \times (-5) \\ &= 64 + 80 \\ &= 144 &= 12^2 \end{aligned}$$

Ainsi, les deux racines de $P(x)$ sont :

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} & x_2 &= \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\ &= \frac{8 - 12}{8} & &= \frac{8 + 12}{8} \\ &= -\frac{1}{2} & &= \frac{5}{2} \end{aligned}$$

Ainsi, le signe de $P(x)$ sur $\mathbb{R}$ est :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$	$+\infty$
$P(x)$		+	-	+

Par conséquent, sur $[0; +\infty[$, on a :

x	0	$\frac{5}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+

2. (a) On sait que pour tout réel x , $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$.
Ainsi :

$$\begin{aligned} f(x) &= (-4x^2 + 5) \times \frac{1}{e^{-x}} + 3 \\ &= -4x^2 \times \frac{1}{e^x} + 5 \times \frac{1}{e^x} + 3 \\ &= -\frac{4x^2}{e^x} + \frac{5}{e^x} + 3 \end{aligned}$$

(b) On a :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{4x^2}{e^x} \right) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{5}{e^x} \right) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{par somme, } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$$

(c) Ce dernier résultat signifie que $\mathcal{C}$ admet une asymptote d'équation $y = 3$ en $+\infty$.

3. Le tableau de variation de la fonction f est :

x	0	$\frac{5}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$		- 0 +	
$f(x)$	8	$\longrightarrow f\left(\frac{5}{2}\right)$	$\longrightarrow 3$

$$\begin{aligned} f\left(\frac{5}{2}\right) &= \left(-4 \times \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 5 \right) e^{-\frac{5}{2}} + 3 \\ &= -20e^{-2,5} + 3 \\ &\approx 1,36 \end{aligned}$$

4. La fonction f est continue et strictement décroissante sur $\left[0; \frac{5}{2}\right[$.

De plus, $3 \in \left[f(0); f\left(\frac{5}{2}\right)\right]$. Ainsi, d'après le théorème de la valeur intermédiaire, l'équation $f(x) = 3$ admet une unique solution sur $\left[0; \frac{5}{2}\right]$.

Sur $\left[\frac{5}{2}; +\infty\right[$, la fonction f est strictement croissante de $f\left(\frac{5}{2}\right)$ à 3 sans jamais atteindre cette dernière valeur. Donc l'équation $f(x) = 3$ n'admet aucune solution sur ce dernier intervalle.

Ainsi, l'équation $f(x) = 3$ admet une unique solution sur $[0; +\infty[$.

A l'aide de la calculatrice, on trouve $x_0 \approx 1,12$.

Partie B

1. Une production de 500 litres correspond à $x = 5$. On doit donc calculer $f(5)$.

$$\begin{aligned} f(5) &= (-4 \times 5^2 + 5)e^{-5} + 3 \\ f(5) &\approx 2,36 \end{aligned}$$

$f(x)$ étant exprimée en centaine d'euros, le coût moyen unitaire est d'à peu près 236 €.

2. (a) La fonction f atteint son minimum pour $x = 2,5$, ce qui correspond à un volume de 250 litres de peinture.

Nous avons calculé une valeur approchée de $f(2,5)$ dans la partie A : $f(2,5) \approx 1,36$. Ainsi, le coût moyen unitaire minimal est égal à 136 €.

(b) Pour une production de 250 litres de peinture, le prix de vente sera de 250 € (1 hectolitre vaut 100 € donc 1 litre vaut 1 €).

Ainsi, le bénéfice sera égal à : $250 - 136 \times 2,5 = -90$ €, bénéfice négatif.

Donc l'entreprise ne pourra pas être bénéficiaire.



$f(x)$ désigne le coût moyen de production **unitaire**, ce qui signifie le montant que l'entreprise doit payer en moyenne pour **1 hectolitre** produit.

Il ne faut donc pas oublier que le coût total que l'entreprise doit payer pour x hectolitres produits est $xf(x)$.

3. Le bénéfice peut être exprimé par :

$$\begin{aligned} B(x) &= 3x - xf(x) \\ &= x(3 - f(x)) \\ &= x[-(-4x^2 + 5)e^{-x}] \\ &= x(4x^2 - 5)e^{-x} \end{aligned}$$

On doit donc résoudre l'inéquation $B(x) \geq 0$.

$$\begin{aligned} B(x) \geq 0 &\Leftrightarrow 4x^2 - 5 \geq 0 \text{ car } x \geq 0 \text{ et } e^{-x} \geq 0 \\ &\Leftrightarrow 4x^2 \geq 5 \\ &\Leftrightarrow x^2 \geq \frac{5}{4} \\ &\Leftrightarrow x \geq \sqrt{\frac{5}{4}} \text{ car } x \geq 0 \\ &\Leftrightarrow x \geq 1,12 \end{aligned}$$

Il faut donc que l'entreprise produise plus de 112 litres pour qu'elle soit rentable.

Autre méthode : Nous avons vu dans la partie A que $f(x_0) = 3$. Ainsi, le seuil de rentabilité correspond à x_0 hectolitres, soit 112 litres.