
Sommaire

SUJET	2
Exercice 1. Probabilités (Commun à tous les candidats)	2
Exercice 2. Suites,algorithmique,convexité,loi normale (Commun à tous les candidats)	3
Exercice 3. Exponentielle, TVI (Commun à tous les candidats)	4
Exercice 4. Pourcentage, fonction, valeur moyenne (Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité et candidats de L)	5
Exercice 4. Graphe pondéré et probabiliste (Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité)	6
CORRECTION	8
Exercice 1. Probabilités (Commun à tous les candidats)	8
Exercice 2. Suites,algorithmique,convexité,loi normale (Commun à tous les candidats)	9
Exercice 3. Exponentielle, TVI (Commun à tous les candidats)	10
Exercice 4. Pourcentage, fonction, valeur moyenne (Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité et candidats de L)	11
Exercice 4. Graphe pondéré et probabiliste (Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité)	12

Document réalisé le 23 juin 2013.
Disponible sur <http://www.mathweb.fr>

Si une erreur s'est glissée, n'hésitez pas à me contacter par email :

contact@mathweb.fr

Exercice 1 (6 points)**Commun à tous les candidats**

Une usine de composants électriques dispose de deux unités de production, A et B.

La production journalière de l'usine A est de 600 pièces, celle de l'unité B est de 900 pièces.

On prélève au hasard un composant de la production d'une journée.

La probabilité qu'un composant présente un défaut de soudure sachant qu'il est produit par l'unité A est égale à 0,014.

La probabilité qu'un composant présente un défaut de soudure sachant qu'il est produit par l'unité B est égale à 0,024.

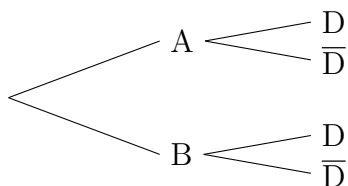
On note :

- D l'événement : « le composant présente un défaut de soudure »
- A l'événement : « le composant est produit par l'unité A »
- B l'événement : « le composant est produit par l'unité B »

On note $P(D)$ la probabilité de l'événement D et $P_A(D)$ la probabilité de l'événement D sachant que l'événement A est réalisé.

Partie A : généralités

- 1 a. D'après les données de l'énoncé, préciser $P_A(D)$ et $P_B(D)$.
b. Calculer $P(A)$ et $P(B)$.
- 2 Recopier et compléter l'arbre de probabilités ci-dessous :



- 3 a. Calculer $P(A \cap D)$ et $P(B \cap D)$.
b. En déduire $P(D)$.
- 4 On prélève dans la production totale un composant présentant un défaut de soudure. Quelle est la probabilité qu'il provienne de l'unité A ?

Partie B : contrôle de qualité

On suppose que les composants doivent présenter une résistance globale comprise entre 195 et 205 ohms. On admet que la variable aléatoire R qui, à un composant prélevé au hasard dans la production, associe sa résistance, suit une loi normale de moyenne $\mu = 200,5$ et d'écart-type $\sigma = 3,5$.

On prélève un composant dans la production.

Les résultats seront arrondis à 0,000 1 près ; ils pourront être obtenus à l'aide de la calculatrice ou de la table fournie en annexe 1.

- 1 Calculer la probabilité p_1 de l'événement : « La résistance du composant est supérieure à 211 ohms ».
- 2 Calculer la probabilité p_2 de l'événement : « La résistance du composant est comprise dans l'intervalle de tolérance indiqué dans l'énoncé ».

- 3** On prélève au hasard dans la production trois composants. On suppose que les prélèvements sont indépendants l'un de l'autre et que la probabilité qu'un composant soit accepté est égale à 0,84. Déterminer la probabilité p qu'exactement deux des trois composants prélevés soient acceptés.

Exercice 2 (4 points)

Commun à tous les candidats

Pour chacune des questions posées, une proposition est faite. Il est demandé de déterminer si cette proposition est vraie ou fausse en justifiant.

Question 1

Un étudiant a travaillé durant l'été et dispose d'un capital de 2 500 euros. À partir du premier septembre 2013, il place son capital $c_0 = 2\,500$ sur un compte rapportant 0,2 % d'intérêts composés par mois et il loue une chambre qui lui coûte 425 euros par mois.

On note c_n le capital disponible, exprimé en euros, au début de chaque mois. Par exemple le capital disponible au début du mois d'octobre vaudra :

$$c_1 = 1,002 \times c_0 - 425 = 2\,080 \text{ euros.}$$

L'année universitaire s'achève à la fin du mois de juillet 2014.

On admet que la suite des capitaux (c_n) est décrite par les relations :

- $c_0 = 2\,500$
- Pour tout entier naturel n , $c_{n+1} = 1,002 \times c_n - 425$

PROPOSITION : Sans apport supplémentaire, l'étudiant sera à découvert à partir du début du mois de mars 2014.

Question 2

Sur $I =]0; +\infty[$, on définit la fonction f par

$$f(x) = 2x + 1 - \ln x.$$

PROPOSITION : f est une fonction convexe sur I .

Question 3

On définit sur l'intervalle $I =]0; +\infty[$: $F(x) = 2x \ln x - 2x + 5$. On a effectué à l'aide d'un logiciel de calcul formel les séquences suivantes :

1	dériver($(2x) \star \ln(x) - 2x + 5$)	$2 \star \ln(x) + \frac{2 \star x}{x} - 2$
2	simplifier $\left(2 \star \ln(x) + \frac{2 \star x}{x} - 2\right)$	$\ln(x^2)$

PROPOSITION : F est une primitive de la fonction f définie sur I par $f(x) = 2 \ln x$.

Question 4

X est une variable aléatoire suivant la loi normale d'espérance $\mu = 0$ et d'écart-type $\sigma = 0,6$.

PROPOSITION : $P(-0,6 \leq X \leq 0,6) \approx 0,68$

Exercice 3 (5 points)**Commun à tous les candidats**

Une entreprise fabrique des poulies utilisées dans l'industrie automobile. On suppose que toute la production est vendue.

L'entreprise peut fabriquer entre 0 et 3 600 poulies par semaine. On note x le nombre de milliers de poulies fabriquées et vendues en une semaine (x varie donc dans l'intervalle $[0 ; 3,6]$).

Le bénéfice hebdomadaire est noté $B(x)$; il est exprimé en milliers d'euros.

L'objet de cet exercice est d'étudier cette fonction B . Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.

Partie A : étude graphique

On a représenté, en annexe 2, la fonction B dans un repère du plan.

Chaque résultat sera donné à cent poulies près ou à cent euros près suivant les cas.

Les traits utiles à la compréhension du raisonnement seront laissés sur le graphique et une réponse écrite sur la copie sera attendue pour chaque question posée.

- 1 Déterminer dans quel intervalle peut varier le nombre de poulies pour que le bénéfice soit supérieur ou égal à 13 000 euros.
- 2 Quel est le bénéfice maximum envisageable pour l'entreprise ?
Pour quel nombre N de poulies fabriquées et vendues semble-t-il être réalisé ?

Partie B : étude théorique

Le bénéfice hebdomadaire noté $B(x)$, exprimé en milliers d'euros vaut

$$B(x) = -5 + (4 - x)e^x.$$

- 1
 - a. On note B' la fonction dérivée de la fonction B .
Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $I = [0 ; 3,6]$, on a : $B'(x) = (3 - x)e^x$.
 - b. Déterminer le signe de la fonction dérivée B' sur l'intervalle I .
 - c. Dresser le tableau de variation de la fonction B sur l'intervalle I . On indiquera les valeurs de la fonction B aux bornes de l'intervalle.
- 2
 - a. Justifier que l'équation $B(x) = 13$ admet deux solutions x_1 et x_2 , l'une dans l'intervalle $[0 ; 3]$ l'autre dans l'intervalle $[3 ; 3,6]$.
 - b. À l'aide de la calculatrice, déterminer une valeur approchée à 0,01 près de chacune des deux solutions.

Exercice 4 (5 points) Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité et candidats de L

Dans cet exercice on étudie l'évolution de la dépense des ménages français en programmes audiovisuels (redevance audiovisuelle, billets de cinémas, vidéos, ...).

On note D_n la dépense des ménages en programmes audiovisuels, exprimée en milliards d'euros, au cours de l'année $1995 + n$.

année	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002
n	0	1	2	3	4	5	6	7
D_n	4,95	5,15	5,25	5,4	5,7	6,3	6,55	6,9

année	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
n	8	9	10	11	12	13	14	15
D_n	7,3	7,75	7,65	7,79	7,64	7,82	7,89	8,08

Soit f la fonction définie, pour tout nombre réel x , par

$$f(x) = -0,0032x^3 + 0,06x^2 + 5.$$

Pour tout entier n vérifiant $0 \leq n \leq 20$, on décide de modéliser la dépense des ménages français en programmes audiovisuels exprimée en milliards d'euros, au cours de l'année $1995 + n$ par le nombre $f(n)$.

- 1** Calculer $f(5)$.
- 2** Déterminer le pourcentage p de l'erreur commise en remplaçant D_5 par $f(5)$.
(Le pourcentage d'erreur est obtenu par le calcul : $p = \frac{\text{valeur réelle} - \text{valeur estimée}}{\text{valeur réelle}}$ et le résultat sera donné à 0,1 % près.)
- 3** En utilisant la fonction f , quelle estimation de la dépense totale peut-on effectuer pour l'année 2013 ? (On arrondira le résultat au centième de milliard d'euros).
- 4** On veut utiliser la fonction f pour estimer la dépense moyenne des ménages entre le 1^{er} janvier 1995 et le 1^{er} janvier 2015.

On calcule pour cela $M = \frac{1}{20} \int_0^{20} f(x) \, dx$.

- a. Déterminer une primitive F de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; 20]$.
- b. Calculer M .

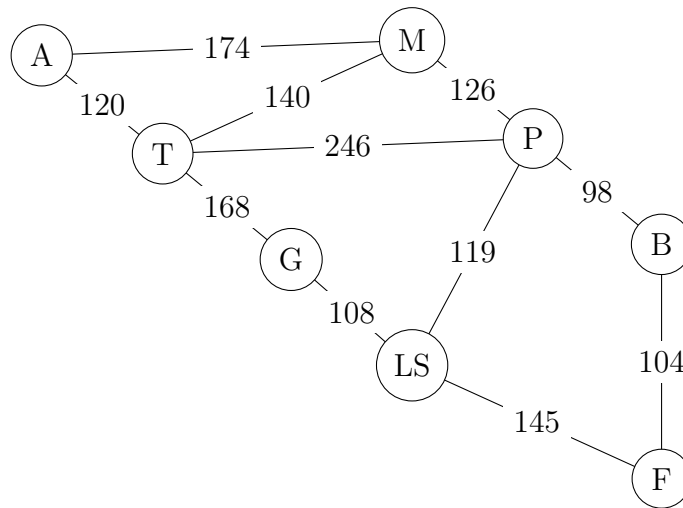
Exercice 4 (5 points)**Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité**

Un chauffeur-livreur réside en Italie dans la ville d'Aoste.

Quatre fois par mois, son employeur l'envoie livrer du matériel informatique dans la ville de Florence. Il est établi que le trajet en camion coûte, en carburant, 0,51 euro au kilomètre. Le chauffeur dispose d'un budget mensuel de 2 200 euros pour son carburant. Ce qu'il réussit à économiser lui permet de toucher une prime P équivalente en fin de mois.

Il consulte donc la carte routière ci-dessous pour optimiser ses trajets.

Le graphe ci-dessous indique les distances entre différentes villes d'Italie : Aoste, Milan, Parme, Turin, Gènes, La Spézia, Bologne et Florence. Chaque ville est désignée par son initiale.



Les deux parties sont indépendantes.

Partie A : étude du trajet

- 1 Déterminer le trajet le plus court entre Aoste et Florence. (On indiquera les villes parcourues et l'ordre de parcours).
- 2 Déterminer le budget carburant nécessaire aux quatre voyages aller-retour du mois (le résultat sera arrondi à l'euro près).

En déduire le montant de la prime P qui lui sera versée en fin de mois, à l'euro près.

Partie B : traversée de Parme

Durant son trajet, le chauffeur est obligé de traverser Parme et ses très nombreux feux tricolores. Lorsque le feu est orange, le chauffeur se comporte comme lorsqu'il est rouge, il s'arrête.

L'expérience lui a permis d'établir que s'il se présente à un feu, il se produit les événements suivants :

- Arrivé au feu, celui-ci est au vert (V) : la probabilité que le suivant soit vert est de 0,85.
- Arrivé au feu, celui-ci est orange ou rouge (R) : la probabilité que le suivant soit vert est de 0,30.

- 1 Représenter la situation par un graphe probabiliste.
- 2 Indiquer la matrice de transition M du graphe, en considérant les sommets dans l'ordre (V, R) en ligne comme en colonne.
- 3 Le premier feu rencontré est vert. La matrice P_1 donnant l'état initial est donc $\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$.
 - a. Déterminer les matrices $P_2 = P_1 \times M$ et $P_3 = P_2 \times M$. (Le détail des calculs n'est pas demandé.
 - b. Conclure quant à la probabilité p de l'événement « Le chauffeur doit s'arrêter au troisième feu ».

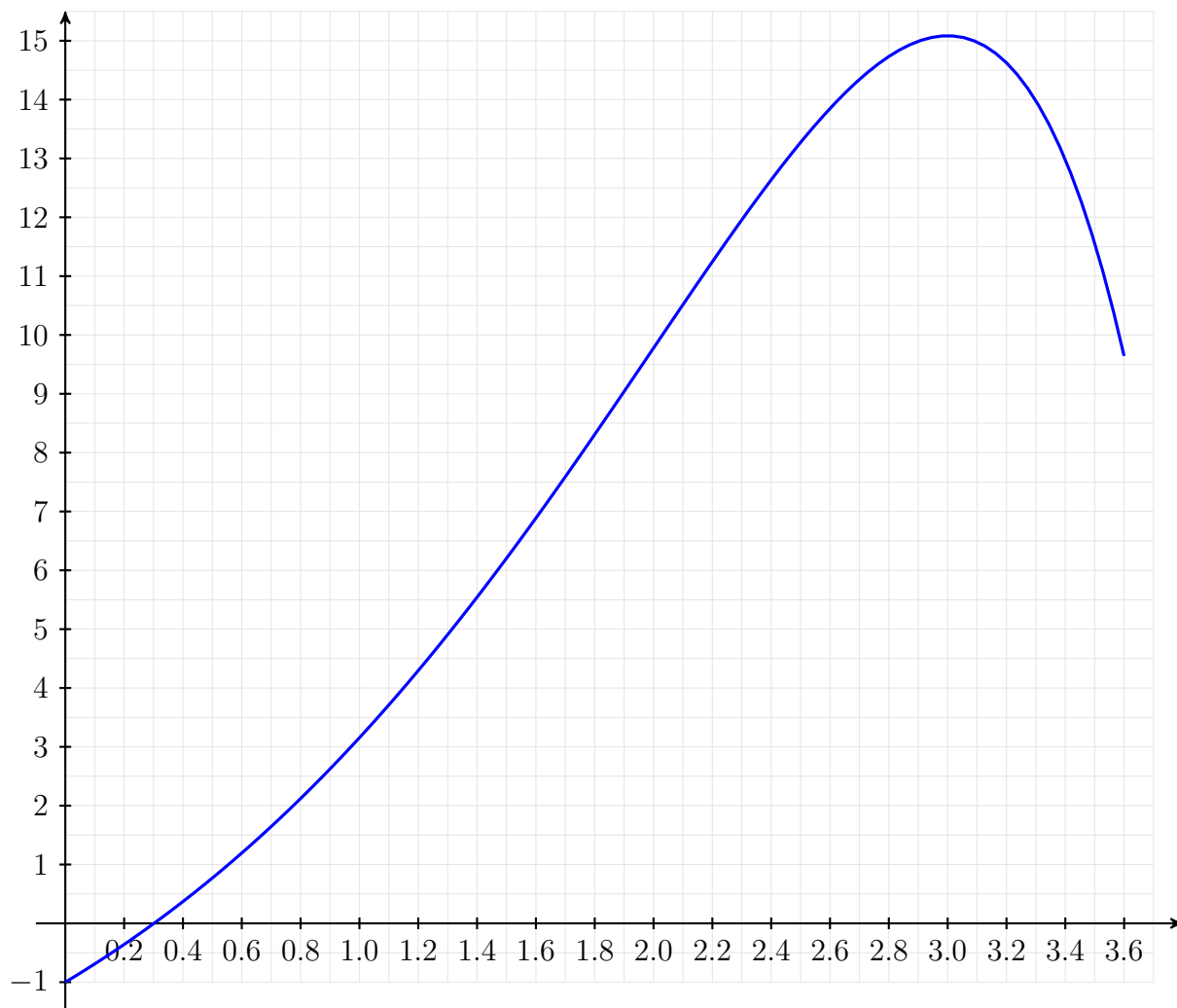
Annexes - à rendre avec la copie

Annexe 1

Extrait de la table de la loi normale pour $\mu = 200,5$ et $\sigma = 3,5$.

t	$p(X \leq t)$	t	$p(X \leq t)$	t	$p(X \leq t)$
186	0,000 0	196	0,099 3	206	0,942 0
187	0,000 1	197	0,158 7	207	0,968 4
188	0,000 2	198	0,237 5	208	0,983 9
189	0,000 5	199	0,334 1	209	0,992 4
190	0,001 3	200	0,443 2	210	0,996 7
191	0,003 3	201	0,556 8	211	0,998 7
192	0,007 6	202	0,665 9	212	0,999 5
193	0,016 1	203	0,762 5	213	0,999 8
194	0,031 6	204	0,841 3	214	0,999 9
195	0,058 0	205	0,900 7	215	1,000 0

Annexe 2



CORRECTION

Exercice 1 (6 points)

Commun à tous les candidats

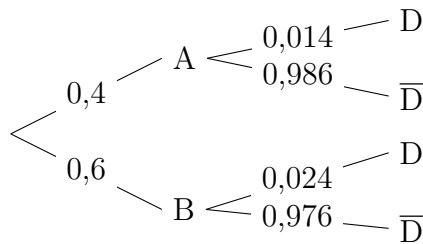
Partie A : généralités

- 1 a. D'après l'énoncé, $P_A(D) = 0,014$ et $P_B(D) = 0,024$.

$$\begin{aligned} \text{b. } P(A) &= \frac{600}{600 + 900} \\ &= \frac{600}{1500} \\ &= \frac{6}{15} \\ P(A) &= \frac{2}{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(B) &= \frac{900}{600 + 900} \\ &= \frac{900}{1500} \\ &= \frac{9}{15} \\ P(B) &= \frac{3}{5} \end{aligned}$$

- 2 L'arbre pondéré est le suivant :



- 3 a. $P(A \cap D) = P(A) \times P_A(D)$
 $= 0,4 \times 0,014$
 $P(A \cap D) = 0,0056$.

$$\begin{aligned} P(B \cap D) &= P(B) \times P_B(D) \\ &= 0,6 \times 0,024 \\ \mathbf{P(B \cap D) = 0,0144} . \end{aligned}$$

- b. D'après la formule des probabilités totales, on a :

$$\begin{aligned} P(D) &= P(A \cap D) + P(B \cap D) \\ &= 0,0056 + 0,0144 \end{aligned}$$

$$\mathbf{P(D) = 0,02} .$$

4
$$P_D(A) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)}$$
$$= \frac{0,0056}{0,02}$$

$$\mathbf{P_D(A) = 0,28} .$$

La probabilité pour que le composant provienne de l'unité A sachant qu'il est défectueux est donc égale à 0,28.

Partie B : contrôle de qualité

- 1 D'après la table de la loi normale donnée en annexe,

$$p_1 = P(X \leq 211) = 0,9987.$$

- 2 $p_2 = P(X \leq 205) - P(X \leq 195)$

$$= 0,9007 - 0,058$$

$$p_2 = 0,8427.$$

- 3 La variable aléatoire représentant le nombre de composants acceptés suit la loi binomiale $\mathcal{B}(3; 0,84)$. En effet, on répète de façon indépendante un schéma de Bernoulli (deux issues possibles : composant accepté ou composant rejeté). Ainsi,

$$p = P(X = 2)$$

$$= \binom{3}{2} (0,84)^2 (1 - 0,84)^{3-2}$$

$$= 3 \times 0,7056 \times 0,16$$

$$p \approx 0,3387.$$

Exercice 2 (4 points)

Commun à tous les candidats

Question 1.

$$c_2 = 1,002c_1 - 425$$

$$= 1,002 \times 2\,080 - 425$$

$$= 1\,659,16$$

$$c_3 = 1,002c_2 - 425$$

$$= 1,002 \times 1\,659,16 - 425$$

$$= 1\,237,48$$

$$c_4 = 1,002c_3 - 425$$

$$= 1,002 \times 1\,237,48 - 425$$

$$= 814,95$$

$$c_5 = 1,002c_4 - 425$$

$$= 1,002 \times 814,95 - 425$$

$$= 391,58$$

$$c_6 = 1,002c_5 - 425$$

$$= 1,002 \times 391,58 - 425$$

$$= -32,64$$

c_6 correspond au capital début mars 2014. **Donc l'affirmation est VRAIE.**

Question 2.

$$f(x) = 2x + 1 - \ln x$$

$$f'(x) = 2 - \frac{1}{x}$$

$$f''(x) = \frac{1}{x^2} > 0 \text{ sur } I. \text{ Donc } f \text{ est bien convexe sur } I.$$

La proposition est donc VRAIE.

Question 3.

D'après le logiciel de calcul formel, $F'(x) = f(x)$ (car $2 \ln x = \ln x^2$ sur I).

La proposition est donc VRAIE.

Question 4.

$X \hookrightarrow \mathcal{N}(0; 0,6)$ donc, d'après le cours :

$$P(0 - \sqrt{0,6} \leq X \leq 0 + \sqrt{0,6}) \approx 0,68$$

L'affirmation est donc FAUSSE.

Exercice 3 (5 points)**Commun à tous les candidats****Partie A : étude graphique**

- 1** On trace la droite horizontale d'ordonnée 13 ; elle coupe la courbe en deux points d'abscisse 2,45 et 3,4. Sur $[2,45 ; 3,4]$, la courbe est située au-dessus de cette droite, ce qui signifie que le bénéfice est supérieur à 13 000 euros.

Ainsi, le nombre de poulies doit varier entre 2 450 et 3 400 pour que le bénéfice soit supérieur ou égal à 13 000 euros.

- 2** La courbe admet un maximum en $x = 3$ et son ordonnée vaut alors à peu près 15,1.

Ainsi, le bénéfice maximum envisageable est 15 100 euros et peut être obtenu pour 3 000 poulies fabriquées et vendues.

Partie B : étude théorique

- 1** a. Posons $u(x) = 4 - x$ et $v(x) = e^x$. Alors, $u'(x) = -1$ et $v'(x) = e^x$.

$$\begin{aligned} B'(x) &= 0 + u'v + uv' \\ &= -e^x + (4 - x)e^x \\ &= (-1 + 4 - x)e^x \end{aligned}$$

$$B'(x) = (3 - x)e^x.$$

- b. Pour tout réel x , $e^x > 0$ donc $B'(x)$ est du signe de $(3 - x)$. Or,

$$3 - x > 0 \Leftrightarrow 3 > x$$

Ainsi,

- si $0 \leq x < 3$, $B'(x) > 0$,
- si $0 \leq x < 3,6$, $B'(x) \leq 0$.

- c. On a :

x	0	3	3,6
$B'(x)$	+	0	-
$B(x)$	-1	$e^3 - 5$	$B(3,6)$

- $B(0) = -5 + (4 - 0)e^0 = -1$.
- $B(3) = -5 + (4 - 3)e^3 = -5 + e^3$.
- $B(3,6) = -5 + (4 - 3,6)e^{3,6}$
 $= -5 + 0,4e^{3,6}$
 $\approx 9,639\,293\,777$

- 2** a. Sur $[0 ; 3]$, la fonction B est continue. De plus, $B(0) < 13$ et $B(3) = e^3 - 5 \approx 15,08 > 13$. D'après le théorème de la valeur intermédiaire, il existe une valeur x_1 telle que $B(x_1) = 13$. Par un raisonnement analogue, on montre qu'il existe une valeur x_2 sur $[3 ; 3,6]$ telle que $B(x_2) = 13$.

- b. Avec la calculatrice, on voit d'une part que $B(2,455) \approx 12,993\,7$ et $B(2,456) \approx 13,000\,08$.
Ainsi, $x_1 \approx 2,46$.

D'autre part, on voit que $B(3,398) \approx 13,002$ et $B(3,399) \approx 12,990$.

Ainsi, $x_2 \approx 3,40$.

Exercice 4 (5 points) Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité et candidats de L

1 $f(5) = -0,003\,2 \times 5^3 + 0,06 \times 5^2 + 5$
 $= -0,4 + 1,5 + 5$

$f(5) = 6,1$.

2 $p = \frac{6,3 - 6,1}{6,3} \times 100$
 $= \frac{-0,2}{6,3} \times 100$
 $= \frac{-20}{6,3} \%$
 $\approx -3,17$

Ainsi, le pourcentage de l'erreur commise est d'environ **3,2 %**.

3 En 2013, $n = 18$ et $f(18) = -0,003\,2 \times 18^3 + 0,06 \times 18^2 + 5$
 $= -18,662\,4 + 19,44 + 5$
 $= 5,777\,6$.

Ainsi, on peut estimer qu'en 2013, la dépense totale des ménages sera égale à environ **5,78 milliard d'euros**.

4 a. Une primitive de f est :

$$F(x) = -\frac{0,003\,2}{4}x^4 + \frac{0,06}{3}x^3 + 5x + k \quad , \quad k \in \mathbb{R}$$

ou encore :

$$F(x) = -0,000\,8x^4 + 0,02x^3 + 5x + k \quad , \quad k \in \mathbb{R}.$$

b. $M = \frac{1}{20} \int_0^{20} f(x) \, dx$
 $= \frac{F(20) - F(0)}{20}$
 $= \frac{-0,000\,8 \times 20^4 + 0,02 \times 20^3 + 5 \times 20}{20}$
 $= \frac{132}{20}$
 $M = 6,6$.

Exercice 4 (5 points)**Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité****Partie A : étude du trajet**

- 1 Utilisons l'algorithme de Dijkstra pour trouver la plus courte distance entre A et F.

A	T	M	G	P	LS	B	F
0	120 _A	174 _A	∞	∞	∞	∞	∞
0	0	174 _A	288 _T	366 _T	∞	∞	∞
0	0	0	288 _T	300 _M	∞	∞	∞
0	0	0	0	300 _M	396 _G	∞	∞
0	0	0	0	0	396 _G	398 _P	∞
0	0	0	0	0	0	398 _P	541 _{LS}
0	0	0	0	0	0	0	502 _B

Ainsi, le trajet le plus court est A-M-P-B-F et il fera 502 km.

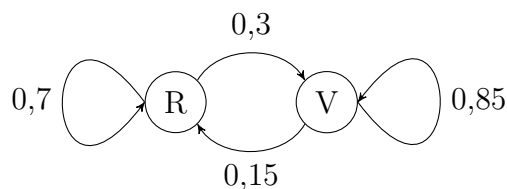
- 2 $4 \times 2 \times 502 \times 0,51 = 2048,16$.

Ainsi, à l'euro près, le budget carburant s'élève à 2048 euros.

Sa prime sera alors $2200 - 2048 = 152$ euro.

Partie B : traversée de Parme

- 1 Le graphe probabiliste correspondant à la situation est le suivant :



- 2 La matrice de transition est alors :

$$M = \begin{pmatrix} 0,85 & 0,15 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix}$$

- 3 a. $P_2 = P_1 M$

$$= (1 \ 0) \begin{pmatrix} 0,85 & 0,15 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix}$$

$$P_2 = (0,85 \ 0,15)$$

$$P_3 = P_2 M$$

$$= (0,85 \ 0,15) \begin{pmatrix} 0,85 & 0,15 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix}$$

$$P_3 = (0,7675 \ 0,2325)$$

- b. Des calculs précédents, on déduit que si le premier feu est vert, alors la probabilité pour que le troisième soit vert est égale à 0,7675.