

Baccalauréat Série ES/L Liban, juin 2014

Disponible sur <http://www.mathweb.fr>

Sujet

Stéphane PASQUET

1^{er} juin 2014

Exercice 1 (5 points)

Un serveur, travaillant dans une pizzeria, remarque qu'en moyenne, 40 % des clients sont des familles, 25 % des clients sont des personnes seules et 35 % des clients sont des couples. Il note aussi que :

- 70 % des familles laissent un pourboire ;
- 90 % des personnes seules laissent un pourboire ;
- 40 % des couples laissent un pourboire.

Un soir donné, ce serveur prend au hasard une table occupée dans la pizzeria. On s'intéresse aux événements suivants :

F : « la table est occupée par une famille » ;

S : « la table est occupée par une personne seule » ;

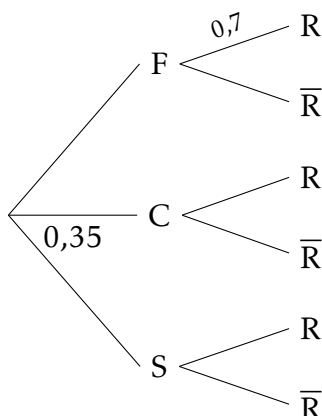
C : « la table est occupée par un couple » ;

R : « le serveur reçoit un pourboire ».

On note $\bar{A}$ l'événement contraire de A et $P_B(A)$ la probabilité de A sachant B.

Partie A

1. D'après les données de l'énoncé, préciser les probabilités $P(F)$ et $P_S(R)$.
2. Recopier et compléter l'arbre pondéré suivant :



3. (a) Calculer $P(F \cap R)$.
(b) Déterminer $P(R)$.
4. Sachant que le serveur a reçu un pourboire, calculer la probabilité que ce pourboire vienne d'un couple. Le résultat sera arrondi à 10^{-3} .

Partie B

On note X la variable aléatoire qui, à un soir donné, associe le montant total en euro des pourboires obtenus par le serveur.

On admet que X suit la loi normale d'espérance $\mu = 15$ et d'écart-type $\sigma = 4,5$.

Dans les questions suivantes, les calculs seront effectués à la calculatrice et les résultats arrondis à 10^{-2} .

1. Calculer :
 - (a) la probabilité que le montant total des pourboires reçus par le serveur soit compris entre 6 et 24 euros.
 - (b) $P(X \geq 20)$.
2. Calculer la probabilité que le montant total des pourboires du serveur soit supérieur à 20 euros sachant que ce montant est compris entre 6 et 24 euros.

Exercice 2 - Enseignement obligatoire et L (4 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.

Chaque question ci-après comporte quatre propositions de réponse.

Pour chacune de ces questions, une seule des réponses proposées est exacte. Indiquer sur la copie le numéro de la question et recopier la réponse choisie. On ne demande pas de justification.

Chaque réponse exacte rapportera 1 point, une réponse fausse ou l'absence de réponse n'apporte ni n'enlève de point.

Un fumeur est dit fumeur régulier s'il fume au moins une cigarette par jour.

En 2010, en France, la proportion notée p de fumeurs réguliers, âgés de 15 à 19 ans, était de 0,236.

(Source : Inpes)

On a $p = 0,236$.

1. La probabilité que, sur un groupe de 10 jeunes âgés de 15 à 19 ans choisis au hasard et de manière indépendante, aucun ne soit fumeur régulier est, à 10^{-3} près :

(a) 0,136 (b) 0 (c) 0,068 (d) 0,764
2. Un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 0,95 de la fréquence de fumeurs réguliers dans un échantillon de 500 jeunes âgés de 15 à 19 ans est :
(Les bornes de chaque intervalle sont données à 10^{-3} près)

(a) $[0,198; 0,274]$ (b) $[0,134; 0,238]$ (c) $[0,191; 0,281]$ (d) $[0,192; 0,280]$
3. La taille n de l'échantillon choisi afin que l'amplitude de l'intervalle de fluctuation au seuil de 0,95 soit inférieure à 0,01, vaut :

(a) $n = 200$ (b) $n = 400$ (c) 21 167 (d) 27 707

4. Dans un échantillon de 250 jeunes fumeurs réguliers, âgés de 15 à 19 ans, 99 sont des filles. Au seuil de 95 %, un intervalle de confiance de la proportion de filles parmi les fumeurs réguliers âgés de 15 à 19 ans est :
(Les bornes de chaque intervalle sont données à 10^{-2} près)

(a) $[0,35;0,45]$ (b) $[0,33;0,46]$ (c) $[0,39;0,40]$ (d) $[0,30;0,50]$

Exercice 3 - ES obligatoire et L (5 points)

La médiathèque d'une petite ville a ouvert ses portes le 2 janvier 2013 et a enregistré 2 500 inscriptions en 2013.

Elle estime que, chaque année, 80 % des anciens inscrits renouveleront leur inscription l'année suivante et qu'il y aura 400 nouveaux adhérents.

On modélise cette situation par une suite numérique (a_n) .

On note $a_0 = 2\,500$ le nombre d'inscrits à la médiathèque en 2013 et a_n représente le nombre d'inscrits à la médiathèque pendant l'année $2013 + n$.

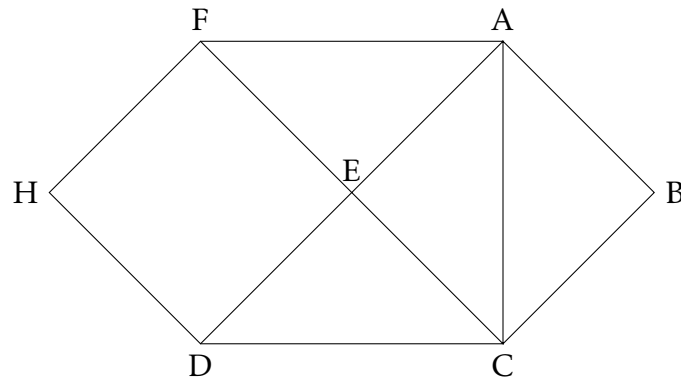
1. (a) Calculer a_1 et a_2 .
(b) Justifier que, pour tout entier naturel n , on a la relation $a_{n+1} = 0,8 \times a_n + 400$.
2. On pose, pour tout entier naturel n , $v_n = a_n - 2\,000$.
(a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de premier terme $v_0 = 500$ et de raison $q = 0,8$.
(b) En déduire que le terme général de la suite (a_n) est $a_n = 500 \times 0,8^n + 2\,000$.
(c) Calculer la limite de la suite (a_n) .
(d) Que peut-on en déduire pour le nombre d'adhérents à la médiathèque si le schéma d'inscription reste le même au cours des années à venir ?
3. On propose l'algorithme suivant :

Variables	: N entier A réel
Initialisation	: N prend la valeur 0 A prend la valeur 2 500
Traitement	: Tant que $A - 2\,000 > 50$ A prend la valeur $A \times 0,8 + 400$ N prend la valeur $N + 1$ Fin du Tant que
Sortie	: Afficher N

- (a) Expliquer ce que permet de calculer cet algorithme.
- (b) À l'aide de la calculatrice, déterminer le résultat obtenu grâce à cet algorithme et interpréter la réponse dans le contexte de l'exercice.

Exercice 3 - ES Spécialité (5 points)

On a schématisé ci-dessous le plan d'une MJC (Maison de la Jeunesse et de la Culture) par un graphe dont les sommets sont les salles et les arêtes sont les passages (portes, couloirs ou escaliers) entre les salles. On appelle H le hall d'entrée et B le bureau du directeur.



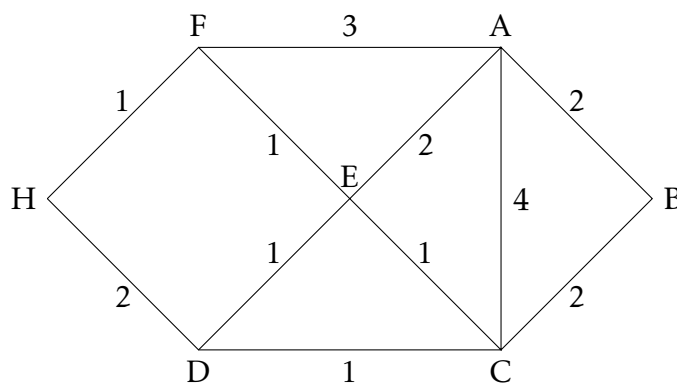
En fin de journée, un agent de service fait le tour de la MJC pour récupérer dans chaque salle (bureau du directeur et hall inclus) les objets oubliés par les enfants.

1. Préciser si ce graphe est connexe en justifiant la réponse.
2. Déterminer, en justifiant, si l'agent de service peut passer par toutes les salles en utilisant une fois et une seule chaque passage.
3. On range les sommets par ordre alphabétique.
Donner la matrice d'adjacence M associée au graphe.
4. On donne :

$$M^4 = \begin{pmatrix} 31 & 15 & 26 & 21 & 27 & 18 & 12 \\ 15 & 12 & 15 & 12 & 18 & 12 & 6 \\ 26 & 15 & 31 & 18 & 27 & 21 & 12 \\ 21 & 12 & 18 & 20 & 17 & 18 & 5 \\ 27 & 18 & 27 & 17 & 34 & 17 & 16 \\ 18 & 12 & 21 & 18 & 17 & 20 & 5 \\ 12 & 6 & 12 & 5 & 16 & 5 & 10 \end{pmatrix}$$

En déduire le nombre de chemins de longueur 4 entre les sommets B et H.

5. On a indiqué sur le graphe ci-dessous le temps en minute mis pour passer entre les différentes salles en ouvrant et fermant les portes à clé.



À l'aide d'un algorithme, déterminer le temps minimal en minutes pour aller de B à H.

Exercice 4 (6 points)

Partie A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0;5]$ par :

$$f(x) = x + 1 + e^{-x+0,5}.$$

On a représenté en annexe, dans un plan muni d'un repère orthonormé :

- la courbe $\mathcal{C}$ représentative de la fonction f ;
 - la droite Δ d'équation $y = 1,5x$.
1. (a) Vérifier que pour tout x appartenant à l'intervalle $[0;5]$, on a $f'(x) = 1 - e^{-x+0,5}$, où f' désigne la fonction dérivée de la fonction f .
(b) Résoudre dans l'intervalle $[0;5]$ l'équation $f'(x) = 0$.
(c) Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0;5]$.
(d) Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0;5]$.
 2. On note α l'abscisse du point d'intersection de $\mathcal{C}$ et Δ .
(a) Donner, par lecture graphique, un encadrement de α à 0,5 près.
(b) Résoudre graphiquement sur l'intervalle $[0;5]$ l'inéquation $f(x) < 1,5x$.

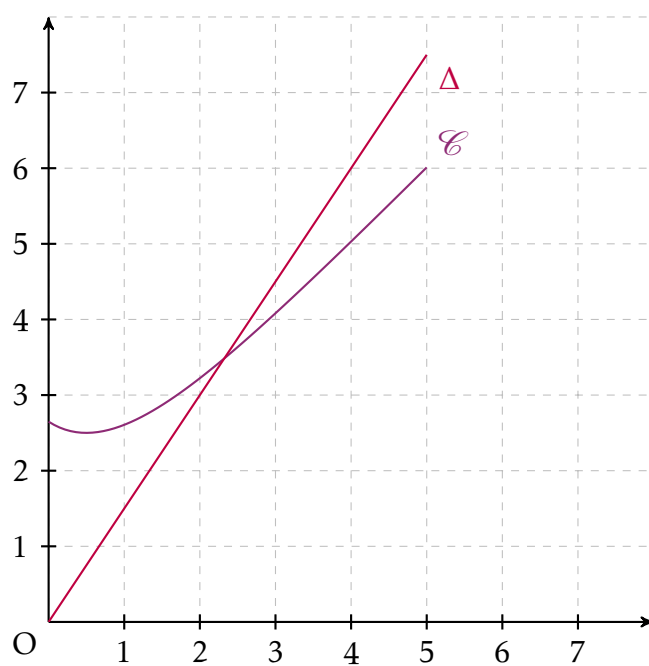
Partie B : Application

Une entreprise fabrique des cartes à puces électroniques à l'aide d'une machine.

La fonction f , définie dans la partie A, représente le coût d'utilisation de la machine en fonction de la quantité x de cartes produites, lorsque x est exprimé en centaines de cartes et $f(x)$ en centaines d'euros.

1. (a) Dédurre de la partie A, le nombre de cartes à produire pour avoir un coût minimal d'utilisation de la machine.
(b) Chaque carte fabriquée par la machine est vendue 1,50 €. La recette perçue pour la vente de x centaines de cartes vaut donc $1,5x$ centaines d'euros. Vérifier que le bénéfice obtenu, en centaines d'euros, par la vente de x centaines de cartes est donné par $B(x) = 0,5x - 1 - e^{-x+0,5}$.
2. (a) Montrer que la fonction B est strictement croissante sur l'intervalle $[0;5]$.
(b) Montrer que, sur l'intervalle $[0;5]$, l'équation $B(x) = 0$ admet une unique solution comprise entre 2,32 et 2,33.
3. On dira que l'entreprise réalise un bénéfice lorsque $B(x) > 0$. Indiquer la quantité minimale qui doit figurer sur le carnet de commandes de l'entreprise pour que celle-ci puisse réaliser un bénéfice.

Annexe 1 - Relatif à l'exercice 4

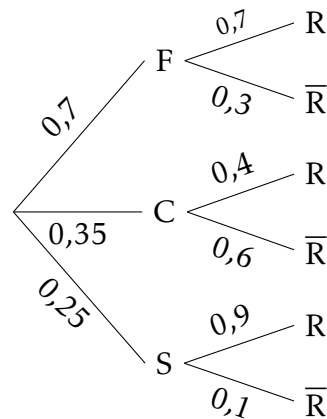


Correction

Exercice 1

Partie A

1. D'après l'énoncé, on a $P(F) = 0,4$ et $P_S(R) = 0,9$.
2. On a :



3. (a) $P(F \cap R) = P(F) \times P_F(R)$
 $= 0,4 \times 0,7$

$$P(F \cap R) = 0,28$$

- (b) La formule des probabilités totales nous donne :

$$P(R) = P(F \cap R) + P(C \cap R) + P(S \cap R)$$
$$= 0,28 + 0,35 \times 0,4 + 0,25 \times 0,9$$

$$P(R) = 0,645$$

4. On sait que le serveur a reçu un pourboire, donc on sait que l'événement R est réalisé. Il s'agit donc ici de calculer une probabilité conditionnelle : $P_R(C)$.

$$P_R(C) = \frac{P(C \cap R)}{P(R)}$$
$$= \frac{0,35 \times 0,4}{0,645}$$

$$P_R(C) \approx 0,217$$

Partie B

1. (a) $P(6 \leq X \leq 24) \approx 0,95$.
(b) $P(X \geq 20) \approx 0,13$.
2. $P_{(6 \leq X \leq 24)}(X \geq 20) = \frac{P((X \geq 20) \cap (6 \leq X \leq 24))}{P(6 \leq X \leq 24)}$
 $= \frac{P(20 \leq X \leq 24)}{P(6 \leq X \leq 24)}$

$$P_{(6 \leq X \leq 24)}(X \geq 20) \approx 0,12$$

Exercice 2 - Enseignement obligatoire et L

1. Réponse (d).

En effet, la probabilité demandée est $1 - p = 1 - 0,236 = 0,764$.

2. Réponse (a).

En effet, en appliquant la formule $\left[p - 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}; p + 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right]$, on trouve l'intervalle $[0,198780224439; 0,273219775561]$.

Notez que l'on arrondit toujours la borne inférieure par défaut (0,198780224439 est arrondi à 0,198 et non 0,199) et la borne supérieure par excès (0,273219775561 est arrondi à 0,274) et ceci afin que ces valeurs soient bien comprises dans l'intervalle de fluctuation.

3. Réponse (d).

En effet, on se doute bien (à la vue de l'intervalle de fluctuation trouvé précédemment) que pour $n = 200$ et $n = 400$, l'amplitude sera plus grande, donc ne sera pas inférieure à 0,01.

Il ne reste plus qu'à tester les deux autres valeurs de n sachant que l'amplitude est égale à $2 \times 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$. On constate que pour $n = 27707$, l'amplitude est à peu près égale à 0,00999986174084, donc est bien inférieure à 0,01.

4. Réponse (b).

En effet, en appliquant la formule $\left[f - \frac{1}{\sqrt{n}}; f + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$, on trouve l'intervalle $[0,333; 0,460]$ en prenant $f = \frac{99}{250}$ et $n = 250$.

Exercice 3 - ES obligatoire et L

1. (a) $a_1 = 0,8 \times a_0 + 400$, donc $a_1 = 2400$.

$$a_2 = 0,8 \times a_1 + 400, \text{ donc } a_2 = 2320.$$

(b) 80% des anciens inscrits renouvellent leur inscription, d'où le « $0,8a_n$ » ; à cela, viennent s'ajouter 400 nouveaux inscrits d'une année à l'autre, d'où le « $+400$ ».

$$\text{On obtient au final } a_{n+1} = 0,8a_n + 400.$$

2. (a) $v_n = a_n - 2000$ donc au rang $n + 1$, on a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= a_{n+1} - 2000 \\ &= 0,8a_n + 400 - 2000 \\ &= 0,8a_n - 1600 \\ &= 0,8\left(a_n - \frac{1600}{0,8}\right) \\ &= 0,8(a_n - 2000) \end{aligned}$$

$$\boxed{v_{n+1} = 0,8v_n}$$

La suite (v_n) est donc géométrique de raison $q = 0,8$.

Son premier terme est : $v_0 = a_0 - 2000$

$$= 2500 - 2000$$

$$\boxed{v_0 = 500}$$

- (b) De la question précédente, on déduit que pour tout entier naturel n , $v_n = v_0 \times q_n$, soit $v_n = 500 \times 0,8^n$.
Or, $v_n = a_n - 2000$, donc $a_n = v_n + 2000$, soit $a_n = 500 \times 0,8^n + 2000$.
- (c) $0 < 0,8 < 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,8^n = 0$.
Ainsi, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (500 \times 0,8^n) = 0$ et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 400$.
- (d) Si le schéma d'inscription reste le même au cours des années à venir, on peut déduire de la question précédente que le nombre d'adhérents tendra à se rapprocher des 400.
3. (a) Cet algorithme permet d'afficher la première valeur de N pour laquelle $A - 2000 \leq 50$, c'est-à-dire $A \leq 2050$.
Il affiche donc le nombre d'années qu'il faudra attendre avant que le nombre d'adhérents soit inférieur ou égal à 2050.
- (b) À la calculatrice, on trouve $N = 11$.

Exercice 3 - Spécialité

- Deux sommets quelconques de ce graphe peuvent être reliés par une chaîne donc ce graphe est connexe.
- Les sommets de ce graphe ont un degré impair sauf deux d'entre eux. Il est de plus connexe donc d'après le théorème d'Euler, il existe une chaîne eulérienne d'extrémités F et D (les sommets de degré impair), ce qui signifie que l'agent peut passer par toutes les salles en utilisant une seule fois et une seule chaque passage.
- La matrice d'adjacence de ce graphe est :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Pour connaître le nombre de chemins de longueur 4 entre les sommets B et H , on regarde le coefficient $m_{2,7}$ ou $m_{7,2}$.
On trouve alors 6 chemins de longueur 4.
- À l'aide de l'algorithme de Dijkstra, on vérifie que le temps minimum pour aller de B à H est 5 minutes (en empruntant, par exemple, le chemin $B-C-D-H$).
(Cela dit, pour un graphe aussi simple, ça fait vraiment pitié de sortir l'algorithme de Dijkstra pour trouver ça ...)

Exercice 4

Partie A

1. $f(x)$ est de la forme $v(x) + e^{u(x)}$, avec $u(x) = -x + 0,5$ et $v(x) = x + 1$.
Donc $f'(x) = v'(x) + u'(x)e^{u(x)}$, avec $v'(x) = 1$ et $u'(x) = -1$, d'où $f'(x) = 1 - e^{-x+0,5}$.
 $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - e^{-x+0,5} = 0$

$$\Leftrightarrow e^{-x+0,5} = 1$$

$$\Leftrightarrow -x + 0,5 = \ln 1$$

$$\boxed{f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0,5}$$

- (b) $f'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 - e^{-x+0,5} > 0$

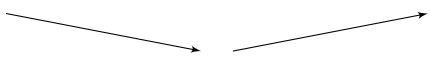
$$\Leftrightarrow e^{-x+0,5} < 1$$

$$\Leftrightarrow -x + 0,5 < \ln 1$$

$$\boxed{f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 0,5}$$

Ainsi, $f'(x) < 0$ sur $[0; 0,5]$ et $f'(x) > 0$ sur $[0,5; 5]$.

- (c) On a, d'après la question précédente :

x	0	0,5	5
$f'(x)$	-	0	+
f			

2. (a) Par lecture graphique, on peut écrire : $2 \leq \alpha \leq 2,5$.
(b) $f(x) < 1,5x$ signifie que $\mathcal{C}$ (d'équation $y = f(x)$) est au-dessous de Δ (d'équation $y = 1,5x$).
Ainsi, l'ensemble solution de cette équation est l'intervalle sur lequel $\mathcal{C}$ est au-dessous de Δ , donc $] \alpha; 5]$.

Partie B : application

1. (a) La fonction f atteint son minimum pour $x = 1,5$. Comme x est exprimé en centaines, on peut dire que le coût minimal est atteint pour 150 cartes.
(b) Le bénéfice est obtenu en faisant $1,5x - f(x)$.
Donc, $B(x) = 1,5x - (x + 1 + e^{-x+0,5})$
$$= 1,5x - x - 1 - e^{-x+0,5}$$

$$\boxed{B(x) = 0,5x - 1 - e^{-x+0,5}}$$
2. (a) $B'(x) = 0,5 + e^{-x+0,5}$. Or, une exponentielle est toujours strictement positive donc $B'(x) > 0$.
Ainsi, B est strictement croissante sur $[0; 5]$.
(b) $B(2,32) \approx -0,002 < 0$ et $B(2,33) \approx 0,005$.
De plus, B est continue et croissante sur $[2,32; 2,33]$ ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe une unique solution sur $[2,32; 2,33]$ à l'équation $B(x) = 0$.
3. B est croissante donc $B(x) > 0$ à partir de $x = 2,33$, soit pour 233 cartes.