

Baccalauréat Série ES Métropole, juin 2015

Disponible sur <http://www.mathweb.fr>

Sujet

Stéphane PASQUET

1^{er} septembre 2015

Exercice 1 (6 points) - Commun à tous les candidats

Le service marketing d'un magasin de téléphonie a procédé à une étude du comportement de sa clientèle. Il a ainsi observé que celle-ci est composée de 42 % de femmes, 35 % des femmes qui entrent dans le magasin y effectuent un achat, alors que cette proportion est de 55 % pour les hommes.

Une personne entre dans le magasin. On note :

- F l'événement : « La personne est une femme » ;
- R l'événement : « La personne repart sans rien acheter » ;

Pour tout événement A , on note $\bar{A}$ son événement contraire et $p(A)$ sa probabilité.

Dans tout l'exercice, donner des valeurs approchées des résultats au millième.

Les parties A, B et C peuvent être traitées de manière indépendante.

Partie A

1. Construire un arbre pondéré illustrant la situation.
2. Calculer la probabilité que la personne qui est entrée dans le magasin soit une femme et qu'elle reparte sans rien acheter.
3. Montrer que $p(R) = 0,534$.

Partie B

Un client du magasin s'inquiète de la durée de vie du téléphone de type T_1 qu'il vient de s'offrir.

On note X la variable aléatoire qui, à chaque téléphone mobile de type T_1 prélevé au hasard dans la production, associe sa durée de vie, en mois.

On admet que la variable aléatoire X suit la loi normale d'espérance $\mu = 48$ et d'écart-type $\sigma = 10$.

1. Justifier que la probabilité que le téléphone de type T_1 prélevé fonctionne plus de 3 ans, c'est-à-dire 36 mois, est d'environ 0,885.
2. On sait que le téléphone de type T_1 prélevé a fonctionné plus de 3 ans. Quelle est la probabilité qu'il fonctionne moins de 5 ans ?

Partie C

Le gérant du magasin émet l'hypothèse que 30 % des personnes venant au magasin achètent uniquement des accessoires (housse, chargeur, ...).

Afin de vérifier son hypothèse, le service marketing complète son étude.

1. Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence de personnes ayant uniquement acheté des accessoires dans un échantillon de taille 1 500.
2. Le service marketing interroge un échantillon de 1 500 personnes. L'étude indique que 430 personnes ont acheté uniquement des accessoires. Doit-on rejeter au seuil de 5 % l'hypothèse formulée par le gérant ?

Exercice 2 (5 points) - Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité et candidats de L

Le fonctionnement de certaines centrales géothermiques repose sur l'utilisation de la chaleur du sous-sol. Pour pouvoir exploiter cette chaleur naturelle, il est nécessaire de creuser plusieurs puits suffisamment profonds.

Lors de la construction d'une telle centrale, on modélise le tarif pour le forage du premier puits par la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul, par :

$$u_n = 2\,000 \times 1,008^{n-1},$$

où u_n représente le coût en euros du forage de la n -ième dizaine de mètres.

On a ainsi $u_1 = 2\,000$ et $u_2 = 2\,016$, c'est-à-dire que le forage des dix premiers mètres coûte 2 000 euros, et celui des dix mètres suivants coûte 2 016 euros.

Dans tout l'exercice, arrondir les résultats obtenus au centième.

1. Calculer u_3 puis le coût total de forage des 30 premiers mètres.
2. Pour tout entier naturel n non nul :
 - a. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n et préciser la nature de la suite (u_n) .
 - b. En déduire le pourcentage d'augmentation du coût du forage de la $(n+1)$ -ième dizaine de mètres par rapport à celui de la n -ième dizaine de mètres.
3. On considère l'algorithme ci-dessous :

```
INITIALISATION
u prend la valeur 2 000
S prend la valeur 2 000
TRAITEMENT
Saisir n
Pour i allant de 2 à n
    u prend la valeur u × 1,008
    S prend la valeur S + u
Fin Pour
SORTIE
Afficher S
```

La valeur de n saisie est 5.

- a. Faire fonctionner l'algorithme précédent pour cette valeur de n .

Résumer les résultats obtenus à chaque étape dans le tableau ci-dessous (à recopier sur la copie et à compléter en ajoutant autant de colonnes que nécessaire).

Valeur de i		2	
Valeur de u	2 000		
Valeur de S	2 000		

- b. Quelle est la valeur de S affichée en sortie ? Interpréter cette valeur dans le contexte de cet exercice.
4. On note $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$ la somme des n premiers termes de la suite (u_n) , n étant un entier naturel non nul. On admet que :

$$S_n = -250\,000 + 250\,000 \times 1,008^n.$$

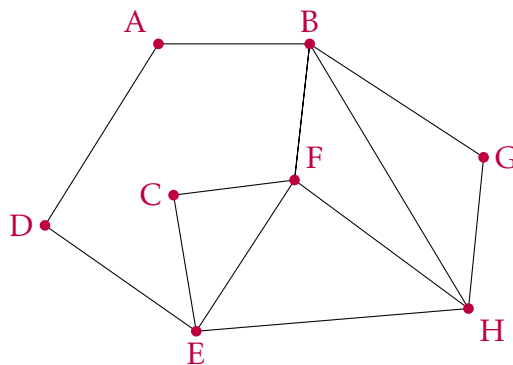
Le budget consenti pour le forage du premier puits est de 125 000 euros. On souhaite déterminer la profondeur maximale du puits que l'on peut espérer avec ce budget.

- a. Calculer la profondeur maximale par la méthode de votre choix (utilisation de la calculatrice, résolution d'une inéquation, ...).
- b. Modifier l'algorithme précédent afin qu'il permette de répondre au problème posé.

Exercice 2 (5 points) - Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

On considère le graphe $\mathcal{G}$ ci-dessous :



1. Déterminer en justifiant si ce graphe :
- est connexe ;
 - admet une chaîne eulérienne.

2. On note M la matrice d'adjacence associée à ce graphe en prenant les sommets dans l'ordre alphabétique.

On donne :

$$M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 2 & 3 & 2 & 2 & 1 & 3 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 5 & 9 & 6 & 8 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 6 & 6 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 5 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 6 & 5 & 4 & 8 & 3 & 9 \\ 2 & 9 & 6 & 3 & 8 & 6 & 3 & 9 \\ 1 & 6 & 3 & 2 & 3 & 3 & 2 & 6 \\ 3 & 8 & 3 & 2 & 9 & 9 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

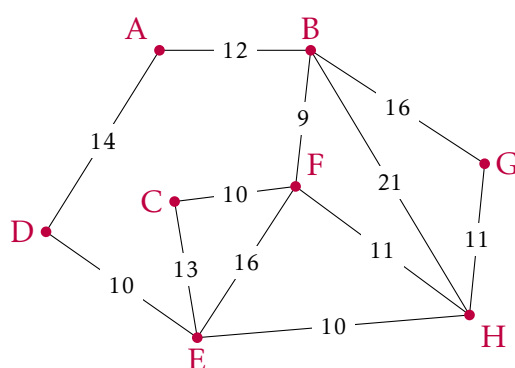
Donner, en justifiant, le nombre de chemins de longueur 3 reliant E à B.

Partie B

Un club alpin souhaite proposer à ses membres des randonnées de plusieurs jours dans les Alpes. À cet effet, huit refuges notés A, B, C, D, E, F, G et H ont été sélectionnés.

Le graphe $\mathcal{G}$ de la partie A permet de visualiser les différents itinéraires possibles, les sommets représentant les refuges et les arêtes schématisant tous les sentiers de randonnée balisés les reliant.

1. D'après l'étude effectuée dans la partie A, le club alpin est-il en mesure de proposer :
 - a. un itinéraire au départ du refuge A qui passerait par tous les refuges en empruntant une fois et une seule fois chacun des sentiers ? Si oui, proposer un tel itinéraire ;
 - b. des itinéraires de trois jours (un jour correspondant à une liaison entre deux refuges) reliant le refuge E au refuge B ? Si oui, combien peut-il en proposer ?
2. Le graphe $\mathcal{G}$ est complété ci-dessous par la longueur en kilomètres de chacun des sentiers.

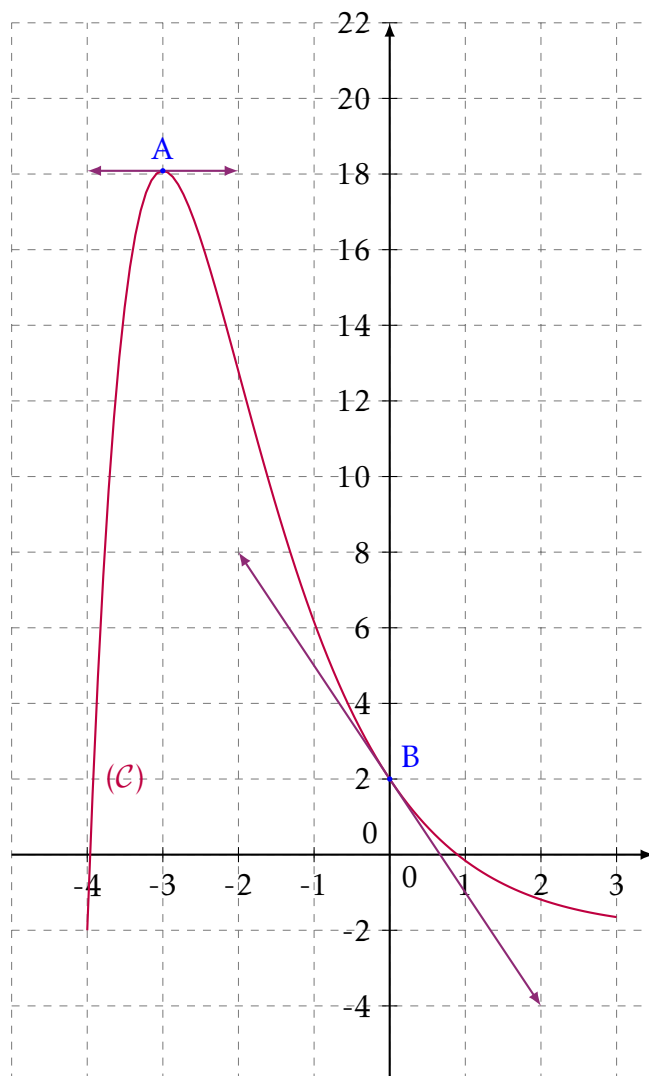


Le club alpin désire aussi proposer à ses membres l'itinéraire le plus court reliant A à H.

Déterminer cet itinéraire et en préciser la longueur en kilomètres.

Exercice 3 (6 points) - Commun à tous les candidats

La courbe $(\mathcal{C})$ ci-dessous représente dans un repère orthogonal une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-4; 3]$. Les points A d'abscisse -3 et B(0; 2) sont sur la courbe $(\mathcal{C})$. Sont aussi représentées sur ce graphique les tangentes à la courbe $(\mathcal{C})$ respectivement aux points A et B, la tangente au point A étant horizontale. On note f' la fonction dérivée de f .



Les parties A et B sont indépendantes

Partie A

1. Par lecture graphique, déterminer :
 - a. $f'(-3)$;
 - b. $f(0)$ et $f'(0)$.
2. La fonction f est définie sur $[-4; 3]$ par :

$$f(x) = a + (x + b)e^{-x},$$

où a et b sont deux réels que l'on va déterminer dans cette partie.

- a. Calculer $f'(x)$ pour tout réel x de $[-4; 3]$.

- b. À l'aide des questions 1.b. et 2.a., montrer que les nombres a et b vérifient le système suivant :

$$\begin{cases} a + b = 2 \\ 1 - b = -3 \end{cases}$$

- c. Déterminer alors les valeurs des nombres a et b .

Partie B

On admet que la fonction f est définie sur $[-4; 3]$ par :

$$f(x) = -2 + (x + 4)e^{-x}.$$

- Justifier que, pour tout réel x de $[-4; 3]$, $f'(x) = (-x - 3)e^{-x}$ et en déduire le tableau de variation de f sur $[-4; -3]$.
- Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[-3; 3]$, puis donner une valeur approchée de α à 0,01 près par défaut.
- On souhaite calculer l'aire S , en unité d'aire, du domaine délimité par la courbe $(\mathcal{C})$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = -3$ et $x = 0$.
 - Exprimer, en justifiant, cette aire à l'aide d'une intégrale.
 - Un logiciel de calcul formel donne les résultats ci-dessous :

1	$F(x) := -2x + (-x - 5) * \exp(-x)$
	//Interprète F
	// Succès lors de la compilation F
	$x \mapsto -2 * x + (-x - 5) * \exp(-x)$
2	derive ($F(x)$)
	$-\exp(-x) - \exp(-x) * (-x - 5) - 2$
3	simplifier($-\exp(-x) - \exp(-x) * (-x - 5) - 2$)
	$x * \exp(-x) + 4 * \exp(-x) - 2$

À l'aide de ces résultats, calculer la valeur exacte de l'aire S puis sa valeur arrondie au centième.

Exercice 4 (3 points) - Commun à tous les candidats

On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = 3x - 3x \ln(x).$$

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé et T la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1.

Quelle est la position relative de $\mathcal{C}_f$ par rapport à T ?

Baccalauréat Série ES Métropole, juin 2015

Disponible sur <http://www.mathweb.fr>

Corrigé

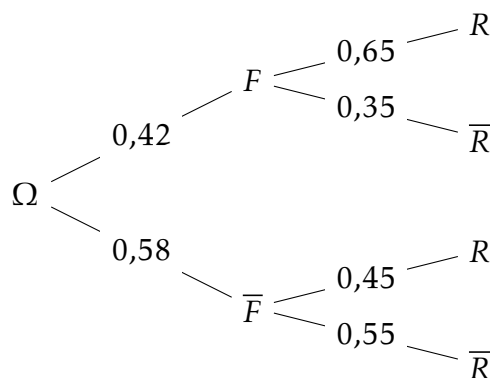
Stéphane PASQUET

1^{er} septembre 2015

Exercice 1 (6 points) - Commun à tous les candidats

Partie A

1. L'arbre pondéré correspondant à la situation est le suivant :



2. Nous cherchons ici à calculer $p(F \cap R)$. D'après l'arbre pondéré, nous avons :

$$p(F \cap R) = p(F) \times p_F(R) = 0,42 \times 0,65 = \underline{0,273}.$$

3. D'après la formule des probabilités totales, nous avons :

$$\begin{aligned} p(R) &= p(R \cup F) + p(R \cup \bar{F}) \\ &= 0,273 + 0,58 \times 0,45 \end{aligned}$$

$$\boxed{p(R) = 0,534}$$

Partie B

1. On souhaite ici justifier que $p(X > 36) \approx 0,886$.

On calcule donc, à l'aide de la calculatrice :

$$p(X > 36) = 1 - p(X \leq 36) \approx 0,884930329778.$$

On obtient bien la valeur attendue si l'on arrondit au millièm.

2. On souhaite déterminer $p_{(X>36)}(X < 60)$. On a :

$$\begin{aligned} p_{(X>36)}(X < 60) &= \frac{p(36 < X < 60)}{p(X > 36)} \\ &= \frac{p(X < 60) - p(X < 36)}{p(X > 36)} \\ &\approx \frac{0,770}{0,886} \\ \boxed{p_{(X>36)}(X < 60) \approx 0,870} \end{aligned}$$

Partie C

1. On utilise la formule :

$$I_f = \left[p - 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right],$$

avec $p = 30\% = 0,3$ et $n = 1\,500$.

On obtient alors l'intervalle :

$$\boxed{I_f = [0,2768; 0,3232]}$$

2. La fréquence des personnes ayant acheté uniquement des accessoires est :

$$f = \frac{430}{1\,500} \approx 0,287.$$

On constate alors que $f \in I_f$ donc nous pouvons accepter l'hypothèse formulée par le gérant selon laquelle 30% des clients achètent des accessoires.

Exercice 2 (5 points) - Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité et candidats de L

1. $u_3 = 2\,000 \times 1,008^{3-1} \approx 2\,032,13$.

Le coût total pour les 30 premiers mètres sera donc approximativement :

$$2\,000 + 2\,016 + 2\,032,13 = \underline{6\,048,13 \text{ €}}.$$

2. a. $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2\,000 \times 1,008^{n+1-1}}{2\,000 \times 1,008^{n-1}} = 1,008$.

Ainsi, (u_n) est une suite géométrique de raison $q = 1,008$ et de premier terme $u_1 = 2\,000$.

On a alors :

$$\text{pour tout entier naturel } n, \quad u_{n+1} = 1,008u_n.$$

On peut donc déduire que pour passer de u_n à u_{n+1} , on multiplie par $1 + \frac{8}{100}$, ce qui signifie qu'il y a augmentation de 8% du coût de la $(n+1)$ -ième dizaine de mètres par rapport à celui de la n -ième dizaine de mètres.

3. a. On a :

Valeur de i		2	3	4	5
Valeur de u	2 000	2 016	2 032,13	2 048,39	2 064,77
Valeur de S	2 000	4 016	6 048,13	8 096,51	10 161,29

- b. La valeur de S affichée est alors 10 161,29 ; cela correspond à la somme totale que le forage coûte pour 50 mètres.
4. a. On cherche n afin que $S_n \leq 125\,000$.
- On peut utiliser le tableur de la calculatrice pour calculer les premiers termes de S_n . On trouve alors $S_{50} \approx 122\,363$ et $S_{51} \approx 125\,342$.
- Par conséquent, il faudra que le puits fasse au maximum 50 dizaines de mètres, soit 500 mètres.
- b. On peut apporter à l'algorithme précédent la modification suivante :

```

INITIALISATION
u prend la valeur 2 000
S prend la valeur 2 000
n prend la valeur 0
TRAITEMENT
Tant que  $S \leq 125\,000$  faire :
    n prend la valeur  $n + 1$ 
    u prend la valeur  $u \times 1,008$ 
    S prend la valeur  $S + u$ 
Fin Tant que
SORTIE
Afficher :  $10n$ 

```

Remarque : nous avons initialisé n à 0 (et non à 1) car dans la boucle, on incrémente cette valeur. Or, si S prend une valeur supérieure à 125 000, on quitte la boucle en affichant la dernière valeur de n . Pour que cette valeur coïncide avec le nombre de dizaines de mètres, il ne faut pas que la valeur affichée soit celle pour laquelle on dépasse 125 000 mais la valeur précédente. En initialisant n à 0 et non à 1, on évite d'afficher « $n - 1$ ».

Exercice 2 (5 points) - Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

1. a. Un graphe est connexe si l'on peut relier n'importe quel sommet à n'importe quel autre, ce qui est le cas ici donc $\mathcal{G}$ est connexe (il n'y a pas le moindre sommet isolé).
- b. Le tableau résumant le degré de chaque sommet est :

Sommets	A	B	C	D	E	F	G	H
Degrés	2	4	2	2	4	4	2	4

D'après le théorème d'Euler, un graphe connexe admet une chaîne eulérienne si et seulement si le nombre de sommets de degré impair vaut 0 ou 2, ce qui est le cas ici (zéro en l'occurrence) ; donc $\mathcal{G}$ admet une chaîne eulérienne.

2. Le coefficient $c_{2,5}$ vaut 5 (« 2 » pour le sommet B et « 5 » pour E).
Par conséquent, il y a 5 chemins de longueur 3 reliant E à B.

Partie B

1. a. Cette question revient à savoir s'il existe une chaîne eulérienne dans $\mathcal{G}$, ce qui est le cas d'après la question 1.b. de la partie A.
Nous pouvons alors proposer le chemin : A - D - E - C - F - B - G - H.
- b. Ici, nous voyons le lien qu'il y a entre cette question et la question 2. de la partie A. Il y a 5 possibilités d'itinéraires qui relient E à B.
2. On cherche ici à déterminer l'itinéraire le plus court ; on va donc utiliser l'algorithme de Dijkstra.

A	B	C	D	E	F	G	H	Sélection
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	A(0)
X	12 (A)	∞	14 (A)	∞	∞	∞	∞	B(12)
X	X	∞	14 (A)	∞	21 (B)	28 (B)	33 (B)	D(14)
X	X	∞	X	24 (D)	21 (B)	28 (B)	33 (B)	F(21)
X	X	31 (F)	X	24 (D)	X	28 (B)	32 (F)	E(24)
X	X	31 (F)	X	X	X	28 (B)	32 (F)	G(28)
X	X	31 (F)	X	X	X	X	32 (F)	C(31)
X	X	X	X	X	X	X	32 (F)	H(32)

Le chemin ainsi obtenu est : A - B - F - H et le parcours fera alors 32 km.

Exercice 3 (6 points) - Commun à tous les candidats

Partie A

1. a. $f'(-3)$ représente le coefficient directeur de la tangente à $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse -3 , c'est-à-dire en A. Or, cette tangente est horizontale donc son coefficient directeur est nul, donc :

$$f'(-3) = 0$$

- b. $f(0) = 2$ (c'est l'ordonnée du point B). Pour calculer $f'(0)$, on cherche le coefficient directeur de la tangente tracée au point B en utilisant la formule vue en Seconde :

$$\frac{-4 - 8}{2 - (-2)} = \frac{-12}{4} = -3.$$

Ainsi,

$$f'(0) = -3$$

2. a. $f(x) = a + (x + b)e^{-x}$. Pour calculer $f'(x)$ (qui est une somme), on doit calculer la dérivée de a et de $(x + b)e^{-x}$.

La dérivée de a vaut 0 car c'est une fonction constante.

$(x + b)e^{-x}$ est de la forme uv , avec $u(x) = x + b$ et $v(x) = e^{-x}$ donc sa dérivée est $u'v + uv'$, où $u'(x) = 1$ et $v'(x) = -e^{-x}$.

On a alors :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 \times e^{-x} + (x+b)(-e^{-x}) \\ &= e^{-x} [1 - (x+b)] \end{aligned}$$

$$\boxed{f'(x) = (1 - b - x)e^{-x}}$$

b. De la question 1.b. et de ce qui vient d'être écrit, on peut établir :

$$f(0) = 2 \iff a + (0+b)e^{-0} = 2 \iff a + b = 2 \quad \text{car } e^0 = 1$$

et

$$f'(0) = -3 \iff (1 - b - 0)e^{-0} = -3 \iff 1 - b = -3.$$

Finalement, a et b satisfont le système :

$$\begin{cases} a + b = 2 \\ 1 - b = -3 \end{cases}$$

c. De l'équation $1 - b = -3$, on tire : $1 + 3 = b$, soit $\underline{b = 4}$.

De l'équation $a + b = 2$, on déduit : $a = 2 - 4$, soit $\underline{a = -2}$.

Partie B

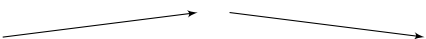
1. En remplaçant a par -2 et b par 4 dans l'expression de $f'(x)$, on obtient :

$$f'(x) = (1 - 4 - x)e^{-x}$$

soit : $\underline{f'(x) = (-x - 3)e^{-x}}$.

Une exponentielle étant toujours strictement positive sur $\mathbb{R}$, $f'(x)$ est toujours du signe de $-x - 3$.

Or, $-x - 3 > 0 \iff -x > 3 \iff x < -3$, d'où le tableau suivant :

x	-4	-3	3
$f'(x)$	+	0	-
f			

2. Sur $[-3; 3]$, f est continue et strictement décroissante.

De plus, $f(-3) = -2 + e^3 \approx 18,09 > 0$ et $f(3) = -3 + 7e^{-3} \approx -2,65 < 0$.

Ainsi, d'après le théorème de la valeur intermédiaire, $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $[-3; 3]$.

À l'aide de la calculatrice, on trouve $\alpha \approx 0,895084$, soit à 0,01 près : $\underline{\alpha \approx 0,90}$.

3. a. Sur $[-3; 0]$, $f(x) \geq 0$ donc l'aire délimitée par (C) , l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = -3$ et $x = 0$ est donnée par l'intégrale $\int_{-3}^0 f(x) dx$.

b. Le logiciel de calcul formel donne, avec $F(x) = -2x + (-x - 5)e^{-x}$:

$$F'(x) = xe^{-x} + 4e^{-x} - 2, \quad \text{soit : } F'(x) = (x + 4)e^{-x} - 2 = f(x).$$

Par conséquent, F est une primitive de f et donc :

$$\begin{aligned} \int_{-3}^0 f(x) \, dx &= F(0) - F(-3) \\ &= [-2 \times 0 + (-0 - 5)e^{-0}] - [-2 \times (-3) + (-(-3) - 5)e^{-(-3)}] \\ &= -5 - (6 - 2e^3) \end{aligned}$$

$$\boxed{\int_{-3}^0 f(x) \, dx = 2e^3 - 11}$$

L'aire cherchée est donc à peu près égale à 29,17 unités d'aire.

N.B. Quitte à se servir d'un logiciel de calcul formel, on se demande pourquoi les concepteurs du sujet ne lui ont pas directement demandé de calculer cette aire... C'est en tout cas ce que ferait n'importe quelle personne sensée non ? Sans compter que l'on ne se sert même pas de la valeur de α après l'avoir trouvée... Ce genre de sujet contribue à mon avis à l'image déplorable qu'ont les maths aux yeux des élèves. Par pitié, concevez des sujets qui ont un sens plutôt que des sujets qui font faire des mathématiques pures dénuées de sens pratique !
[Coup de gueule perso. Reprenons la correction...]

Exercice 4 (3 points) - Commun à tous les candidats

$$f(x) = 3x(1 - \ln x) \text{ donc } f'(x) = 3(1 - \ln x) + 3x \times \left(-\frac{1}{x}\right) = -3 \ln x.$$

Sur $]0; 1[$, $\ln x < 0$ donc $f'(x) > 0$;

Sur $[1; +\infty[$, $\ln x \geq 0$ donc $f'(x) \leq 0$ d'où le tableau suivant :

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		+	-
f			

Nous voyons alors qu'au point d'abscisse 1, la tangente T est horizontale et que $\mathcal{C}_f$ est toujours au-dessous de T .