

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2015

MATHÉMATIQUES

Série ES/L

Durée de l'épreuve : 3 heures

Coefficient : 5 (ES), 4 (L)

ES : ENSEIGNEMENT OBLIGATOIRE

L : ENSEIGNEMENT DE SPECIALITE

**Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées
conformément à la réglementation en vigueur.**

- *Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.*
- *Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.*
- *Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.*
- *Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.*

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte 5 pages numérotées de 1/5 à 5/5.

EXERCICE 1 (5 points) Commun à tous les candidats

Pour chacune des propositions suivantes, dire si la proposition est vraie ou fausse en justifiant la réponse.

L'entreprise MICRO vend en ligne du matériel informatique notamment des ordinateurs portables et des clés USB.

Partie A

Durant la période de garantie, les deux problèmes les plus fréquemment relevés par le service après-vente portent sur la batterie et sur le disque dur, ainsi :

- * Parmi les ordinateurs vendus, 5 % ont été retournés pour un défaut de batterie et parmi ceux-ci, 2 % ont aussi un disque dur défectueux.
- * Parmi les ordinateurs dont la batterie fonctionne correctement, 5 % ont un disque dur défectueux.

On suppose que la société MICRO garde constant le niveau de qualité de ses produits.

Suite à l'achat en ligne d'un ordinateur :

Proposition 1

La probabilité que l'ordinateur acheté n'ait ni problème de batterie ni problème de disque dur est égale à 0,08 à 0,01 près.

Proposition 2

La probabilité que l'ordinateur acheté ait un disque dur défectueux est égale à 0,0485.

Proposition 3

Sachant que l'ordinateur a été retourné pendant sa période de garantie car son disque dur était défectueux, la probabilité que sa batterie le soit également est inférieure à 0,02.

Partie B

L'autonomie de la batterie qui équipe les ordinateurs portables distribués par la société MICRO, exprimée en heure, suit une loi normale d'espérance $\mu = 8$ et d'écart-type $\sigma = 2$.

Proposition 4

La probabilité que l'ordinateur ait une autonomie supérieure ou égale à 10 h est inférieure à 0,2.

Partie C

L'entreprise MICRO vend également des clés USB et communique sur ce produit en affirmant que 98 % des clés commercialisées fonctionnent correctement.

Sur 1 000 clés prélevées dans le stock, 50 clés se révèlent défectueuses.

Proposition 5

Ce test, réalisé sur ces 1000 clés, ne remet pas en cause la communication de l'entreprise.

EXERCICE 2 (5 points)

Candidats ES n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité et candidats L.

Un apiculteur souhaite étendre son activité de production de miel à une nouvelle région. En juillet 2014, il achète 300 colonies d'abeilles qu'il installe dans cette région.

Après renseignements pris auprès des services spécialisés, il s'attend à perdre 8 % des colonies durant l'hiver. Pour maintenir son activité et la développer, il a prévu d'installer 50 nouvelles colonies chaque printemps.

1. On considère l'algorithme suivant :

Variables : n est un nombre entier naturel
 C est un nombre réel

Traitement : Affecter à C la valeur 300
 Affecter à n la valeur 0
 Tant que $C < 400$ faire
 | C prend la valeur $C - C \times 0,08 + 50$
 | n prend la valeur $n+1$
 Fin Tant que

Sortie : Afficher n

- a. Recopier et compléter le tableau ci-dessous en ajoutant autant de colonnes que nécessaire. Les résultats seront arrondis à l'entier le plus proche.

Test $C < 400$	$\times \times \times$	vrai		...
Valeur de C	300	326		...
Valeur de n	0	1		...

- b. Quelle valeur est affichée à la fin de l'exécution de cet algorithme ? Interpréter cette valeur dans le contexte de ce problème.
2. On modélise l'évolution du nombre de colonies par une suite (C_n) , le terme C_n donnant une estimation du nombre de colonies pendant l'année $2014 + n$. Ainsi $C_0 = 300$ est le nombre de colonies en 2014.
- a. Exprimer pour tout entier n le terme C_{n+1} en fonction de C_n .
- b. On considère la suite (V_n) définie pour tout entier n par $V_n = 625 - C_n$.
Montrer que pour tout nombre entier n on a $V_{n+1} = 0,92 \times V_n$.
- c. En déduire que pour tout entier naturel n , on a $C_n = 625 - 325 \times 0,92^n$.
- d. Combien de colonies l'apiculteur peut-il espérer posséder en juillet 2024 ?
3. L'apiculteur espère doubler son nombre initial de colonies. Il voudrait savoir combien d'années il lui faudra pour atteindre cet objectif.
- a. Comment modifier l'algorithme pour répondre à sa question ?
- b. Donner une réponse à cette question de l'apiculteur.

EXERCICE 2 (5 points) Candidats ES ayant suivi l'enseignement de spécialité

Les sites internet A, B, C ont des liens entre eux. Un internaute connecté sur un de ces trois sites peut, à toutes les minutes, soit y rester soit utiliser un lien vers un des deux autres sites.

- Pour un internaute connecté sur le site A, la probabilité d'utiliser le lien vers B est de 0,2 et celle d'utiliser le lien vers C est de 0,2.
- Pour un internaute connecté sur le site B, la probabilité d'utiliser le lien vers A est de 0,1 et celle d'utiliser le lien vers C est de 0,4.
- Pour un internaute connecté sur le site C, la probabilité d'utiliser le lien vers A est de 0,2 mais il n'y a pas de lien direct avec B.

L'unité de temps est la minute, et à un instant $t = 0$, le nombre de visiteurs est, respectivement sur les sites A, B et C : 100, 0 et 0.

On représente la distribution des internautes sur les trois sites après t minutes par une matrice N_t ; ainsi $N_0 = \begin{pmatrix} 100 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On suppose qu'il n'y a ni déconnexion pendant l'heure (de $t = 0$ à $t = 60$) ni nouveaux internautes visiteurs.

1. Représenter le graphe probabiliste de sommets A, B et C correspondant à la situation décrite.
2. Écrire la matrice M de transition associée à ce graphe (dans l'ordre A, B, C).
3. On donne

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0,42 & 0,22 & 0,36 \\ 0,19 & 0,27 & 0,54 \\ 0,28 & 0,04 & 0,68 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M^{20} \approx \begin{pmatrix} 0,3125 & 0,125 & 0,5625 \\ 0,3125 & 0,125 & 0,5625 \\ 0,3125 & 0,125 & 0,5625 \end{pmatrix}$$

Calculer N_2 . Interpréter le résultat obtenu.

4. Calculer $N_0 \times M^{20}$. Conjecturer la valeur de l'état stable et interpréter la réponse.
5. Un des internautes transmet un virus à tout site qu'il visitera.
Il se connecte initialement sur le site C et commence sa navigation.
À l'instant $t = 0$, le site C est donc infecté.
 - a. Quelle est la probabilité qu'à l'instant $t = 1$ le site A soit infecté ?
 - b. Quelle est la probabilité qu'à l'instant $t = 2$ les trois sites soient infectés ?

EXERCICE 3 (4 points) Commun à tous les candidats

On s'intéresse à la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = -2(x+2)e^{-x}$.

Partie A

1. Calculer $f(-1)$ et en donner une valeur approchée à 10^{-2} près.
2. Justifier que $f'(x) = 2(x+1)e^{-x}$ où f' est la fonction dérivée de f .
3. En déduire les variations de la fonction f .

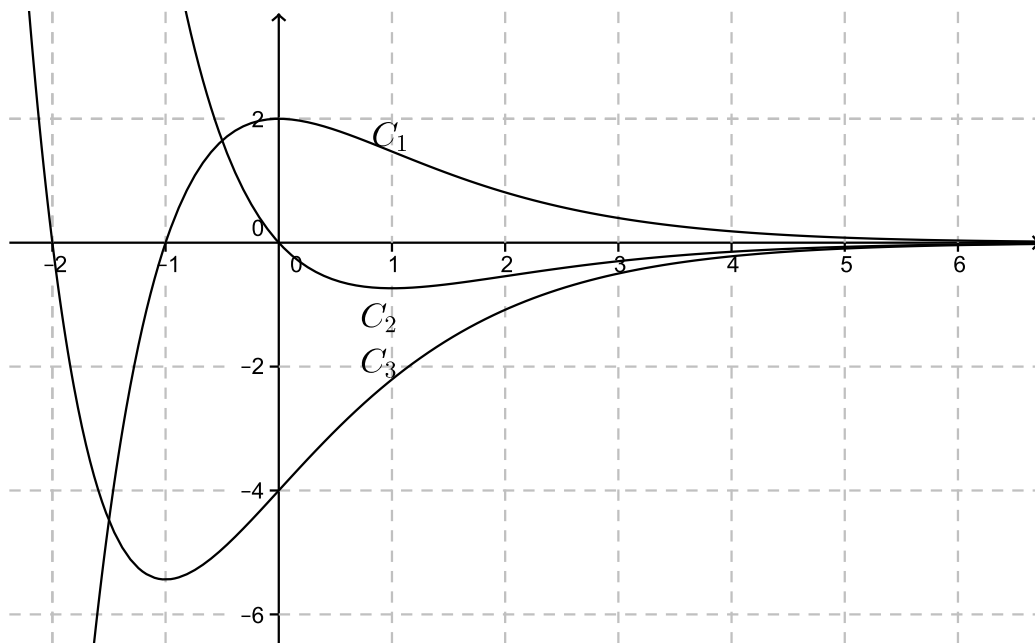
Partie B

Dans le repère orthogonal ci-dessous trois courbes C_1 , C_2 et C_3 ont été représentées.

L'une de ces courbes représente la fonction f , une autre représente sa dérivée et une troisième représente sa dérivée seconde.

Expliquer comment ces représentations graphiques permettent de déterminer la convexité de la fonction f .

Indiquer un intervalle sur lequel la fonction f est convexe.



EXERCICE 4 (6 points) Commun à tous les candidats

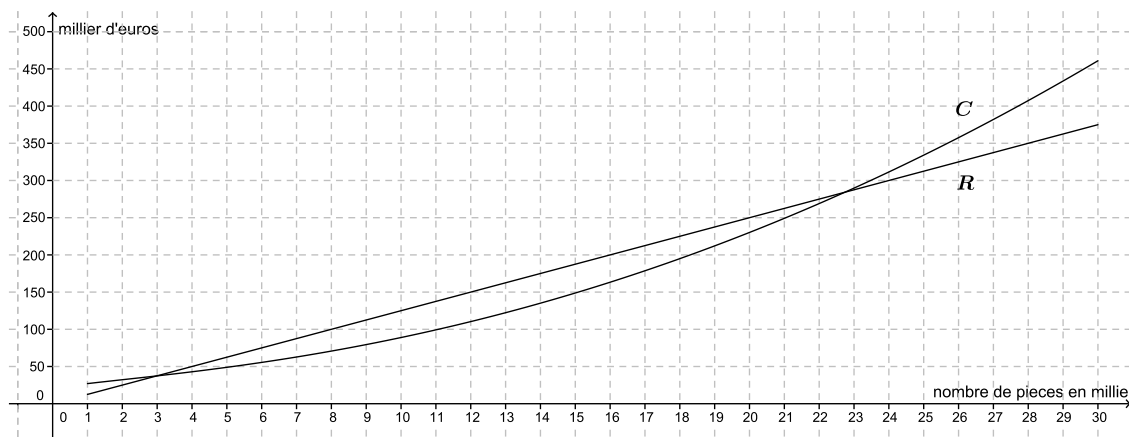
Une entreprise produit et vend des composants électroniques.

Sa capacité mensuelle de production est comprise entre 1 000 et 30 000 pièces. On suppose que toute la production est commercialisée.

Les parties A et B peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A

On donne ci-dessous R et C les représentations graphiques respectives des fonctions recette et coût sur l'intervalle $[1 ; 30]$.



Par lecture graphique, donner une estimation des valeurs demandées.

1. Quel est le coût de production de 21 000 pièces ?
2. Pour quelles quantités de pièces produites l'entreprise réalise-t-elle un bénéfice ?
3. Pour quel nombre de pièces produites le bénéfice est-il maximal ?

Partie B

Le bénéfice en milliers d'euros, réalisé pour la production et la vente de x milliers de pièces, est donné sur l'intervalle $[1 ; 30]$ par $B(x) = -0,5x^2 + 6x - 20 + 2x \ln x$.

1. Montrer que $B'(x) = -x + 8 + 2 \ln x$, où B' est la dérivée de B sur l'intervalle $[1 ; 30]$.

2. On admet que $B''(x) = -1 + \frac{2}{x}$, où B'' est la dérivée seconde de B sur l'intervalle $[1 ; 30]$. Justifier le tableau de variation ci-contre de la fonction dérivée B' sur l'intervalle $[1 ; 30]$.

x	1	2	30
$B'(x)$	7	$6 + 2 \ln 2$	$-22 + 2 \ln 30$

3. a. Montrer que l'équation $B'(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[1 ; 30]$.
b. Donner une valeur approchée au millièmes de la valeur de α .
4. En déduire le signe de $B'(x)$ sur l'intervalle $[1 ; 30]$, et donner le tableau de variation de la fonction bénéfice B sur ce même intervalle.
5. Quel est le nombre de pièces à produire, à l'unité près, pour que l'entreprise réalise un bénéfice maximal ?
Quel est ce bénéfice maximal (arrondi au millier d'euros) ?

Baccalauréat Série ES

Pondichéry, avril 2015

Disponible sur <http://www.mathweb.fr>

Corrigé

Stéphane PASQUET

3 septembre 2015

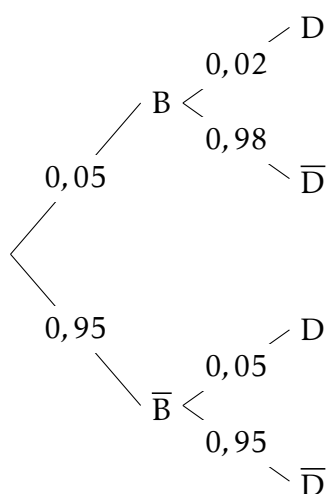
Exercice 1 - Commun à tous les candidats

Partie A

Ici, je décide de noter :

- B l'événement : « L'ordinateur a un problème de batterie » ;
- D l'événement : « L'ordinateur a un problème de disque dur ».

On a alors l'arbre suivant :



1. La probabilité pour que l'ordinateur n'ait aucun des 2 problèmes ci-dessus est :

$$P(\bar{B} \cap \bar{D}) = 0,95 \times 0,95 = 0,9025.$$

La proposition 1 est donc fausse.

2. La probabilité pour que l'ordinateur ait un disque dur défectueux est :

$$P(D) = 0,05 \times 0,02 + 0,95 \times 0,05 = 0,0485.$$

La proposition 2 est donc vraie.

3. Sachant que l'ordinateur a été retourné pendant sa période de garantie car son disque dur était défectueux, la probabilité que sa batterie le soit également est :

$$P_D(B) = \frac{P(B \cap D)}{P(D)} = \frac{0,05 \times 0,02}{0,0485} = 0,020618557 > 0,02.$$

La proposition 3 est donc fausse.

Partie B

4. Si X représente la variable aléatoire représentant l'autonomie (en heures) de la batterie, $X \hookrightarrow \mathcal{N}(8; 4)$.

Donc $P(X \geq 10) = 1 - P(X < 10) \approx 0,16 < 0,2$ (à l'aide de la calculatrice).

La proposition 4 est donc vraie.

Partie C

5. Utilisons un intervalle de fluctuation. Ici, $n = 1\,000$ et $p = 0,02$ (en effet, si 98 % des clés USB fonctionnent, alors 2 % ne fonctionnent pas). Donc $n \geq 50$, $np \geq 5$ et $n(1-p) \geq 5$. L'utilisation d'un intervalle de fluctuation I est donc légitime.

$$I = \left] 0,02 - 1,96 \frac{\sqrt{0,02 \times 0,98}}{\sqrt{1\,000}} ; 0,02 + 1,96 \frac{\sqrt{0,02 \times 0,98}}{\sqrt{1\,000}} \right[\approx [0,0113 ; 0,029[$$

La fréquence observée des clés USB défectueuses est $f = \frac{50}{1\,000} = 0,05 \notin I$. On peut donc remettre en cause l'hypothèse selon laquelle 2 % des clés sont défectueuses.

La proposition 5 est donc fausse.

Exercice 2 (Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité)

1. a.	Test $C < 400$	xxx	vrai	vrai	vrai	vrai	vrai	faux
	Valeur de C	300	326	349,92	371,93	392,17	410,8	xxx
	Valeur de n	0	1	2	3	4	5	xxx

Détail du premier calcul : $326 - 326 \times 0,08 + 50 = 349,92$.

- b. L'algorithme affiche ici $n = 5$. Cela correspond au nombre d'années qu'il devra attendre avant que le nombre de colonies d'abeilles dépasse ou égale 400.
2. a. $C_{n+1} = C_n - \frac{8}{100}C_n + 50 = 0,92C_n + 50$.
- b.
$$\begin{aligned} V_{n+1} &= 625 - C_{n+1} \\ &= 625 - 0,92C_n - 50 \\ &= 575 - 0,92C_n \\ &= 0,92 \left(\frac{575}{0,92} - C_n \right) \\ &= 0,92(625 - C_n) \end{aligned}$$
- $$\boxed{V_{n+1} = 0,92V_n}$$
- c. D'après la question précédente, on déduit que la suite (V_n) est géométrique de raison $q = 0,92$ et de premier terme $V_0 = 625 - C_0 = 625 - 300 = 325$.
Ainsi, d'après le cours, $V_n = C_0 \times q^n = 300 \times 0,92^n$.
Or, $V_n = 625 - C_n$ donc $C_n = 625 - V_n$; par conséquent, on a :

$$\boxed{C_n = 625 - 300 \times 0,92^n}$$

- d. En 2024, $n = 10$.

$$C_{10} = 625 - 300 \times 0,92^{10} \approx 494,68.$$

L'apiculteur peut donc espérer avoir 494 colonies d'abeilles en 2024.

N.B. Ici, on aurait aussi pu arrondir « normalement » en prenant l'entier le plus proche, à savoir 495. Mais j'ai choisi 494 car le nombre 495 n'est pas encore atteint.

3. L'apiculteur souhaite obtenir 600 colonies d'abeilles.

a. Il suffit de remplacer la ligne « Tant que $C < 400$ » par la ligne :
« Tant que $C < 600$ ».

b. On cherche n tel que :

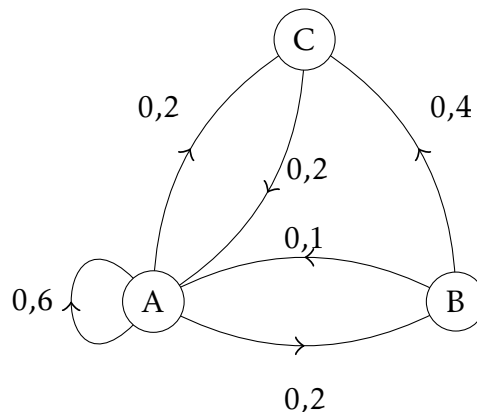
$$\begin{aligned}
 C_n &\geq 600 \\
 \Leftrightarrow 625 - 300 \times 0,92^n &\geq 600 \\
 \Leftrightarrow -300 \times 0,92^n &\geq -25 \\
 \Leftrightarrow 0,92^n &\leq \frac{-25}{-300} \\
 \Leftrightarrow 0,92^n &\leq \frac{1}{12} \\
 \Leftrightarrow \ln(0,92^n) &\leq \ln \frac{1}{12} \\
 \Leftrightarrow n \ln 0,92 &\leq -\ln 12 \\
 \Leftrightarrow n &\geq \frac{-\ln 12}{\ln 0,92} \text{ (on change de signe car } \ln 0,92 < 0 \text{ puisque } 0 < 0,92 < 1)
 \end{aligned}$$

On trouve alors $n \geq 29,8$.

Il faudra donc attendre 30 ans avant de doubler le nombre de colonies d'abeilles.

Exercice 2 (Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité)

1. On a le graphe suivant :



2. La matrice M de transition est alors :

$$M = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,2 & 0,2 \\ 0,1 & 0,5 & 0,4 \\ 0,2 & 0 & 0,8 \end{pmatrix}$$

3. $N_2 = N_0 M^2 = \begin{pmatrix} 100 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,42 & 0,22 & 0,36 \\ 0,19 & 0,27 & 0,54 \\ 0,28 & 0,04 & 0,68 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 42 & 22 & 36 \end{pmatrix}.$

Cela signifie qu'après 2 minutes, il y a 42 internautes sur le site A, 22 sur le site B et 36 sur le site C.

4. $N_0 \times M^{20} \approx (31,25 \quad 12,5 \quad 56,25) = N_{20}$.

« 20 » est assez grand pour que l'on puisse assimiler N_{20} à l'état stable.

Cela signifie alors qu'à long terme, il y aura 31,25% des internautes sur le site A, 12,5% sur le site B et 56,25% sur le site C (quel que soit le nombre d'internautes au départ).

5. a. D'après le graphe, la probabilité de passer de C à A en 1 minute est égale à 0,2. Ainsi, la probabilité pour qu'à l'instant $t = 1$ le site A soit infecté est égale à 0,2.
- b. Pour que les trois sites soient infectés, il faut que l'internaute utilise le chemin $C \rightarrow B \rightarrow A$ (ce qui est impossible car il ne peut pas passer de C à B) ou le chemin $C \rightarrow A \rightarrow B$, avec une probabilité de $0,2 \times 0,2 = 0,04$.

La probabilité pour que les 3 sites soient infectés à l'instant $t = 2$ est égale à 0,04.

Exercice 3 (Commun à tous les candidats)

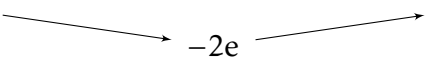
Partie A

1. $f(-1) = -2(-1 + 2)e^{-(-1)} = -2e \approx -5,44$.
2. f est de la forme uv avec $u(x) = -2(x + 2)$ et $v(x) = e^{-x}$. Ainsi, $u'(x) = -2$ et $v'(x) = -e^{-x}$. La dérivée de f est donc :

$$\begin{aligned} f'(x) &= (u'v + uv')(x) \\ &= -2e^{-x} - 2(x + 2)(-e^{-x}) \\ &= -2e^{-x} + 2(x + 2)e^{-x} \\ &= [-2 + 2(x + 2)]e^{-x} \end{aligned}$$

$$f'(x) = (2 + 2x)e^{-x}$$

3. $f'(x) \geq 0 \iff 2 + 2x \geq 0$ car $e^{-x} > 0$ pour tout réel x .
 $2 + 2x \geq 0 \iff 2x \geq -2 \iff x \geq -1$ d'où :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$			

Partie B

C_3 représente f car elle passe par le point de coordonnées $(-1; -5,44)$.

C_1 représente donc $f'(x)$ car elle est sous l'axe des abscisse pour $x < -1$.

C_2 est donc celle qui correspond à $f''(x)$.

Une fonction est convexe lorsque sa dérivée seconde est positive. Ainsi, f est convexe sur $[-1; 0]$ par exemple.

Exercice 4 (Commun à tous les candidats)

Partie A

1. Le coût de production est d'environ 250 000 €.
2. Le bénéfice est réalisé lorsque $R > C$, donc pour une quantité de pièces comprise entre 3 000 et 23 000.
3. Le bénéfice semble maximal pour 13 000 pièces environ (ici, on tente de regarder la distance entre les deux courbes, qui semble la plus grande – un peu plus d'un carreau – pour $x = 13$).

Partie B

$$1. \quad B'(x) = -0,5 \times 2x + 6 \times 1 + 2 \times \left(1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x}\right) \\ = -x + 6 + 2 \ln x + 2$$

$$B'(x) = -x + 8 + 2 \ln x$$

$$2. \quad -1 + \frac{2}{x} \geq 0 \iff \frac{2}{x} \geq 1 \iff \frac{x}{2} \leq \frac{1}{1} \iff x \leq 2.$$

Ainsi, $B''(x) \geq 0$ pour $x \leq 2$.

La fonction B' est donc croissante pour $x \leq 2$ (et donc décroissante pour $x \geq 2$).

De plus,

$$B'(1) = -1 + 8 + 2 \ln 1 = 7 \text{ (car } \ln 1 = 0 \text{)};$$

$$B'(2) = -2 + 8 + 2 \ln 2 = 6 + 2 \ln 2;$$

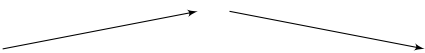
$$B'(30) = -30 + 8 + 2 \ln 30 = -22 + 2 \ln 30.$$

3. a. La fonction B' est continue (car c'est la somme d'un polynôme $-x + 8$ – et de la fonction $x \mapsto 2 \ln x$, qui sont toutes les deux continues sur $[1; 30]$).
De plus, $B'(1)$ et $B'(2)$ sont strictement positifs, donc l'équation $B'(x) = 0$ n'admet pas de solution sur $[1; 2]$, et $B'(30) < 0$ donc, d'après le théorème de la valeur intermédiaire, il existe une unique solution à l'équation $B'(x) = 0$ sur $]2; 30[$.

Finalement, il existe une unique solution à l'équation $B'(x) = 0$ sur $[1; 30]$.

b. $\alpha \approx 13,153$ (à la calculatrice).

4. De la question 3, on déduit que $B'(x) > 0$ sur $[1; \alpha[$ et $B'(x) \leq 0$ sur $[\alpha; 30]$, d'où le tableau suivant :

x	1	α	30
$B'(x)$	+	0	–
$B(x)$			

5. D'après le tableau précédent, le bénéfice maximal est atteint en α , soit pour 13 153 pièces fabriquées (eh ! j'étais pas loin dans la partie A !).
 $B(\alpha) \approx 40,199$ donc le bénéfice maximum vaut à peu près 40 199€.