BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2016

MATHÉMATIQUES - Série ES

ENSEIGNEMENT OBLIGATOIRE

Durée de l'épreuve : 3 heures **Coefficient : 5**

MATHÉMATIQUES - Série L

ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Durée de l'épreuve : 3 heures **Coefficient : 4**

**Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées,
conformément à la réglementation en vigueur.**

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.
Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 9 pages numérotées de 1/9 à 9/9 .

EXERCICE 1 (4 points)

Cet exercice est un QCM (questionnaire à choix multiples). Pour chacune des quatre questions posées, une seule des trois réponses proposées est exacte. Indiquer sur la copie le numéro de la question et recopier la réponse exacte. Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte 1 point, une réponse fausse ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point. Une réponse multiple ne rapporte aucun point.

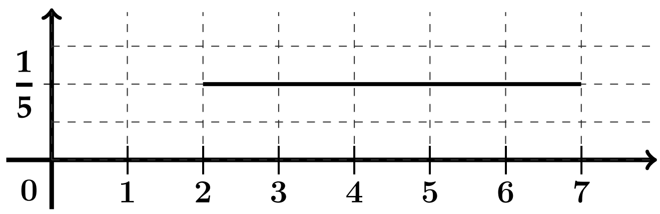
1. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = 3x - x\ln x$.
On admet que f est dérivable sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ et on désigne par f' sa fonction dérivée.
Pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0\,;+\infty[$ on a :

(a) $f'(x) = 3 - \dfrac{1}{x}$ **(b)** $f'(x) = 3 - \ln x$ **(c)** $f'(x) = 2 - \ln x$

2. On considère la suite géométrique de premier terme 1 et de raison 2.
La somme des 13 premiers termes de cette suite vaut :

(a) 4 095 **(b)** 8 191 **(c)** $\dfrac{1-2^{14}}{1-2}$

3. Une variable aléatoire X suit une loi uniforme sur l'intervalle $[2\,;7]$ dont la fonction de densité est représentée ci-dessous.



$P(\text{A})$ désigne la probabilité d'un évènement A et $E(X)$ l'espérance de la variable aléatoire X.

(a) $P(3 \leqslant X \leqslant 7) = \dfrac{1}{4}$ **(b)** $P(X \geqslant 4) = P(2 \leqslant X \leqslant 5)$ **(c)** $E(X) = \dfrac{9}{5}$

4. On réalise un sondage sur un échantillon de n personnes (n, entier naturel non nul).
Parmi les tailles de l'échantillon proposées ci-dessous, quelle est celle qui permet d'obtenir un intervalle de confiance au niveau de confiance $0,95$ avec une amplitude de $0,02$?

(a) $n = 5\,000$ **(b)** $n = 100$ **(c)** $n = 10\,000$

EXERCICE 2 (6 points)

La partie A peut être traitée indépendamment des parties B et C.

L'entreprise *BBE* (*Bio Bois Énergie*) fabrique et vend des granulés de bois pour alimenter des chaudières et des poêles chez des particuliers ou dans des collectivités.

L'entreprise produit entre 1 et 15 tonnes de granulés par jour.

- Les coûts de fabrication quotidiens sont modélisés par la fonction C définie sur l'intervalle $[1\,;15]$ par :

$$C(x) = 0,3x^2 - x + \mathrm{e}^{-x+5}$$

  où x désigne la quantité de granulés en tonnes et $C(x)$ le coût de fabrication quotidien correspondant en centaines d'euros.

- Dans l'entreprise *BBE* le prix de vente d'une tonne de granulés de bois est de 300 euros.
  La recette quotidienne de l'entreprise est donc donnée par la fonction R définie sur l'intervalle $[1\,;15]$ par :

$$R(x) = 3x$$

  où x désigne la quantité de granulés en tonnes et $R(x)$ la recette quotidienne correspondante en centaines d'euros.

- On définit par $D(x)$ le résultat net quotidien de l'entreprise en centaines d'euros, c'est-à-dire la différence entre la recette $R(x)$ et le coût $C(x)$, où x désigne la quantité de granulés en tonnes.

Partie A : Étude graphique

Sur le graphique situé en annexe (page 9/9), on donne $\mathscr{C}$ et Δ les représentations graphiques respectives des fonctions C et R dans un repère d'origine O.

Dans cette partie A, répondre aux questions suivantes à l'aide du graphique, et avec la précision permise par celui-ci. Aucune justification n'est demandée.

1. Déterminer la quantité de granulés en tonnes pour laquelle le coût quotidien de l'entreprise est minimal.

2. **(a)** Déterminer les valeurs de $C(6)$ et $R(6)$ puis en déduire une estimation du résultat net quotidien en euros dégagé par l'entreprise pour 6 tonnes de granulés fabriqués et vendus.

(b) Déterminer les quantités possibles de granulés en tonnes que l'entreprise doit produire et vendre quotidiennement pour dégager un résultat net positif, c'est-à-dire un bénéfice.

Partie B : Étude d'une fonction

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $[1\,;15]$ par :

$$g(x) = -0,6\,x + 4 + \mathrm{e}^{-x+5}.$$

On admet que la fonction g est dérivable sur l'intervalle $[1\,;15]$ et on note g' sa fonction dérivée.

1. **(a)** Calculer $g'(x)$ pour tout réel x de l'intervalle $[1\,;15]$.

(b) En déduire que la fonction g est décroissante sur l'intervalle $[1\,;15]$.

2. **(a)** Dresser le tableau de variation de la fonction g sur l'intervalle $[1\,;15]$, en précisant les valeurs de $g(1)$ et de $g(15)$ arrondies à l'unité.

(b) Le tableau de variation permet d'affirmer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[1\,;15]$.
Donner une valeur approchée de α à 0,1 près.

(c) Déduire des questions précédentes le tableau de signe de $g(x)$ sur l'intervalle $[1\,;15]$.

Partie C : Application économique

1. Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $[1\,;15]$, on a :

$$D(x) = -0,3x^2 + 4x - \mathrm{e}^{-x+5}.$$

2. On admet que la fonction D est dérivable sur l'intervalle $[1\,;15]$ et on note D' sa fonction dérivée. Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $[1\,;15]$, on a $D'(x) = g(x)$, où g la fonction étudiée dans la partie B.

3. En déduire les variations de la fonction D sur l'intervalle $[1\,;15]$.

4. **(a)** Pour quelle quantité de granulés l'entreprise va-t-elle rendre son bénéfice maximal ?
On donnera une valeur approchée du résultat à 0,1 tonne près.

(b) Calculer alors le bénéfice maximal à l'euro près.

EXERCICE 3 (5 points)

Les parties A et B peuvent être traitées de manière indépendante.

Partie A

On dispose des renseignements suivants à propos du baccalauréat session 2015 :

- 49 % des inscrits ont passé un baccalauréat général, 20 % un baccalauréat technologique et les autres un baccalauréat professionnel ;
- 91,5 % des candidats au baccalauréat général ont été reçus ainsi que 90,6 % des candidats au baccalauréat technologique.

Source : DEPP (juillet 2015)

On choisit au hasard un candidat au baccalauréat de la session 2015 et on considère les évènements suivants :

- G : « Le candidat s'est présenté au baccalauréat général » ;
- T : « Le candidat s'est présenté au baccalauréat technologique » ;
- S : « Le candidat s'est présenté au baccalauréat professionnel » ;
- R : « Le candidat a été reçu ».

Pour tout évènement A, on note $P(A)$ sa probabilité et $\overline{A}$ son évènement contraire.
De plus, si B est un autre évènement, on note $P_B(A)$ la probabilité de A sachant B.

1. Préciser les probabilités $P(G)$, $P(T)$, $P_T(R)$ et $P_G(R)$.

2. Traduire la situation par un arbre pondéré. On indiquera les probabilités trouvées à la question précédente. Cet arbre pourra être complété par la suite.

3. Vérifier que la probabilité que le candidat choisi se soit présenté au baccalauréat technologique et l'ait obtenu est égale à 0,181 2 .

4. Le ministère de l'Éducation Nationale a annoncé un taux global de réussite pour cette session de 87,8 % pour l'ensemble des candidats présentant l'un des baccalauréats.

(a) Vérifier que la probabilité que le candidat choisi se soit présenté au baccalauréat professionnel et l'ait obtenu est égale à 0,248 45 .

(b) Sachant que le candidat s'est présenté au baccalauréat professionnel, déterminer la probabilité qu'il ait été reçu. On donnera une valeur approchée du résultat au millième.

Partie B

À l'issue des épreuves du baccalauréat, une étude est faite sur les notes obtenues par les candidats en mathématiques et en français.

On admet que la note de mathématiques peut être modélisée par une variable aléatoire X_M qui suit la loi normale de moyenne $12,5$ et d'écart-type $3,5$.

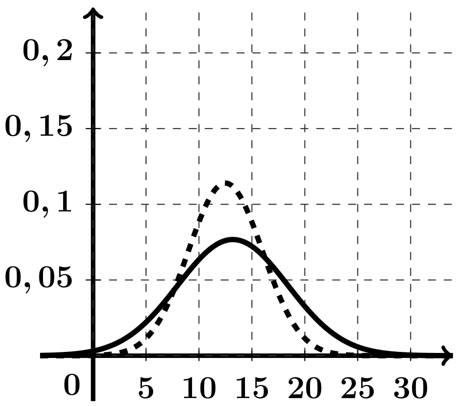
De même la note de français peut être modélisée par une variable aléatoire X_F qui suit la loi normale de moyenne $13,2$ et d'écart-type $2,1$.

1. Déterminer $P\,(9 \leqslant X_M \leqslant 16)$ en donnant le résultat arrondi au centième.

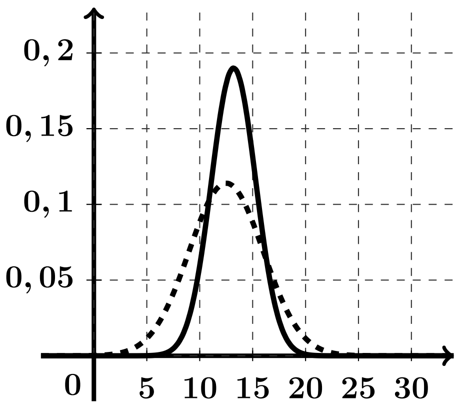
2. Sur les graphiques ci-dessous, on a représenté en pointillé la fonction densité associée à la variable aléatoire X_M.

La fonction densité associée à X_F est représentée sur un seul de ces graphiques.

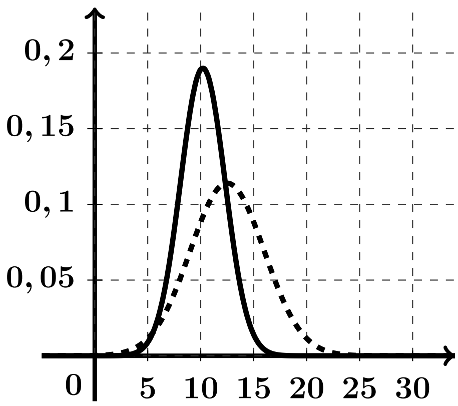
Quel est ce graphique ? Expliquer le choix.



Graphique 1



Graphique 2



Graphique 3

EXERCICE 4 (5 points)

En janvier 2016, une personne se décide à acheter un scooter coûtant 5 700 euros sans apport personnel. Le vendeur lui propose un crédit à la consommation d'un montant de 5 700 euros, au taux mensuel de $1,5\,\%$. Par ailleurs, la mensualité fixée à 300 euros est versée par l'emprunteur à l'organisme de crédit le 25 de chaque mois. Ainsi, le capital restant dû augmente de $1,5\,\%$ puis baisse de 300 euros.

Le premier versement a lieu le 25 février 2016.

On note u_n le capital restant dû en euros juste après la $n-$ième mensualité (n entier naturel non nul). On convient que $u_0 = 5\,700$.

Les résultats seront donnés sous forme approchée à $0,01$ près si nécessaire.

1. **(a)** Démontrer que u_1, capital restant dû au 26 février 2016 juste après la première mensualité, est de 5 485,50 euros.

   (b) Calculer u_2.

2. On admet que la suite (u_n) est définie pour tout entier naturel n par : $u_{n+1} = 1,015\,u_n - 300$.

   On considère l'algorithme suivant :

Variables :	n est un entier naturel
	u est un nombre réel
Traitement :	Affecter à u la valeur 5 700
	Affecter à n la valeur 0
	Tant que $u > 4\,500$ faire
	u prend la valeur $1,015 \times u - 300$
	n prend la valeur $n + 1$
	Fin Tant que
Sortie :	Afficher n

   (a) Recopier et compléter le tableau ci-dessous en ajoutant autant de colonnes que nécessaires entre la deuxième et la dernière colonne.

Valeur de u	5 700	…		
Valeur de n	0	…		
$u > 4\,500$ (vrai/faux)	vrai	…	vrai	faux

(b) Quelle valeur est affichée à la fin de l'exécution de cet algorithme ?

Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

3. Soit la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 20\,000$.

(a) Montrer que pour tout entier naturel n, on a : $v_{n+1} = 1,015 \times v_n$.

(b) En déduire que pour tout entier naturel n, on a : $u_n = 20\,000 - 14\,300 \times 1,015^n$.

4. À l'aide de la réponse précédente, répondre aux questions suivantes :

(a) Démontrer qu'une valeur approchée du capital restant dû par l'emprunteur au 26 avril 2017 est 2 121,68 euros.

(b) Déterminer le nombre de mensualités nécessaires pour rembourser intégralement le prêt.

(c) Quel sera le montant de la dernière mensualité ?

(d) Lorsque la personne aura terminé de rembourser son crédit à la consommation, quel sera le coût total de son achat ?

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2016

MATHÉMATIQUES - Série ES

ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Durée de l'épreuve : 3 heures   Coefficient : 7

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées,
conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.
Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 9 pages numérotées de 1/9 à 9/9 .

EXERCICE 4 (5 points)

Une étude statistique sur une population d'acheteurs a montré que :

- 90 % des personnes qui ont fait leur dernier achat en utilisant Internet affirment vouloir continuer à utiliser Internet pour faire le suivant. Les autres personnes comptent faire leur prochain achat en magasin ;
- 60 % des personnes qui ont fait leur dernier achat en magasin affirment vouloir continuer à effectuer le suivant en magasin. Les autres comptent effectuer leur prochain achat en utilisant Internet.

Dans toute la suite de l'exercice, n désigne un entier naturel non nul.

Une personne est choisie au hasard parmi les acheteurs.

On note :

- a_n la probabilité que cette personne fasse son $n-$ième achat sur Internet ;
- b_n la probabilité que cette personne fasse son $n-$ième achat en magasin.

On suppose de plus que $a_1 = 1$ et $b_1 = 0$.

On note $P_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$ l'état probabiliste correspondant au $n-$ième achat. Ainsi $P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$.

On note :

- A l'état : « La personne effectue son achat sur Internet » ;
- B l'état : « La personne effectue son achat en magasin ».

1. Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets A et B.

2. Écrire la matrice de transition M associée à ce graphe en prenant les sommets dans l'ordre alphabétique.

3. **(a)** Calculer la matrice M^4.

(b) En déduire que la probabilité que la personne interrogée fasse son 5^{e} achat sur Internet est égale à 0,812 5.

4. On note $P = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$ l'état stable associé à ce graphe.

(a) Montrer que les nombres a et b sont solutions du système :

$$\begin{cases} 0,1a - 0,4b = 0 \\ a + b = 1 \end{cases}$$

(b) Résoudre le système précédent.

(c) À long terme, quelle est la probabilité que cette personne fasse ses achats sur Internet ?

5. (a) Montrer que pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$a_{n+1} = 0,5\,a_n + 0,4$$

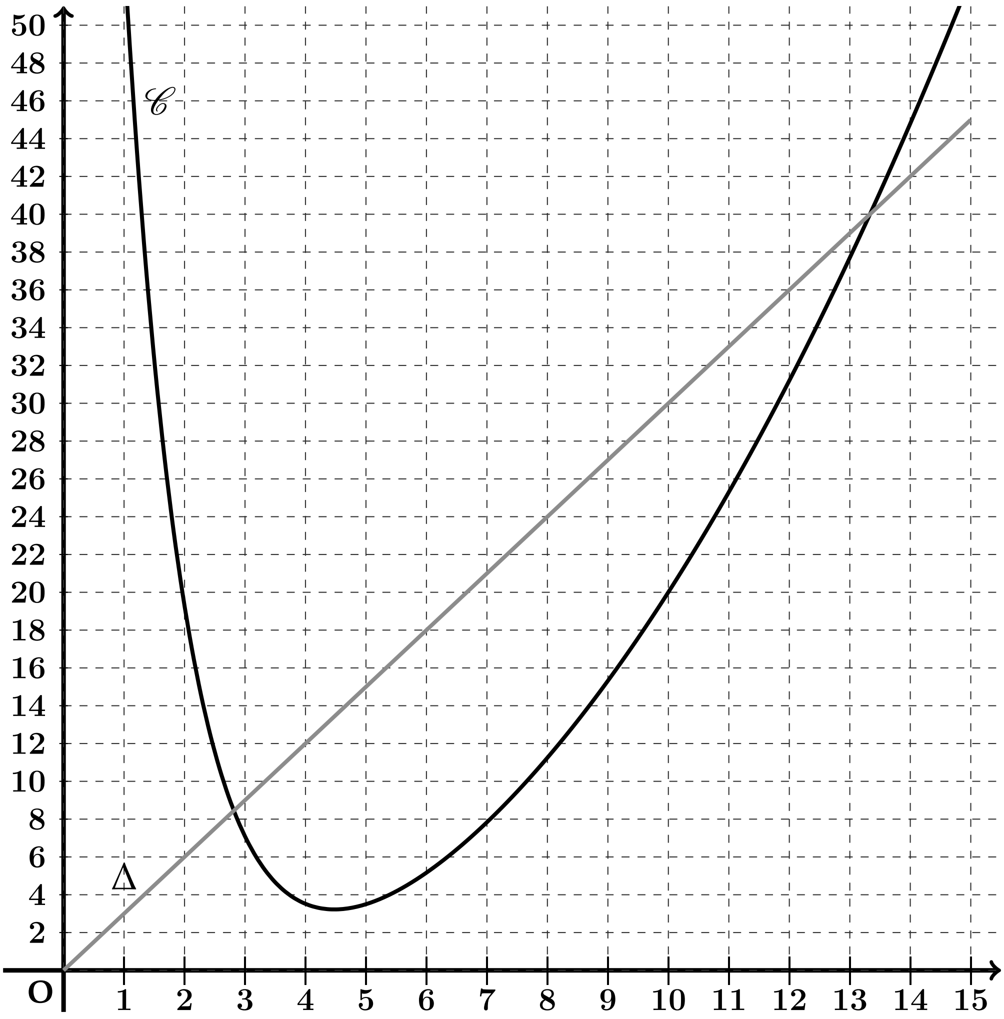
(b) Recopier et compléter l'algorithme suivant afin qu'il affiche le plus petit entier naturel n non nul tel que $a_n \leqslant 0,801$.

Variables :	N est un entier naturel
	A est un nombre réel
Initialisation :	Affecter à N la valeur 1
	Affecter à A la valeur 1
Traitement :	Tant que ....
	Affecter à A la valeur $0,5 \times A + 0,4$
	Affecter à N la valeur ....
	Fin Tant que
Sortie :	Afficher N

(c) Quelle est la valeur affichée par l'algorithme en sortie ?

ANNEXE

N'est pas à rendre avec la copie



Baccalauréat Série ES
Pondichéry, avril 2016

Disponible sur `http://www.mathweb.fr`

Corrigé

Stéphane PASQUET

9 mai 2016

Exercice 1 - Commun à tous les candidats

1. $f(x) = 3x - x\ln x$ donc :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3\times 1 - \left(1\times \ln x + x\times \frac{1}{x}\right) \\ &= 3 - (\ln x + 1) \\ &= 3 - \ln x - 1 \\ \boxed{f'(x) = 2 - \ln x} & \qquad \big(\text{Réponce (c)}\big) \end{aligned}$$

2. La somme des n premiers termes d'une suite géométrique de raison q et de premier terme u_1 est :

$$u_1 \times \frac{1-q^n}{1-q}$$

donc ici, la somme demandée est :

$$1\times\frac{1-2^{13}}{1-2} = \frac{2^{13}-1}{2-1} = 2^{13}-1 = 8\,191 \qquad \big(\text{Réponce (b)}\big)$$

3. Procédons par élimination :
   - Il y a 10 petits carreaux sous le segment entre 2 et 7, et il y en a 8 entre 3 et 7 ; par conséquent, $P(3 \leqslant X \leqslant 7) = \dfrac{8}{10} = \dfrac{4}{5}$. Ainsi, la réponse (a) est fausse.
   - $P(X \geqslant 4) = \dfrac{6}{10} = 0,6$ car il y a 6 petits carreaux sous le segment entre 4 et 7.

     De plus, $P(2 \leqslant X \leqslant 5) = \dfrac{6}{10} = 0,6$ pour les mêmes raisons donc <u>la réponse (b) est vraie</u>.
   - L'espérance mathématique est $\dfrac{a+b}{2} = \dfrac{7+2}{2} = \dfrac{9}{2}$.

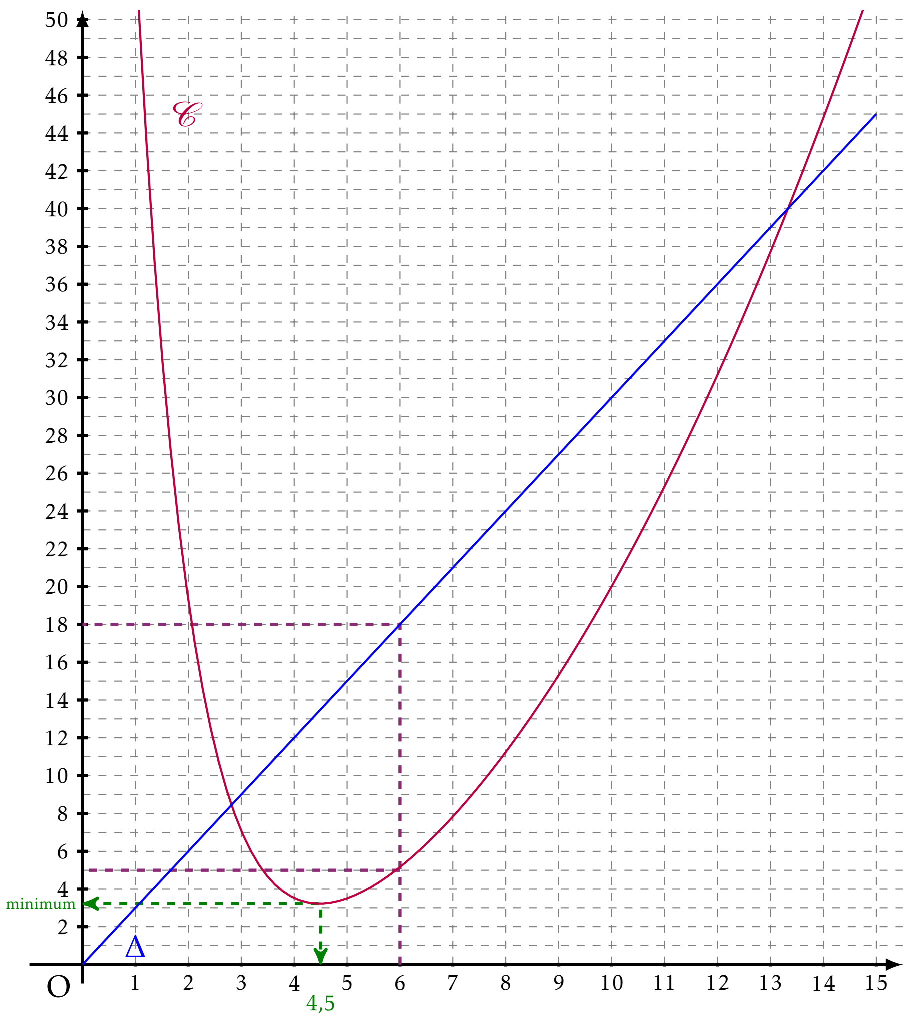
4. Un intervalle de confiance est $\left[f - \dfrac{1}{\sqrt{n}} ; f + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$. Son amplitude est sa longueur, donc ici égale à $\dfrac{2}{\sqrt{n}}$.

On veut donc résoudre l'équation :

$$\begin{aligned}\frac{2}{\sqrt{n}} = 0,02 &\iff 2 = 0,02\sqrt{n}\\ &\iff \frac{2}{0,02} = \sqrt{n}\\ &\iff 100 = \sqrt{n}\\ &\iff n = 100^2 = 10\,000 \qquad \text{(Réponse (c))}\end{aligned}$$

Exercice 2 - Commun à tous les candidats

Partie A : étude graphique



1. Le coût quotidien de granulés est minimal pour une quantité de 4,5 tonnes.
2. a. $C(6) \approx 5$ et $R(6) = 18$ donc le bénéfice quotidien pour 6 tonnes de granulés fabriqués et vendus est $18 - 5 = 13$, soit 1 300 €.

   b. « Résultat net positif » signifie $R(x) > C(x)$. La droite $(R(x))$ est au-dessus de la courbe $(C(x))$ sur approximativement $[2,8\,;13,2]$ (avec la précision permise par le graphique).

Partie B : étude d'une fonction

1. a. $g'(x) = -0,6 \times 1 + (-1) \times e^{-x+5}$

   $\boxed{g'(x) = -0,6 - e^{-x+5}}$

   b. Une exponentielle étant toujours strictement positive, $-e^{-x+5} < 0$ et donc $g'(x) < 0$ pour tout x, et a fortiori sur $[1\,;15]$.

2. a. Le tableau de variation de g est le suivant :

x	1		15
$g'(x)$		$-$	
$g(x)$	58	↘	5

$g(1) = -0,6 + 4 + e^{-1+5} = 3,4 + e^4 \approx 58$

$g(15) = -0,6 \times 15 + 4 + e^{-15+5} \approx -5$

   b. À l'aide de la calculatrice, on trouve $\alpha \approx 6,9$.

   c. On déduit le tableau de signes suivant :

x	1		α		15
$g(x)$		$+$	0	$-$	

Partie C : application économique

1. $$\begin{aligned} D(x) &= R(x) - C(x) \\ &= 3x - \left(0,3x^2 - x + e^{-x+5}\right) \\ &= 3x - 0,3x^2 + x - e^{-x+5} \end{aligned}$$

   $\boxed{D(x) = -0,3x^2 + 4x - e^{-x+5}}$

2. $$\begin{aligned} D'(x) &= -0,3 \times 2x + 4 \times 1 - (-1)e^{-x+5} \\ &= -0,6x + 4 + e^{-x+5} \end{aligned}$$

   $\boxed{D'(x) = g(x)}$

3. D'après la question 2.c. de la partie B, on déduit :

x	1		α		15
$D'(x)$		$+$	0	$-$	
D		↗		↘	

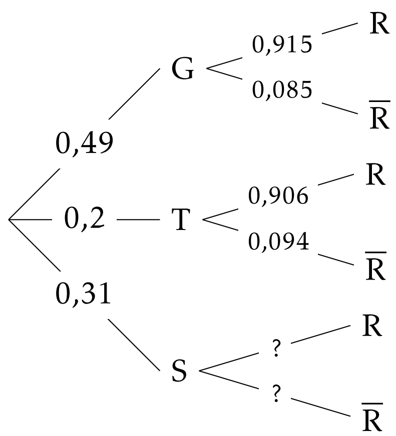
4. a. D'après le tableau de variation de D, le bénéfice est maximal pour une quantité de α tonnes, soit à peu près 6,9 tonnes.

   b. Le bénéfice maximal est donc $D(6,9) \approx 13,167$ soit 1 317 €.

Exercice 3 - Commun à tous les candidats

Partie A

1. D'après l'énoncé, on a :
   - $P(G) = 0,49$
   - $P(T) = 0,2$
   - $P_T(R) = 0,906$
   - $P_G(R) = 0,915$
2.



3. La probabilité que le candidat se soit présenté au baccalauréat technologique et l'ait obtenu est :

$$\begin{aligned} P(T \cap R) &= P(T) \times P_T(R) \\ &= 0,2 \times 0,906 \end{aligned}$$

$$\boxed{P(T \cap R) = 0{,}181\,2}$$

4. a.

$$\begin{aligned} P(R) &= P(T \cap R) + P(G \cap R) + P(S \cap R) \\ 0,878 &= 0{,}181\,2 + 0,49 \times 0,915 + P(S \cap R) \\ P(S \cap R) &= 0,878 - 0{,}181\,2 - 0,49 \times 0,915 \end{aligned}$$

$$\boxed{P(S \cap R) = 0{,}248\,45}$$

   b. $P_S(R) = \dfrac{P(S \cap R)}{P(S)}$

$$= \frac{0{,}248\,45}{0,31}$$

$$\approx 0,801$$

Ainsi, sachant que le candidat s'est présenté au baccalauréat professionnel, la probabilité qu'il ait été reçu est $80,1\,\%$.

Partie B

1. À l'aide de la calculatrice, on trouve :

$$\boxed{\mathrm{P}(9 \leqslant \mathrm{X_M} \leqslant 16) \approx 0,68}$$

2. On cherche d'abord les courbes de Gauss symétriques par rapport à 12,5 (pour X_M) et 13,2 (pour X_F) : on peut exclure alors le graphique 3 qui comporte une courbe symétrique par rapport à 10.
L'écart-type pour X_F étant plus petit que pour X_M, il faut que la courbe symétrique par rapport à 13,2 soit plus « affinée » que l'autre. Cela correspond au graphique 2 (la courbe la « plus à droite » doit être plus fine que l'autre).

Exercice 4 - Commun à tous les candidats

1. a. $u_1 = u_0 \times 1,015 - 300$ (car u_0 augmente de 1,5 % puis baisse de 300 €).
Ainsi, $u_1 = 5\,700 \times 1,015 - 300 = 5\,485,5$.

b. De la même façon on a :

$$\begin{aligned} u_2 &= u_1 \times 1,015 - 300 \\ &= 5\,485,5 \times 1,015 - 300 \end{aligned}$$

$$\boxed{u_2 = 5\,267,78}$$

2. a.

Valeur de u	5700	5485,5	5267,78	5046,80	4822,50	4594,84	4363,76
Valeur de n	0	1	2	3	4	5	6
u > 4500	vrai	vrai	vrai	vrai	vrai	vrai	faux

b. L'algorithme affiche la première valeur de n pour laquelle $u < 4500$ donc $n = 6$.
Cela signifie qu'à partir de la 6e mensualité, le montant à rembourser sera inférieur à 4 500 €.

3. a.
$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 20\,000 \\ &= 1,015u_n - 300 - 20\,000 \\ &= 1,015u_n - 20\,300 \\ &= 1,015\left(u_n - \frac{20\,300}{1,015}\right) \qquad \text{(on a ici factorisé par 1,015)} \\ &= 1,015\left(u_n - 20\,000\right) \end{aligned}$$

$$\boxed{v_{n+1} = 1,015 \times v_n}$$

b. D'après la question précédente, on déduit que la suite (v_n) est géométrique de raison $q = 1,015$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 20\,000 = 5\,700 - 20\,000 = -14\,300$. Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad v_n = v_0 \times q^n = -14\,300 \times 1,015^n\,,$$

et donc, à partir de l'égalité : $v_n = u_n - 20\,000$, on en déduit :

$$u_n = v_n + 20\,000$$

soit :

$$\boxed{u_n = 20\,000 - 14\,300 \times 1,015^n}$$

4. a. Au 26 avril 2017, $n = 15$ et $u_{15} = 20\,000 - 14\,300 \times 1,015^{15} \approx 2\,121{,}68$.

b. On cherche n pour que $u_n \leqslant 0$:

$$\begin{aligned}
& u_n \leqslant 0 \\
\iff & 20\,000 - 14\,300 \times 1,015^n \leqslant 0 \\
\iff & -14\,300 \times 1,015^n \leqslant -20\,000 \\
\iff & 14\,300 \times 1,015^n \geqslant 20\,000 \\
\iff & 1,015^n \geqslant \frac{20\,000}{14\,300}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\iff & 1,015^n \geqslant 1,4 \\
\iff & \ln\left(1,015^n\right) \geqslant \ln(1,4) \\
\iff & n\ln(1,015) \geqslant \ln(1,4) \\
\iff & n \geqslant \frac{\ln(1,4)}{\ln(1,015)} \\
\iff & n \geqslant 22,56
\end{aligned}$$

Il faudra donc 23 mois pour rembourser la totalité du crédit.

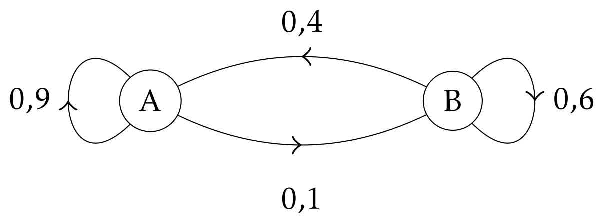
c. $u_{22} \approx 157,84$ donc la dernière mensualité sera de $157,84 \times 1,015 = 160,21$ €.

d. L'acheteur verse 300 € pendant 22 mois, puis 160,21 €.
Le coût total est donc :

$$300 \times 22 + 160,21 = \underline{6\,760{,}21\text{ €}}.$$

Exercice 4 - Candidats ayant suivis l'enseignement de spécialité

1. On a le graphe suivant :



2. La matrice de transition du graphe est :

$$\boxed{M = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}}$$

3. a. À l'aide de la calculatrice, on trouve :

$$\boxed{M^4 = \begin{pmatrix} 0,8125 & 0,1875 \\ 0,75 & 0,25 \end{pmatrix}}$$

b. $\begin{pmatrix} a_5 & b_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \end{pmatrix} M^4 = \begin{pmatrix} 0,8125 & 0,1875 \end{pmatrix}$.
Ainsi, $a_5 = 0,8125$: c'est la probabilité pour que la personne interrogée fasse sont 5e achat sur Internet.

4. a. L'état stable est défini par l'égalité : $P = PM$, soit $\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}$, soit :

$$\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,9a + 0,4b & 0,1a + 0,6b \end{pmatrix}$$

Ainsi,
$$\begin{cases} a = 0,9a + 0,4b \\ b = 0,1a + 0,6b \end{cases} \qquad \text{soit :} \qquad 0,1a - 0,4b = 0.$$

De plus, par définition, $a + b = 1$; on arrive alors au système :

$$\boxed{\begin{cases} 0,1a - 0,4b = 0 \\ a + b = 1 \end{cases}}$$

b. De l'équation $a + b = 1$, on déduit : $b = 1 - a$. On remplace alors dans la première équation :

$$0,1a - 0,4(1 - a) = 0 \iff 0,1a - 0,4 + 0,4a = 0 \iff 0,5a = 0,4 \iff a = \frac{0,4}{0,5} = 0,8.$$

Ainsi, $b = 1 - 0,8 = 0,2$.
L'état stable est donc $P = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \end{pmatrix}$.

c. On déduit de la question précédente qu'à long terme, la probabilité pour que la personne fasse ses achats sur Internet est égale à 0,8.

5. a. On a : $a_n + b_n = 1$ pour tout entier naturel n.
De plus, $P_{n+1} = P_n \times M$ donc $a_{n+1} = 0,9a_n + 0,4b_n = 0,9a_n + 0,4(1 - a_n)$, soit :

$$\boxed{a_{n+1} = 0,5a_n + 0,4}$$

b. On a l'algorithme complété suivant :

Variables :	N est un entier naturel
	A est un nombre réel
Initialisation :	Affecter à N la valeur 1
	Affecter à A la valeur 1
Traitement :	Tant que $A > 0,801$
	Affecter à A la valeur $0,5 \times A + 0,4$
	Affecter à N la valeur $N + 1$
	Fin du Tant que
Sortie :	Afficher N

c. À l'aide de la calculatrice, on trouve $n = 9$.