

Baccalauréat Série ES

Sujet d'entraînement 2017

Disponible sur <http://www.mathweb.fr>

Sujet

Stéphane PASQUET

2 avril 2017

Exercice 1 - Commun à tous les candidats (5 points)

Partie A

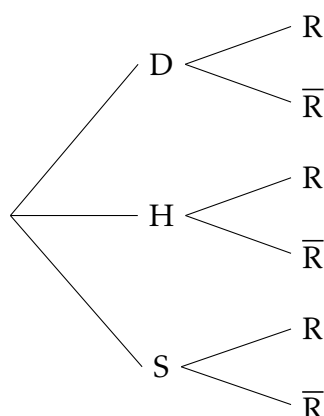
Sur une étagère de magasin se trouvent des paquets de céréales de trois marques différentes : 50 % sont de la marque du distributeur, 20 % sont d'une marque de haute qualité et le reste sont d'une marque qualité supérieure.

Un enfant se trouve au niveau de cette étagère et prend au hasard un paquet de ces céréales. La mère de l'enfant remet le paquet de céréales sur l'étagère dans 70 % des cas s'il s'agit d'un paquet de marque distributeur et dans 50 % des cas s'il s'agit d'un paquet de haute qualité. On note x la probabilité qu'elle remette le paquet de marque supérieure sur l'étagère.

On note :

- D l'événement : « le paquet choisi est de la marque du distributeur » ;
- H l'événement : « le paquet choisi est de la marque de haute qualité » ;
- S l'événement : « le paquet choisi est de la marque de qualité supérieure » ;
- R l'événement : « la mère de l'enfant remet le paquet sur l'étagère ».

1. Reproduire et compléter l'arbre des probabilités suivant :



2. Montrer que la probabilité que l'enfant prenne un paquet de marque distributeur et que sa mère le remette sur l'étagère est égale à 0,35.
3. On sait que la probabilité que la mère remette le paquet sur l'étagère est égale à 0,63. Calculer la probabilité que la mère remette le paquet sur l'étagère sachant que l'enfant a pris un paquet de marque supérieure.
4. Sur une journée, il y a eu 20 mères qui sont passées devant cette étagère avec un enfant qui ont pris au hasard un paquet de céréales. On note X la variable aléatoire représentant le nombre de mères ayant remis le paquet de céréales choisi par leur enfant.

Déterminer la probabilité (à 0,0001 près) qu'il y ait eu moins de 5 mères ayant remis le paquet de céréales sur l'étagère.

Partie B

Sur un paquet de céréales de marque supérieure, on peut voir la mention : « 350 g ». Lors du contrôle de qualité dans l'usine qui confectionne ces paquets, on estime que 98 % d'entre eux sont conformes concernant la masse, c'est-à-dire ont une masse comprise entre 345 g et 355 g.

1. Sur un lot de 1 500 paquets pris sur une chaîne de production, 35 ont une masse non conforme.
À l'aide d'un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 %, doit-on conclure qu'il faut stopper la production sur cette chaîne ?
2. On choisit au hasard un paquet de cette production et on note Y la variable aléatoire représentant sa masse (en grammes).
On admet que Y suit la loi normale de moyenne $\mu = 350$ et d'écart-type $\sigma = 5$.
Déterminer la valeur approchée de h (au dixième près) pour laquelle :

$$P(350 - h \leq Y \leq 350 + h) = 0,5.$$

Exercice 2 - Commun à tous les candidats (6 points)

Lors de la sortie d'un nouvel article, une marque a modélisé la proportion de ses consommateurs inscrits dans sa base de données ayant envie de l'acheter à l'aide de la fonction suivante :

$$f(t) = ae^{-kt} + be^{-5kt}$$

où :

- a , b et k sont trois nombres réels,
- t est le temps (en mois) écoulé depuis la date de sortie de l'article ;
- $f(t)$ est exprimée en écriture décimale, c'est-à-dire que si la proportion est égale à 30 % après n jours, alors $f(n) = 0,3$.

Partie A

Dans cette partie, on se propose de trouver les valeurs de a et b .
Pour cela, on constate que :

- la proportion est maximale à la date de sortie ;
- le nombre dérivé de f en $t = 0$ doit être nul.

1. Expliquer pourquoi $a + b = 1$.
2. Déterminer alors les valeurs de a et b .

Partie B

Dans cette partie, on suppose que :

$$f(t) = 1,25e^{-0,5t} - 0,25e^{-2,5t}$$

1. Montrer que f est strictement décroissante sur $[0; +\infty[$.
2. On suppose que la dérivée seconde de f est donnée par l'expression suivante :

$$f''(t) = -0,3125(5e^{-2,5t} - e^{-0,5t})$$

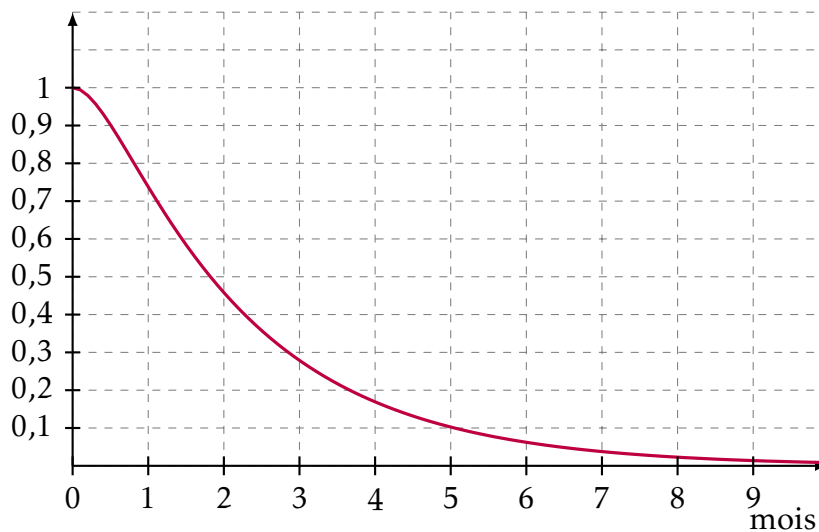
- a. Justifier que l'inéquation $f''(t) < 0$ est équivalente à l'inéquation :

$$\ln(5) - 2,5t > -0,5t$$

- b. En déduire la convexité de la fonction f ainsi que l'existence pour la courbe représentative de la fonction f d'un point d'inflexion. Donner alors une valeur approchée à 0,001 près de l'ordonnée de ce point d'inflexion.

Partie C

On donne ci-dessous la courbe représentative de f :



Indiquer sur ce graphique à quel moment la décroissance de l'envie pour l'article commence à diminuer et en donner une valeur approchée (en jours) en supposant que le mois de sortie de l'article dure 31 jours.

Exercice 3 - Candidats n'ayant pas choisi l'option de spécialité (6 points)

Le jeu « SimulTown » permet à un joueur de simuler la gestion d'une ville dont il est le maire. Pour cela, il doit décider du pourcentage annuel moyen d'émigration ainsi que du nombre moyen de nouveaux habitants par année.

En début de partie, il y a 100 000 habitants dans la ville. Un joueur décide que chaque année, 5% des habitants quittent la ville et 20 000 personnes s'y installent.

On note u_n le nombre d'habitants (exprimé en milliers) après n années. Ainsi, $u_0 = 100$.

1. Expliquer pour tout entier naturel n non nul l'égalité suivante :

$$u_{n+1} = 0,95u_n + 20$$

2. Montrer que $u_1 = 115$.

Pour tout entier naturel n , on pose :

$$v_n = u_n - 400$$

3. Montrer que (v_n) est une suite géométrique. Préciser alors son premier terme et sa raison.
4. En déduire une expression de v_n , puis u_n , en fonction de n .
5. Quel est le nombre maximum d'habitants que peut espérer avoir cette ville ?
6. À partir de combien d'années le nombre d'habitants sera-t-il supérieur à 300 000 ?
7. Chaque année, les impôts permettent à la ville de récolter 500 € par habitant. Que permet alors d'afficher l'algorithme suivant :

Variables :	N et k entiers naturels U et S nombres réels
Traitement :	U prend la valeur 100 S prend la valeur 50 000 000 Pour k allant de 1 à N U prend la valeur $0.95U+20$ S prend la valeur $S+500\,000U$ Fin du Pour
Sortie :	Afficher S

Exercice 3 - Candidats ayant choisi l'option de spécialité (6 points)

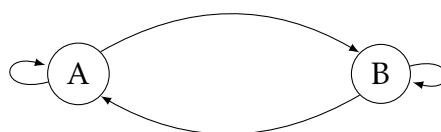
Partie A

Le jeu « Simultown Pro » permet à un joueur de gérer deux villes, désignées par la suite par les lettres A et B. Il peut, entre autre, gérer les flux migratoires des villes A et B.

Un joueur décide que chaque année :

- 30% des habitants de la ville A déménagent pour aller dans la ville B ;
- 10% des habitants de la ville B déménagent pour aller dans la ville A ;
- les autres habitants restent dans leur ville.

1. Compléter le graphe probabiliste suivant représentant la situation :



2. Écrire la matrice de transition M de ce graphe.

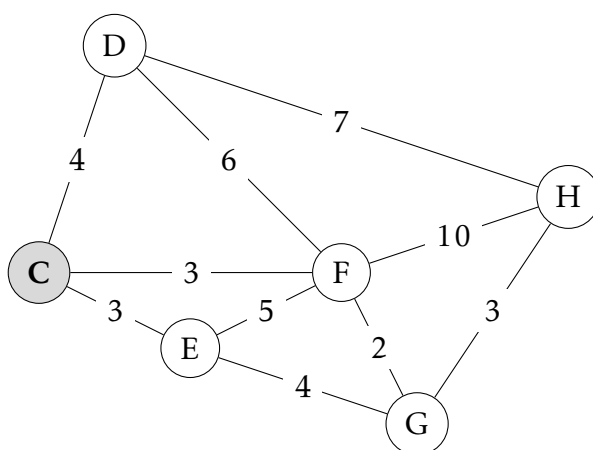
3. On suppose qu'il y a 150 000 habitants dans la ville A et 350 000 dans la ville B en début de partie.

À l'aide de votre calculatrice, déterminer le nombre d'habitants des villes A et B après 5 ans.

4. Déterminer l'état stable de ce graphe et interpréter ce résultat.

Partie B

Le joueur peut aussi gérer le trajet d'un livreur de pizzas. Dans la ville A, le livreur doit passer chez six personnes, représentées par les lettres C, D, E, F, G et H, en commençant par C. Les temps de parcours (en minute) d'un domicile à l'autre sont donnés par le graphe suivant :



Indiquer le chemin qu'il doit emprunter afin de passer chez toutes les personnes en un minimum de temps.

Exercice 4 - Commun à tous les candidats

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chaque question, une seule des réponses proposées est correcte. Indiquer sur votre copie le numéro de la question ainsi que la proposition correcte sans justification.

Une bonne réponse rapporte 1 point. Une mauvaise réponse n'enlève pas de point.

1. Le bénéfice mensuel d'une entreprise, exprimé en millier d'euros, est donné par la fonction suivante :

$$B(x) = 0,5e^{0,2x-0,1x-0,2}$$

où x représente le nombre de mois depuis l'ouverture de l'entreprise.

Le bénéfice moyen de cette entreprise sur la première année est à peu près égal à :

- a. 15 460 € b. 1 288 € c. 3 879 €
2. L'équation $\ln(2x^2 + 4x + 1) = \ln(x)$ admet :
- a. aucune solution b. une solution c. deux solutions
3. Le prix d'une maison baisse de 5,6 % par an. En 2017, elle vaut 220 000 €. À partir de quelle année le prix de cette maison sera inférieur à 190 000 € ?
- a. 2022 b. 2023 c. 2024