

Devoir N° 6 correction

I – Fonctions

Exercice :

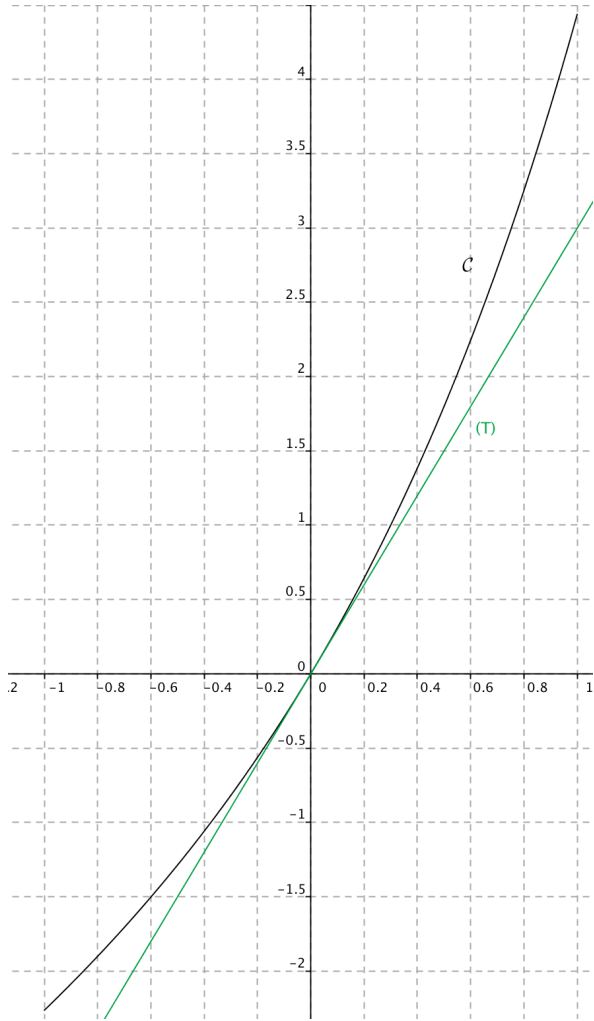
On considère la fonction f définie sur $[-1 ; 1]$ par :

$$f(x) = 2e^x + ax + b.$$

On note $\mathcal{C}$ sa représentation graphique

Dans le repère ci-contre.

1. La courbe passe par l'origine O donc $f(0) = 0$ soit $2+b = 0$, $b = -2$
et la tangente à la courbe a pour coefficient directeur 3 en ce point O donc $f'(0) = 3$ or $f'(x) = 2e^x + a$.
soit $2+a = 3$ donc $a = 1$
2. $f(x) = 2e^x + x - 2$.
 $f'(x) = 2e^x + 1$ or $e^x > 0$
donc $f'(x) > 0$ pour tout x et la fonction est croissante sur son ensemble de définition.
3. Le coefficient directeur de la tangente en O est $f'(0) = 3$ et elle passe par l'origine donc son équation est $y = 3x$
- 4.



Problème :

Partie A

Soit g la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$g(x) = 1 - e^{2x} - 2xe^{2x}.$$

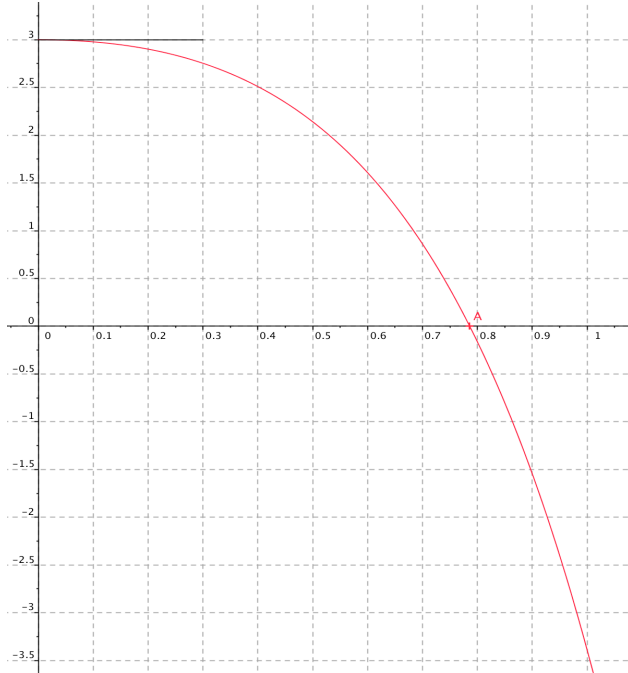
1. $g'(x)$ est une somme de termes, sa dérivée est la somme des dérivées de chaque terme. $(1)' = 0$ et $(e^{2x})' = 2e^{2x}$
 $2xe^{2x}$ est de la forme uv donc sa dérivée est de la forme $u'v + uv'$
avec $u(x) = 2x$ donc $u'(x) = 2$ et $v(x) = e^{2x}$ donc $v'(x) = 2e^{2x}$
 $g'(x) = 0 - 2e^{2x} - 2e^{2x} - 4xe^{2x} = -4e^{2x}(1 + x)$
 $g'(x) = -4e^{2x}(1 + x)$
Sur $[0; +\infty[$ $(1 + x) > 0$ et $e^{2x} > 0$ donc $g'(x) = -4e^{2x}(1 + x) < 0$ pour tout x .
Donc g est décroissante sur cet intervalle.
2. $g(0) = 1 - 1 - 0 = 0$ or sur $[0; +\infty[$ g est décroissante donc $g(x) < 0$.
3. Résumer ces renseignements dans un tableau de variation.

x	0	$+\infty$
$g'(x)$		—
g	0	— 

Partie B

Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = x + 3 - xe^{2x}$, et $\mathcal{C}$, sa représentation graphique dans le repère ci-dessous.

1. $f'(x) = 1 - (1 \times e^{2x} + x \times 2e^{2x}) = 1 - e^{2x} - 2xe^{2x}$ donc $f'(x) = g(x)$.
or sur $[0; +\infty[$, $g(x) < 0$ donc $f'(x) < 0$ donc f est décroissante sur cet intervalle.
2. Sur $[0; +\infty[$ la fonction est continue et décroissante or $f(0) = 3$ et $f(1) = 4 - e^2 \approx -3,4$
donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe une seule valeur de x pour laquelle $f(x) = 0$ et donc la courbe $\mathcal{C}$ coupe l'axe des abscisses en un seul point I.
Avec la fonction table où par dichotomie on en déduit que $0,78 < x_I < 0,79$.
3. $f'(0) = 0$ donc la tangente à la courbe en 0 a pour coefficient directeur 0 et est horizontale
4. Tracer la courbe $\mathcal{C}$.

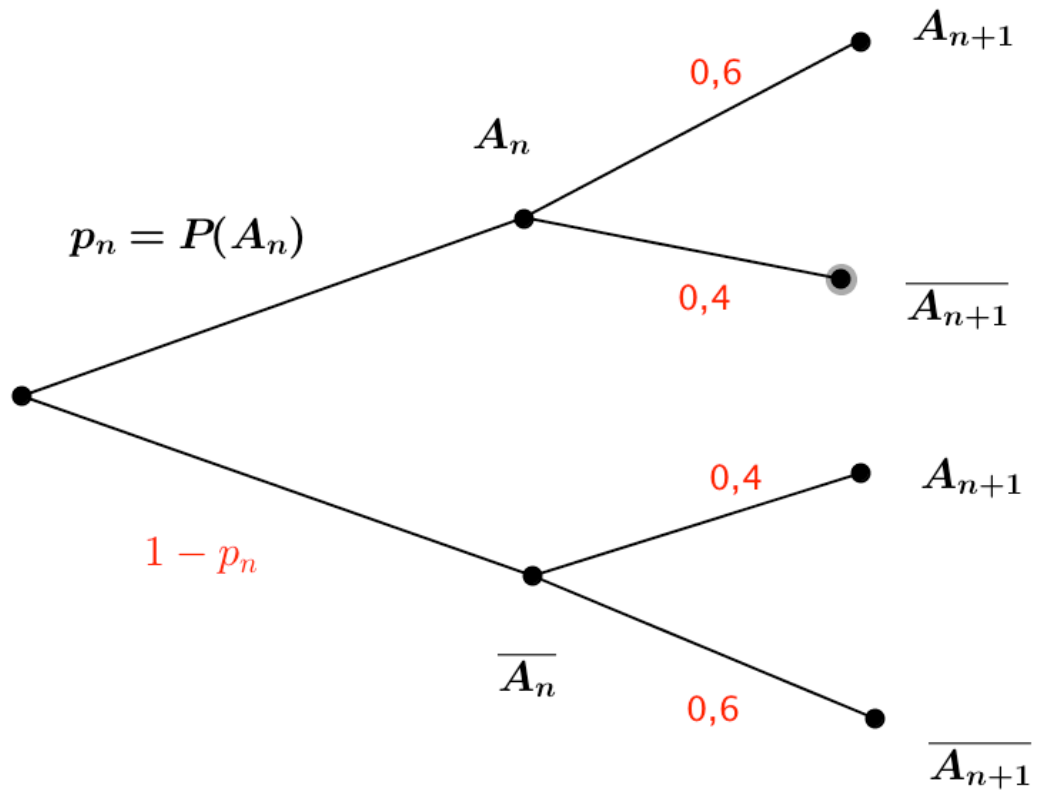


II – Probabilités et suites

On note A_n l'événement « le gestionnaire des stocks a approvisionné le produit la n-ième semaine » et $p_n = P(A_n)$ sa probabilité.

Le gestionnaire des stocks a constaté que :

1. a. Il a approvisionné un produit la 1^{ère} semaine donc $p_1 = 1$.;
- b. S'il l'a approvisionné la n-ième semaine, alors la probabilité qu'il doive l'approvisionner la (n+1)-ème est 0,6 donc $P_{A_n}(A_{n+1}) = 0,6$
S'il ne l'a pas approvisionné la n-ième semaine, alors la probabilité qu'il doive l'approvisionner la (n+1)-ème semaine est de 0,4 donc $P_{\overline{A_n}}(A_{n+1}) = 0,4$
La somme des probabilités des branches partant d'un nœud est 1
d'où l'arbre pondéré ci-dessous.



c. $P(A_n \cap A_{n+1}) = p_n \times P_{A_n}(A_{n+1}) = 0,6p_n$
 $P(\overline{A_n} \cap A_{n+1}) = (1 - p_n)P_{\overline{A_n}}(A_{n+1}) = 0,4(1 - p_n)$

d. donc $p_{n+1} = 0,6p_n + 0,4(1 - p_n) = 0,2p_n + 0,4$.

2. Soit (u_n) la suite définie, pour tout entier naturel n non nul, par $u_n = p_n - 0,5$.
a. $u_{n+1} = p_{n+1} - 0,5 = 0,2p_n + 0,4 - 0,5 = 0,2p_n - 0,1$
or $u_n = p_n - 0,5$ donc $p_n = u_n + 0,5$.
donc $u_{n+1} = 0,2(u_n + 0,5) - 0,1 = 0,2u_n + 0,1 - 0,1 = 0,2u_n$
donc cette suite est géométrique de raison 0,2 de premier terme $u_1 = p_1 - 0,5 = 0,5$.

b. Donc $u_n = 0,5 \times 0,2^{n-1}$ et $p_n = 0,5 \times 0,2^{n-1} + 0,5$

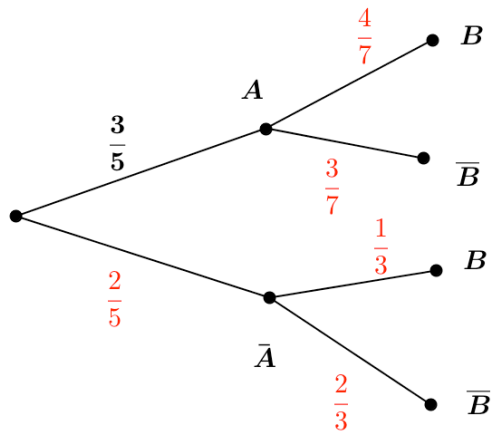
c. $p_{15} = 0,5 \times 0,2^{14} + 0,5 = 0,5$ à 10^{-10} près.

- d. La suite (u_n) a une raison inférieure à 1 et un premier terme positif donc elle est décroissante et sa limite est 0 donc la limite de la suite (p_n) est 0,5.

Le gestionnaire aura au bout d'un certain temps autant de chance de réapprovisionner que de ne pas réapprovisionner le produit.

III – Probabilités et algorithme répondre sur la feuille

Pour simuler une expérience aléatoire dont l'arbre pondéré est donné ci-dessous on a réalisé sur algobox l'algorithme suivant.



Compréhension de l'algorithme :

D'après la ligne 5 quels sont les nombres entiers que peut prendre T1 ? 1, 2, 3, 4 et 5

Pour quelles valeurs de T1 A est-il réalisé ?

D'après les lignes 6 à 8 : 1, 2 et 3

Justifier la valeur de $P(A)$ marquée sur l'arbre.

Il y a 3 possibilités sur 5 donc

$$P(A) = \frac{3}{5}$$

Si A est réalisé, d'après la ligne 9 les nombres entiers que peut prendre T2 sont 1, 2, 3, 4, 5, 6 et 7

CODE DE L'ALGORITHME :

```

1  VARIABLES
2  T1 EST_DU_TYPE NOMBRE
3  T2 EST_DU_TYPE NOMBRE
4  DEBUT_ALGORITHME
5  T1 PREND_LA_VALEUR ALGOBOX_ALEA_ENT(1,5)
6  SI (T1<=3) ALORS
7  DEBUT_SI
8  AFFICHER "événement A réalisé"
9  T2 PREND_LA_VALEUR ALGOBOX_ALEA_ENT(1,7)
10 SI (T2<=4) ALORS
11 DEBUT_SI
12 AFFICHER "événement B réalisé"
13 FIN_SI
14 SINON
15 DEBUT_SINON
16 AFFICHER "événement B non réalisé"
17 FIN_SINON
18 FIN_SI
19 SINON
20 DEBUT_SINON
21 AFFICHER "événement A non réalisé"
22 T2 PREND_LA_VALEUR ALGOBOX_ALEA_ENT(1,3)
23 SI (T2<=1) ALORS
24 DEBUT_SI
25 AFFICHER "événement B réalisé"
26 FIN_SI
27 SINON
28 DEBUT_SINON
29 AFFICHER "événement B non réalisé"
30 FIN_SINON
31 FIN_SINON
32
33 FIN_ALGORITHME

```

RÉSULTATS :

```

***Algorithme lancé***
événement A non réalisé
événement B réalisé
***Algorithme terminé***

```

En déduire $P_A(B)$, puis $P_A(\bar{B})$, justifier. D'après les lignes 10 à 13 B est réalisé si T2 prend les valeurs 1, 2, 3 et 4 donc

$$P_A(B) = \frac{4}{7} \text{ et } P_A(\bar{B}) = \frac{3}{7}$$

Si A n'est pas réalisé, la ligne 22 permet de savoir que T2 peut prendre les valeurs 1, 2 et 3

En déduire $P_{\bar{A}}(B)$, puis $P_{\bar{A}}(\bar{B})$, justifier.

D'après la ligne 23 si $\bar{A}$ est réalisé alors B est réalisé si T2 prend la valeur 1 donc

$$P_{\bar{A}}(B) = \frac{1}{3} \text{ et } P_{\bar{A}}(\bar{B}) = \frac{2}{3}$$

Compléter l'arbre

Quelle est la probabilité du résultat affiché ?

$$P(\bar{A} \cap B) = P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(B) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{15}$$

Sur la copie inventer une situation qui correspond à cette expérience aléatoire