

Baccalauréat ES — Fonctions

Tapuscript : B. Colombel
Dernière mise à jour : 9 juin 2015

Code source, remarques, erreurs : [maurice72 at gmail.com](mailto:maurice72@gmail.com)

N°	Lieu et date	Exponentielle	Logarithme	Résolution graphique	Intégration	Convexité
1	Métropole 20 juin 2014	×		×		×
2	Antilles — Guyane 19 juin 2014	×			×	
3	Antilles — Guyane 19 juin 2014		×		×	
4	Asie 19 juin 2014		×		×	
5	Asie 19 juin 2014			×	×	×
6	Polynésie 13 juin 20014		×	×	×	
7	Polynésie 13 juin 20014			×		
8	Centres Étrangers 12 juin 2014	×			×	×
9	Amérique du Nord 30 mai 2014		×	×	×	
10	Amérique du Nord 30 mai 2014	×		×	×	
11	Liban 27 mai 2014	×		×		
12	Pondichéry 7 avril 2014		×		×	
13	Pondichéry 7 avril 2014	×	×	×	×	×

SESSION 2013

14	Nouvelle-Calédonie 7 mars 2014		×		×	
15	Nouvelle-Calédonie 7 mars 2014	×				×
16	Amérique du Sud 21 novembre 2013	×			×	×
17	Amérique du Sud 21 novembre 2013				×	
18	Nouvelle-Calédonie 18 nov. 2013	×	×		×	
19	Nouvelle-Calédonie 18 nov. 2013		×			
20	Métropole Réunion 13 sep. 2013	×			×	
21	Métropole Réunion 13 sep. 2013			×	×	×
22	Antilles Guyane 12 septembre 2013	×	×			
23	Antilles Guyane 12 septembre 2013		×	×		×
24	Polynésie 4 septembre 2013		×			
25	Polynésie 4 septembre 2013	×		×	×	×
26	Métropole sujet dévoilé juin 2013	×			×	
27	Métropole 20 juin 2013				×	
28	Métropole 20 juin 2013	×		×		
29	Asie 19 juin 2013	×		×	×	×
30	Antilles Guyane le 19 juin 2013	×		×	×	×
31	Centres Étrangers 12 juin 2013		×		×	×

32	Amérique du Nord 30 mai 2013	×		×	×	
33	Liban 28 mai 2013	×				
34	Pondichery 15 avril 2013	×			×	

1. Métropole 20 juin 2014 (5 points)

On injecte à un patient un médicament et on mesure régulièrement, pendant 15 heures, la concentration, en grammes par litre, de ce médicament dans le sang.

On obtient la courbe fournie en annexe.

A. Étude graphique

Avec la précision permise par le graphique, indiquer :

- la concentration à l'instant initial ;
- l'intervalle de temps pendant lequel la concentration est supérieure ou égale à 0,4 gramme par litre.

On fera apparaître sur le graphique les traits de construction nécessaires.

B. Étude théorique

On admet que la concentration peut être modélisée par la fonction f définie sur l'intervalle $[0; 15]$ par :

$$f(x) = (x + 2)e^{-0,5x}$$

où x représente le nombre d'heures écoulées depuis l'instant initial et $f(x)$ la concentration, en grammes par litre, du médicament dans le sang.

- On note f' la fonction dérivée de la fonction f . Justifier que $f'(x) = -0,5xe^{-0,5x}$ et en déduire le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0; 15]$.
- Justifier que l'équation $f(x) = 0,1$ admet une unique solution a sur l'intervalle $[0; 15]$.
- Déterminer un encadrement de a d'amplitude un dixième.
- Un logiciel de calcul formel donne le résultat ci-dessous :

1	<code>deriver((x+2)*exp(-0.5*x))</code>	<code>exp(-0.5)-0.5*exp(-0.5*x)*(x+2)</code>
2	<code>deriver(exp(-0.5)-0.5*exp(-0.5*x)*(x+2))</code>	<code>-exp(-0.5*x)+0.25*exp(-0.5*x)*(x+2)</code>
3	<code>factoriser(-exp(-0.5*x)+0.25*exp(-0.5*x)*(x+2))</code>	<code>(0.25*x-0.5)*exp(-0.5*x)</code>

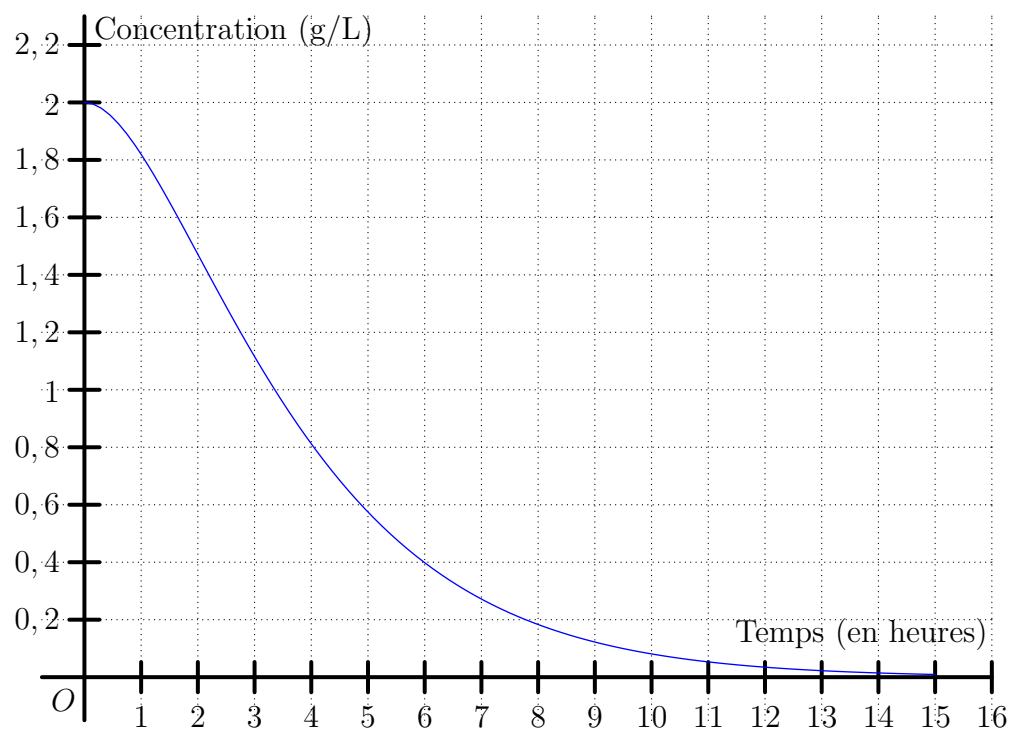
En vous appuyant sur ces résultats, étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $[0; 15]$ et préciser l'abscisse d'un éventuel point d'inflexion.

C. Interprétation des résultats

En vous aidant des résultats obtenus, soit dans la partie **B**, soit par lecture graphique et sans justifier, répondre aux questions ci-dessous.

- On estime que le médicament n'est plus actif lorsque la concentration est strictement inférieure à 0,1 gramme par litre. Pendant combien de temps le médicament est-il actif ?
- Au bout de combien d'heures la baisse de concentration ralentit-elle ?

Annexe



2. Antilles — Guyane 19 juin 2014 (6 points)

Une entreprise fabrique et vend aux écoles primaires des lots constitués de cahiers et de stylos.

Partie A

L'entreprise possède une machine qui peut fabriquer au maximum 1 500 lots par semaine. Le coût total de fabrication hebdomadaire est modélisé par la fonction g définie sur $[0; 15]$ par :

$$g(x) = 18x + e^{0,5x-1}$$

Lorsque x représente le nombre de centaines de lots, $g(x)$ est égal au coût total exprimé en centaines d'euros.

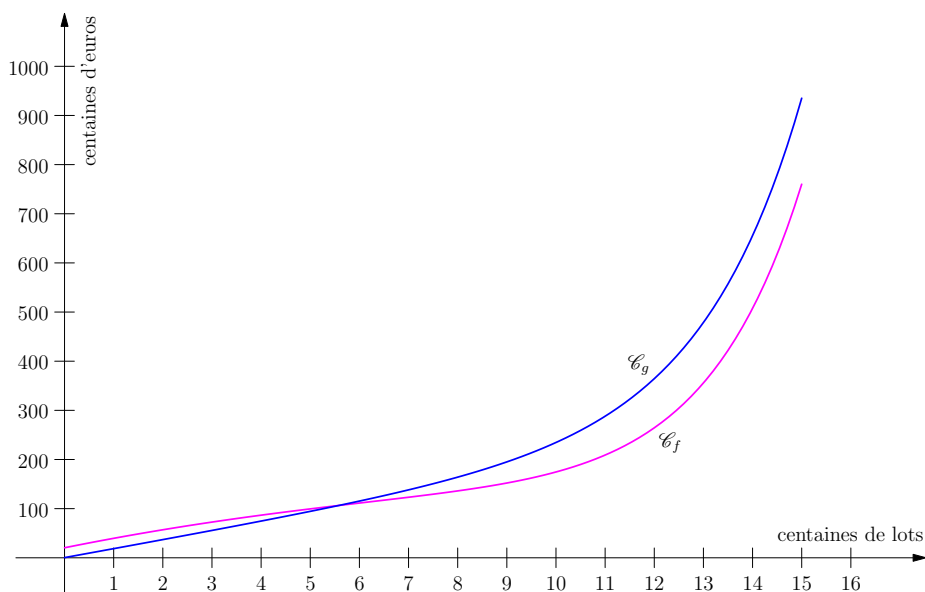
1. Calculer $g'(x)$ où g' désigne la fonction dérivée de g .
2. Justifier que g est strictement croissante sur $[0; 15]$.

Partie B

L'entreprise acquiert une nouvelle machine qui permet d'obtenir un coût total de fabrication hebdomadaire modélisé par la fonction f définie sur $[0; 15]$ par :

$$f(x) = e^{0,5x-1} - x^2 + 20x + 20$$

Lorsque x représente le nombre de centaines de lots, $f(x)$ est égal au coût total exprimé en centaines d'euros. On note $\mathcal{C}_g$ et $\mathcal{C}_f$ les représentations graphiques respectives des fonctions g et f .



1. Par lecture graphique, donner un encadrement d'amplitude 100 du nombre k de lots à partir duquel cette nouvelle machine permet de diminuer le coût total de production.
2. On cherche à préciser le résultat précédent par le calcul.
 - (a) Montrer que la détermination de k conduit à résoudre l'inéquation $-x^2 + 2x + 20 \leq 0$.
 - (b) Résoudre cette inéquation sur l'intervalle $[0; 15]$.
 - (c) En déduire le nombre entier de lots à partir duquel cette nouvelle machine permet de diminuer le coût total de production.
3. On rappelle que le coût marginal obtenu avec cette nouvelle machine est donné par la fonction f' . Déterminer la valeur moyenne, arrondie à l'euro, du coût marginal lorsqu'on fabrique entre 5 centaines et 8 centaines de lots.

Rappel : la valeur moyenne d'une fonction h sur $[a ; b]$ est donnée par $\frac{1}{b-a} \int_a^b h(x) dx$.

3. Antilles — Guyane 19 juin 2014 (QCM 4 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM). Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte.

Aucune justification n'est demandée.

Une bonne réponse rapporte un point. Une mauvaise réponse ou l'absence de réponse n'apporte ni n'enlève aucun point.

Indiquer sur la copie le numéro de la question et recopier la réponse choisie.

1. La somme $S = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{30}$ est égale à :
 - (a) $-1 + 2^{31}$
 - (b) $1 - 2^{31}$
 - (c) $-1 + 2^{30}$
 - (d) $1 - 2^{30}$
2. L'équation $-\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x = 0$ admet dans $\mathbb{R}$:
 - (a) la solution -2
 - (b) trois solutions distinctes
 - (c) aucune solution
 - (d) une unique solution
3. Soit la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \ln x$.
Une primitive de f est la fonction F définie sur $]0; +\infty[$ par :
 - (a) $F(x) = \frac{1}{x}$
 - (b) $F(x) = x \ln x$
 - (c) $F(x) = x \ln x - x$
 - (d) $F(x) = e^x$
4. Les nombres entiers n solutions de l'inéquation $\left(\frac{1}{2}\right)^n < 0,003$ sont tous les nombres entiers n tels que :
 - (a) $n \geq 8$
 - (b) $n \geq 9$
 - (c) $n \leq 8$
 - (d) $n \leq 9$

4. Asie 19 juin 2014 (5 points)

On étudie la propagation d'une maladie lors d'une épidémie.

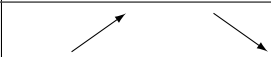
Partie A

Des relevés statistiques ont permis de modéliser, par une fonction f , le nombre de malades durant l'épidémie. Cette fonction f est définie sur $[1; 26]$ par :

$$f(t) = 24t \ln(t) - 3t^2 + 10$$

où t est le nombre de semaines écoulées depuis le premier cas constaté et $f(t)$ est le nombre de milliers de malades comptabilisés après t semaines.

1. On note f' la fonction dérivée de la fonction f .
montrer que, pour tout réel t de l'intervalle $[1; 26]$, $f'(t) = 24 \ln(t) - 6t + 24$.
2. Les variations de f' sont données dans le tableau suivant :

t	1	4	26
$f'(t)$			

- (a) Montrer que l'équation $f'(t) = 0$ admet, dans l'intervalle $[1; 26]$, une solution et une seule qu'on notera α et donner l'encadrement de α par deux entiers naturels consécutifs.
- (b) En déduire le signe de $f'(t)$ sur $[1; 26]$ et les variations de f sur $[1; 26]$.
3. Le réel $f'(t)$ représente la vitesse de propagation de la maladie au bout de t semaines.
 - (a) Dans le contexte du problème, donner une interprétation de l'expression mathématique suivante : « sur $[4; 26]$, $f'(t)$ est décroissante ».
 - (b) À partir des questions précédentes, déterminer le nombre de semaines écoulées à partir duquel le nombre de malades par semaine a commencé à diminuer.

Partie B

On admet que la fonction G définie par :

$$G(t) = 12t^2 \ln(t) - 6t^2$$

est une primitive sur $[1; 26]$ de la fonction g définie par : $g(t) = 24t \ln(t)$.

1. Déterminer, sur $[1; 26]$, une primitive F de la fonction f .
2. On a trouvé que l'arrondi à l'entier de $\frac{1}{26-1} [F(26) - F(1)]$ est 202. Donne une interprétation de ce résultat dans le contexte du problème.

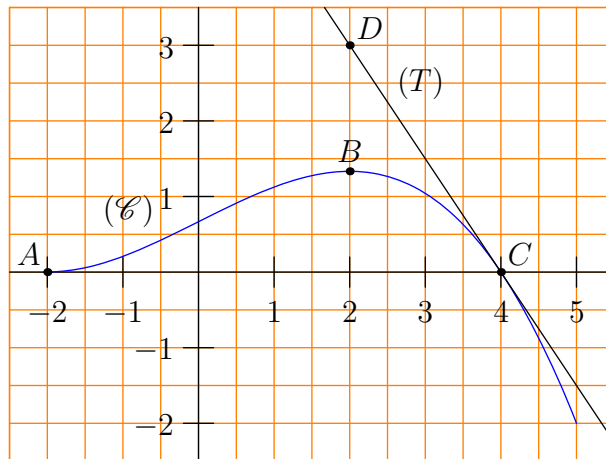
5. Asie 19 juin 2014 (Vrai-Faux 4 points)

On considère une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-2; 5]$, croissante sur $[-2; 2]$ et décroissante sur $[2; 5]$.

On note f' la fonction dérivée de la fonction f .

La courbe $(\mathcal{C})$ tracée ci-dessous représente la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormé; elle passe par les points $A(-2; 0)$; $B\left(2; \frac{4}{3}\right)$ et $C(4; 0)$.

Elle admet en chacun des points A et B une tangente parallèle à l'axe des abscisses et sa tangente (T) au point C passe par le point $D(2; 3)$.



Pour chacune des quatre propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse choisie. La justification peut reposer sur le graphique ou sur un calcul.

Proposition 1 : $f'(4) = -\frac{2}{3}$

Proposition 2 : La fonction f est concave sur $[-2; 2]$

Proposition 3 : $2 \leq \int_1^3 f(x) dx \leq 3$

Proposition 4 : L'équation $f(x) = \ln 2$ n'admet pas de solution sur $[-2; 5]$.

6. Polynésie 13 juin 2014 (5 points)

Les antibiotiques sont des molécules possédant la propriété de tuer des bactéries ou d'en limiter la propagation.

Le tableau ci-dessous donne la concentration dans le sang en fonction du temps d'un antibiotique injecté en une seule prise à un patient.

Temps en heure	0,5	1	1,5	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Concentration en mg/L	1,6	2	1,9	1,6	1,2	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,4

Ces données conduisent à la modélisation de la concentration en fonction du temps par la fonction g définie sur l'intervalle $[0; 10]$ par :

$$g(t) = \frac{4t}{t^2 + 1}$$

Lorsque t représente le temps écoulé, en heures, depuis l'injection de l'antibiotique, $g(t)$ représente la concentration en mg/l de l'antibiotique.

Le graphique suivant représente les données du tableau et la courbe représentative de la fonction g .

- Par lecture graphique, donner sans justification :

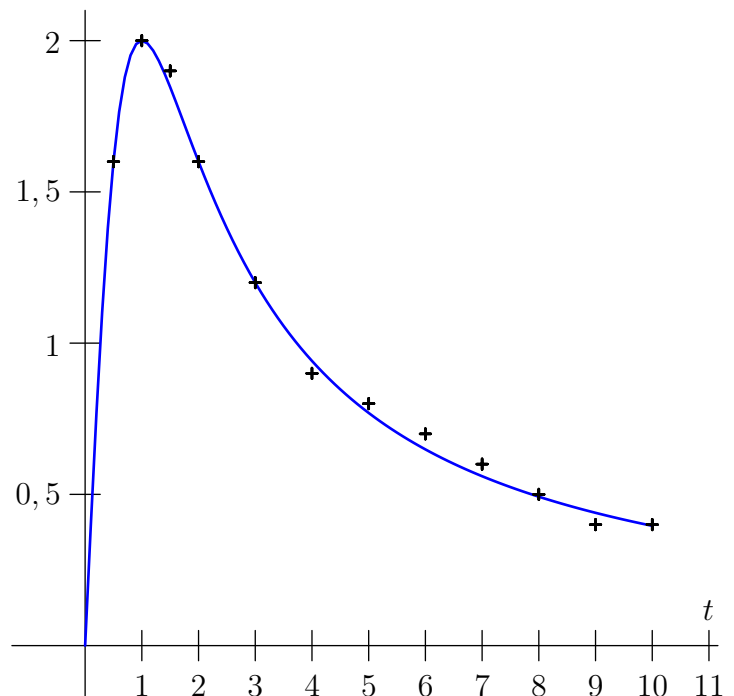
- les variations de la fonction g sur $[0; 10]$;
- la concentration maximale d'antibiotique lors des 10 premières heures ;
- l'intervalle de temps pendant lequel la concentration de l'antibiotique dans le sang est supérieure à 1,2 mg/l.

- (a) La fonction g est dérivable sur l'intervalle $[0; 10]$ et sa dérivée est g' .

Montrer que :

$$g' = \frac{4(1 - t^2)}{(t^2 + 1)^2}.$$

- En utilisant l'expression de $g'(t)$, montrer que la concentration maximale serait, avec cette modélisation, atteinte exactement 1 heure après l'injection.



- On admet que G définie sur $[0; 10]$ par $G(t) = 2 \ln t^2 + 1$ est une primitive de g sur cet intervalle.

Quelle est la concentration moyenne de l'antibiotique pendant les 10 premières heures ? Donner la valeur exacte et la valeur arrondie au millièème.

Rappel : la valeur moyenne d'une fonction f sur $[a; b]$ est donnée par $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$.

- On définit la CMI (Concentration Minimale Inhibitrice) d'un antibiotique comme étant la concentration au dessus de laquelle les bactéries ne peuvent plus se multiplier.

La CMI de l'antibiotique injecté est 1,2 mg/l.

Déterminer, par le calcul, le temps d'antibiotique utile c'est-à-dire la durée pendant laquelle la concentration de l'antibiotique étudié est supérieure à sa CMI.

7. Polynésie 13 juin 2014 (5 points)

Une entreprise fabrique chaque jour des objets. Cette production ne peut dépasser 700 objets par jour.

On modélise le coût total de production par une fonction C .

Lorsque x désigne le nombre d'objets fabriqués, exprimé en centaines, $C(x)$, le coût total correspondant, est exprimé en centaines d'euros.

La courbe représentative de la fonction C est donnée en annexe.

Partie A

Par lecture graphique, répondre aux questions suivantes en arrondissant au mieux. On laissera apparents les traits de construction sur la figure donnée en annexe.

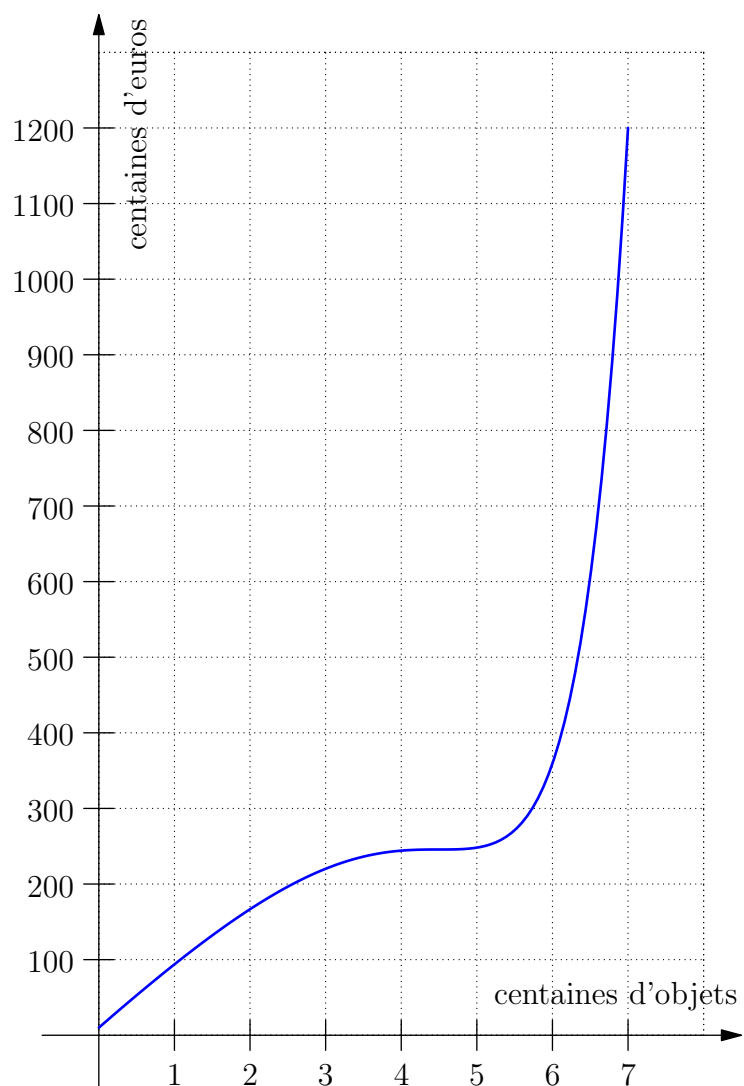
1. Quel est le coût total de production pour 450 objets ?
2. Combien d'objets sont produits pour un coût total de 60 000 euros ?
3. On considère que le coût marginal est donné par la fonction C' dérivée de la fonction C .
 - (a) Estimer le coût marginal pour une production de 450 objets puis de 600 objets.
 - (b) Que pensez-vous de l'affirmation : « le coût marginal est croissant sur l'intervalle $[0; 7]$ » ?

Partie B

Le prix de vente de chacun de ces objets est de 75 euros.

1. On note r la fonction « recette ». Pour tout nombre réel x dans l'intervalle $[0; 7]$, $r(x)$ est le prix de vente, en centaines d'euros, de x centaines d'objets.
Représenter la fonction r dans le repère donné en annexe.
2. En utilisant les représentations graphiques portées sur l'annexe, répondre aux questions qui suivent.
 - (a) En supposant que tous les objets produits sont vendus, quelle est, pour l'entreprise, la fourchette maximale de rentabilité ?
Justifier la réponse.
 - (b) Que penser de l'affirmation : « il est préférable pour l'entreprise de fabriquer 500 objets plutôt que 600 objets » ?

Annexe



8. Centres Étrangers 12 juin 2014

Partie A : Étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x e^{x^2-1}$$

$\mathcal{C}_f$ est la courbe représentative de f dans un repère orthonormé du plan. On note f' la fonction dérivée de f et f'' la fonction dérivée seconde de f .

1. (a) Montrer que pour tout réel x , $f'(x) = (2x^2 + 1) e^{x^2-1}$.
(b) En déduire le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.
2. On admet que pour tout réel x , $f''(x) = 2x(2x^2 + 3) e^{x^2-1}$.
Déterminer, en justifiant, l'intervalle sur lequel la fonction f est convexe.
3. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

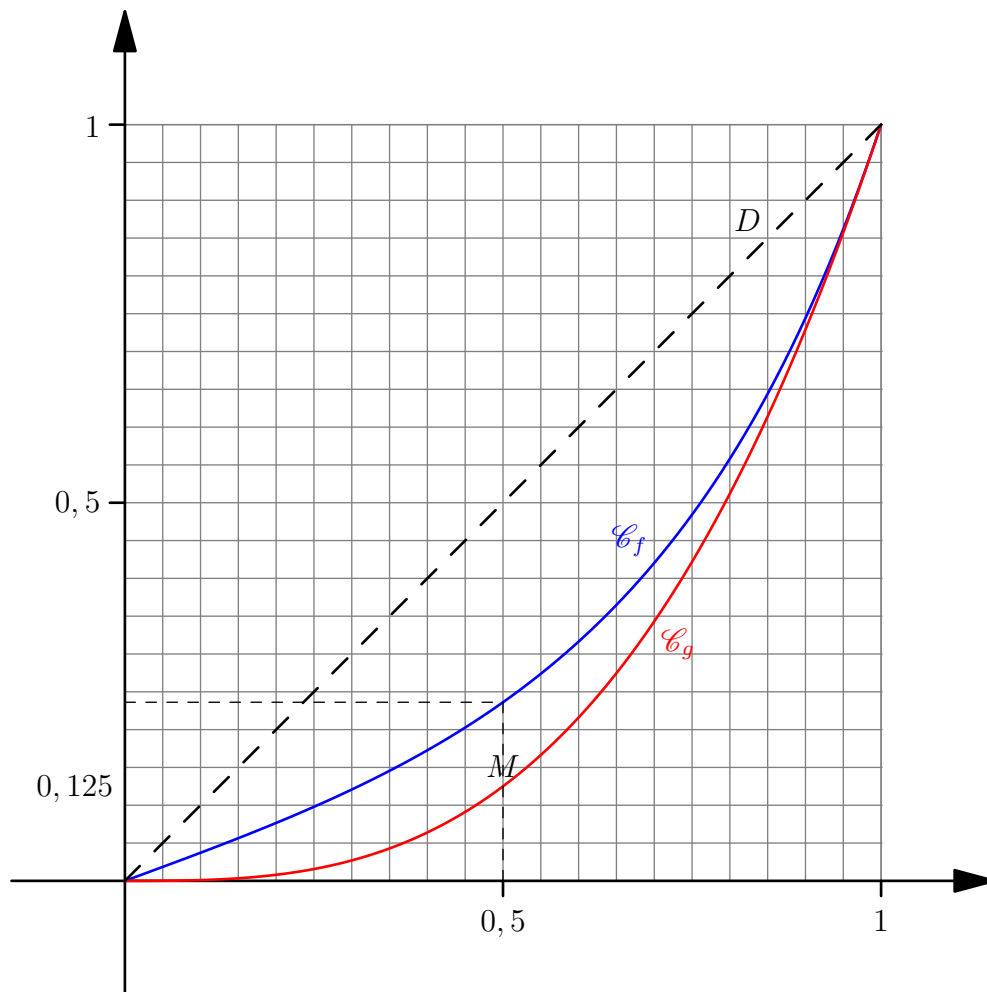
$$h(x) = x(1 - e^{x^2-1})$$

- (a) Justifier que l'inéquation $1 - e^{x^2-1} \geq 0$ a pour ensemble de solutions l'intervalle $[-1; 1]$.
- (b) Déterminer le signe de $h(x)$ sur l'intervalle $[-1; 1]$.
- (c) En remarquant que pour tout réel x , on a l'égalité $h(x) = x - f(x)$, déduire de la question précédente la position relative de la courbe $\mathcal{C}_f$ et de la droite D d'équation $y = x$ sur l'intervalle $[0; 1]$.
4. Soit H la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $H(x) = \frac{1}{2}x^2 - e^{x^2-1}$ et soit $I = \int_0^1 h(x) dx$.
On admet que H est une primitive de la fonction h sur $\mathbb{R}$.
Calculer la valeur exacte de I .

Partie B : Applications

Sur la graphique suivant sont tracées sur l'intervalle $[0; 1]$:

- la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de la fonction étudiée en partie A ;
- la courbe $\mathcal{C}_g$ représentative de la fonction définie par $g(x) = x^3$;
- la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x$.



Les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ illustrent ici la répartition des salaires dans deux entreprises F et G .

- sur l'axe des abscisses, x représente la proportion des employés ayant les salaires les plus faibles par rapport à l'effectif total de l'entreprise ;
- sur l'axe des ordonnées, $f(x)$ et $g(x)$ représentent pour chaque entreprise la proportion de la masse salariale (c'est-à-dire la somme de tous les salaires) correspondante.

Par exemple :

Le point $M(0,5; 0,125)$ est un point appartenant à la courbe $\mathcal{C}_g$. Pour l'entreprise G cela se traduit de la façon suivante :

si on classe les employés par revenu croissant, le total des salaires de la première moitié (c'est-à-dire des 50 % aux revenus les plus faibles) représente 12,5 % de la masse salariale.

1. Calculer le pourcentage de la masse salariale détenue par 80 % des employés ayant les salaires les plus faibles dans l'entreprise F . On donnera une valeur du résultat arrondie à l'unité.
2. On note $\mathcal{A}_f$ l'aire du domaine délimité par la droite D , la courbe C_f et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

On appelle indice de Gini associé à la fonction f , le nombre réel noté I_f et défini par $I_f = 2 \times \mathcal{A}_f$.

(a) Montrer que $I_f = \frac{1}{e}$.

(b) On admet que, plus l'indice de Gini est petit, plus la répartition des salaires dans l'entreprise est égalitaire. Déterminer, en justifiant, l'entreprise pour laquelle la distribution des salaires est la plus égalitaire.

9. Amérique du Nord 30 mai 2014 (5 points)

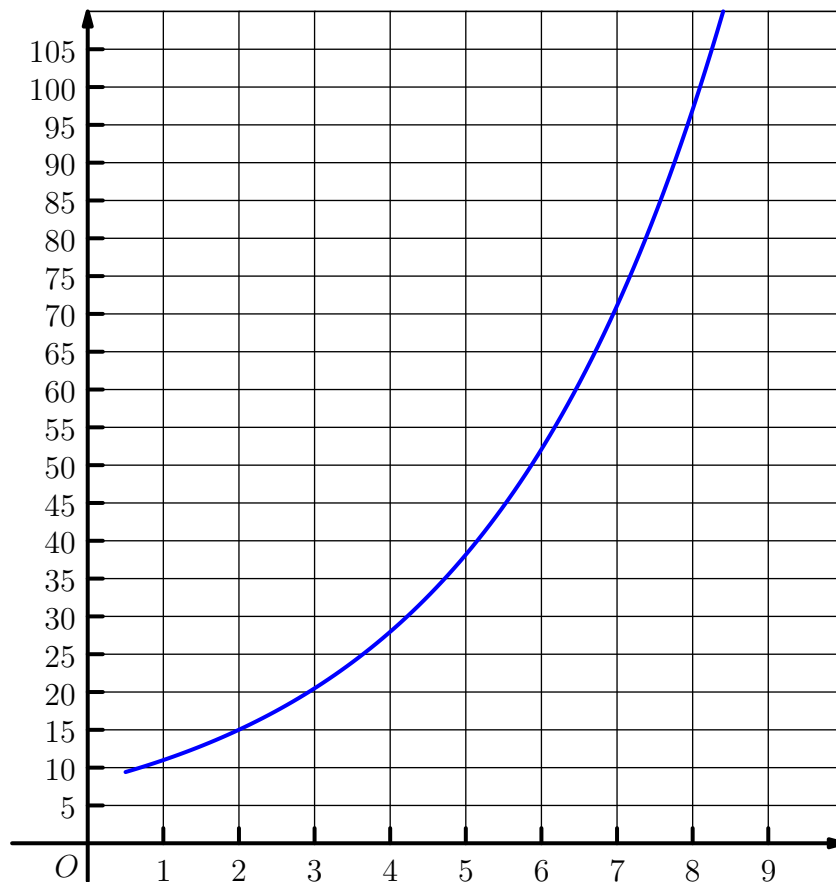
Un site est spécialisé dans la diffusion de vidéos sur internet. Le responsable du site a constaté que la durée de chargement des vidéos évoluait en fonction d'internautes connectés simultanément.

On cherche à estimer la durée de chargement en fonction du nombre de personnes connectées simultanément. Deux fonctions sont proposées pour modéliser cette situation.

PARTIE A : Modèle exponentiel

Dans le repère orthogonal ci-dessous, on a tracé la courbe représentative d'une fonction f qui modélise la situation précédente.

On note x le nombre, exprimé en millier, d'internautes connectés simultanément et $f(x)$ la durée de chargement exprimée en seconde.



1. Par lecture graphique, estimer la durée de chargement, en seconde, pour 8 000 personnes connectées.
2. (a) Déterminer graphiquement un antécédent de 15 par f .
(b) Donner une interprétation de ce résultat.

PARTIE B : Modèle logarithmique

On considère une autre fonction g pour modéliser la situation précédente.

On note x le nombre, exprimé en millier, d'internautes connectés simultanément. La durée de chargement exprimée en seconde est alors $g(x)$ avec $g(x) = 10x - 8 \ln(x)$ pour x appartenant à $[0,5; +\infty[$.

1. Calculer $g'(x)$.
2. Dresser le tableau de variation de g sur l'intervalle $[0,5; +\infty[$.

3. Justifier que la fonction G définie sur $[0,5; +\infty[$ par $G(x) = 5x^2 + 8x - 8x \ln(x)$ est une primitive de g sur $[0,5; +\infty[$.
4. On pose $I = \int_2^4 g'(x) dx$.
- (a) Montrer que la valeur exacte de I peut s'écrire sous la forme $a + b \ln(2)$ où a et b sont deux réels que l'on déterminera.
- (b) Déterminer une valeur approchée à 10^{-2} près de I puis donner une interprétation de ce résultat.

PARTIE C

Une vidéo particulièrement demandée a attiré simultanément 8 000 personnes. On a constaté que le temps de chargement était de 92 secondes.

Déterminer, en justifiant, celui des deux modèles qui décrit le mieux la situation pour cette vidéo.

10. Amérique du Nord 30 mai 2014 (QCM 4 points)

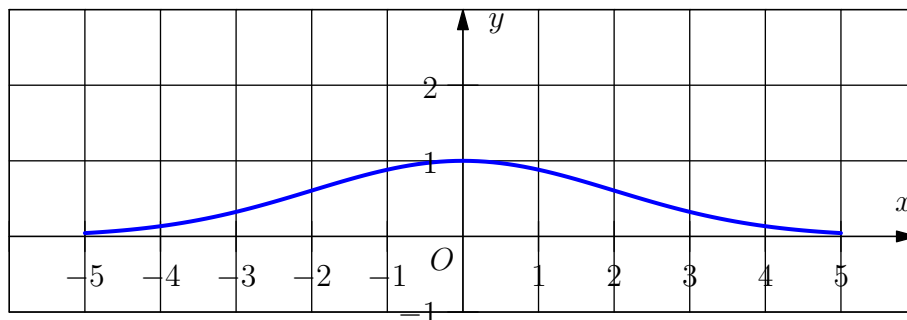
Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.

Une réponse exacte rapporte un point. Une réponse fausse ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point.

Pour chacune des questions posées, une seule des quatre réponses est exacte.

Indiquer sur la copie le numéro de la question et recopier la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

La courbe $\mathcal{C}$ ci-dessous est la représentation graphique, dans un repère orthonormé, d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-5; 5]$. On note f' la fonction dérivée de f .



1. Sur l'intervalle $[-5; 5]$:
 - a) f est une fonction de densité de probabilité
 - b) f est positive
 - c) f n'est pas continue
 - d) l'équation $f(x) = 0$ admet 2 solutions
2. Sur l'intervalle $[-5; 5]$:
 - a) $f'(1) = 0$
 - b) $f'(0) = 1$
 - c) $f'(0) = 0$
 - d) $f'(1) = 1$
3. On admet qu'une équation de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 4 est $y = -\frac{x}{e^2} + \frac{5}{e^2}$. Le nombre dérivé de f en 4 est :
 - a) $\frac{5}{e^2}$
 - b) $f'(4) = \frac{1}{e^2}$
 - c) $f'(4) = -\frac{1}{e^2}$
 - d) $f'(4) = e^{-2}$
4. On pose $A = \int_{-2}^2 f(x) dx$. Un encadrement de A est :
 - a) $0 < A < 1$
 - b) $1 < A < 2$
 - c) $3 < A < 4$
 - d) $4 < A < 5$

11. Liban 27 mai 2014 (6 points)**Partie A**

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0; 5]$ par :

$$f(x) = x + 1 + e^{-x+0,5}$$

On a représenté en annexe dans un plan muni d'un repère orthonormé :

- la courbe $\mathcal{C}$ représentative de la fonction f ;
 - la droite Δ d'équation $y = 1,5x$.
1. (a) Vérifier que, pour tout x appartenant à l'intervalle $[0; 5]$, on a $f'(x) = 1 - e^{-x+0,5}$ où f' désigne la fonction dérivée de f .
(b) Résoudre dans l'intervalle $[0; 5]$ l'équation $f'(x) = 0$.
(c) Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0; 5]$.
(d) Dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0; 5]$.
 2. On note α l'abscisse du point d'intersection de $\mathcal{C}$ et Δ .
(a) Donner, par lecture graphique, un encadrement de α à 0,5 près.
(b) Résoudre graphiquement sur l'intervalle $[0; 5]$ l'inéquation $f(x) < 1,5x$.

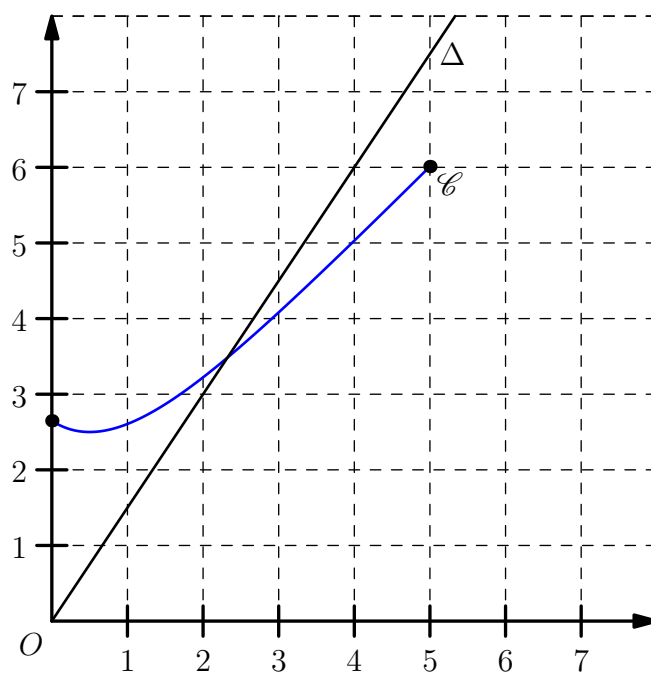
Partie B : Application

Une entreprise fabrique des cartes à puces électroniques à raide d'une machine.

La fonction f , définie dans la partie A, représente le coût d'utilisation de la machine en fonction de la quantité x de cartes produites, lorsque x est exprimé en centaines de cartes et $f(x)$ en centaines d'euros.

1. (a) Déduire de la partie A, le nombre de cartes à produire pour avoir un coût minimal d'utilisation de la machine.
(b) Chaque carte fabriquée par la machine est vendue 1,50 €. La recette perçue pour la vente de x centaines de cartes vaut donc $1,5x$ centaines d'euros. Vérifier que le bénéfice obtenu, en centaines d'euros, par la vente de x centaines de cartes est donné par $B(x) = 0,5x - 1 - e^{-x+0,5}$.
2. (a) Montrer que la fonction B est strictement croissante sur l'intervalle $[0; 5]$.
(b) Montrer que, sur l'intervalle $[0; 5]$, l'équation $B(x) = 0$ admet une unique solution comprise entre 2,32 et 2,33.
3. On dira que l'entreprise réalise un bénéfice lorsque $B(x) > 0$.
Indiquer la quantité minimale qui doit figurer sur le carnet de commandes de l'entreprise pour que celle-ci puisse réaliser un bénéfice.

Annexe



12. Pondichéry 14 avril 2014 (6 points)

Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment.

Un artisan glacier commercialise des « sorbets bio ». Il peut en produire entre 0 et 300 litres par semaine. Cette production est vendue dans sa totalité.

Le coût total de fabrication est modélisé par la fonction f définie pour tout nombre réel x de l'intervalle $I =]0; 3]$ par

$$f(x) = 10x^2 - 20x \ln x$$

Lorsque x représente le nombre de centaines de litres de sorbet, $f(x)$ est le coût total de fabrication en centaines d'euros.

La recette, en centaines d'euros, est donnée par une fonction r définie sur le même intervalle I .

Partie A

La courbe $\mathcal{C}$ représentative de la fonction f et la droite D représentative de la fonction linéaire r sont données en **annexe**.

- Répondre aux questions suivantes par lecture graphique et sans justification.
 - Donner le prix de vente en euros de 100 litres de sorbet.
 - Donner l'expression de $r(x)$ en fonction de x .
 - Combien l'artisan doit-il produire au minimum de litres de sorbet pour que l'entreprise dégager un bénéfice ?
- On admet que $\int_1^3 20x \ln x \, dx = 90 \ln 3 - 40$.
 - en déduire la valeur de $\int_1^3 f(x) \, dx$.
 - En déduire, pour une production comprise entre 100 et 300 litres, la valeur moyenne (arrondie à l'euro) du coût total de production.

Partie B

On note $B(x)$ le bénéfice réalisé par l'artisan pour la vente de x centaines de litres de sorbet produits. D'après les données précédentes, pour tout x de l'intervalle $[1; 3]$, on a :

$$B(x) = -10x^2 + 10x + 20 \ln x$$

où $B(x)$ est exprimé en centaines d'euros.

- On note B' la fonction dérivée de B . Montrer que, pour tout nombre x de l'intervalle $[1; 3]$, on a $B'(x) = -20x + 20 \ln x + 30$.
- On donne le tableau de variation de la fonction dérivée B' sur l'intervalle $[1; 3]$.

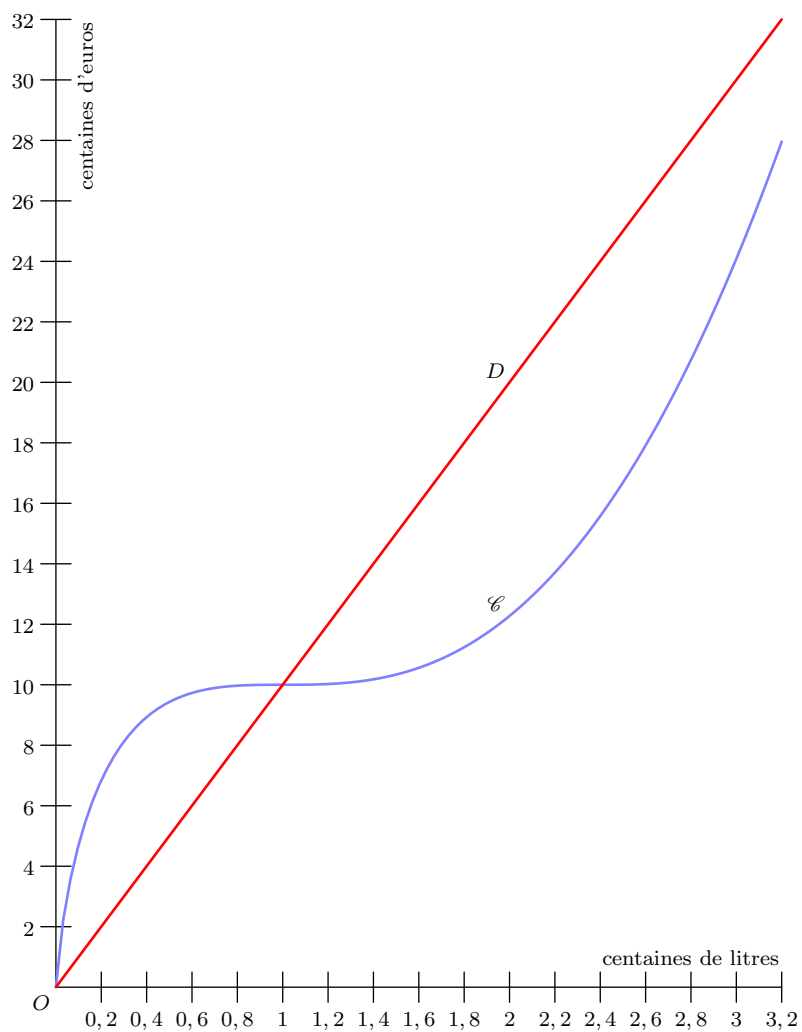
x	1	3
$B'(x)$	$B'(1)$	$B'(3)$



- Montrer que l'équation $B'(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[1; 3]$. Donner une valeur approchée de α à 10^{-2} .
- En déduire le signe de $B'(x)$ sur l'intervalle $[1; 3]$ puis dresser le tableau de variation de B sur ce même intervalle.

3. L'artisan a décidé de maintenir sa production dans les mêmes conditions s'il peut atteindre un bénéfice d'au moins 850 euros. Est-ce envisageable ?

Annexe



13. Pondichéry 14 avril 2014 (4 points)

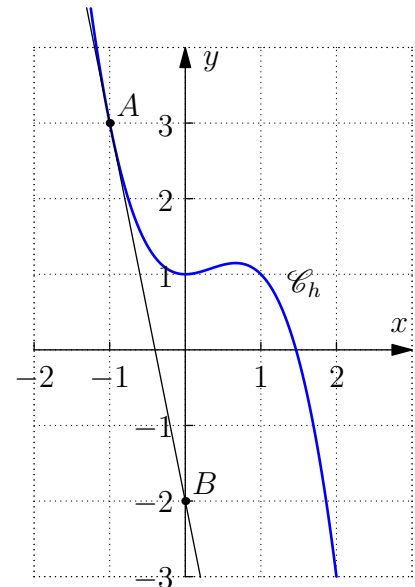
Pour chacune des propositions, déterminer si la proposition est vraie ou fausse et justifier la réponse.

1. La courbe $\mathcal{C}_h$ représentative d'une fonction h définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ est représentée ci-contre.

On a tracé la tangente T à $\mathcal{C}_h$ au point $A(-1; 3)$.

T passe par le point $B(0; -2)$.

Proposition : Le nombre dérivé $h'(-1)$ est égal à -2 .

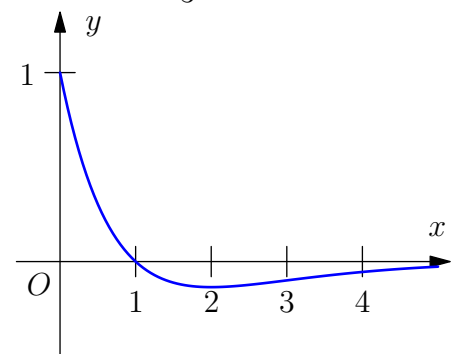


2. On désigne par f une fonction définie et deux fois dérivable sur $[0; +\infty[$.

La courbe représentative de la fonction f'' , dérivée seconde de la fonction f , est donnée ci-contre.

Le point de coordonnées $(1; 0)$ est le seul point d'intersection de cette courbe et de l'axe des abscisses.

Proposition : La fonction f est convexe sur l'intervalle $[1; 4]$.



3. **Proposition** : on a l'égalité

$$e^{5 \ln 2} \times e^{7 \ln 4} = 2^{19}$$

4. La courbe représentative d'une fonction g définie et continue sur l'intervalle $[0; 2]$ est donnée en fig. 1.

La courbe représentative d'une de ses primitives, G , est donnée sur la fig. 2.

La courbe représentative de G passe par les points $A(0; 1)$, $B(1; 1)$ et $C(2; 5)$.

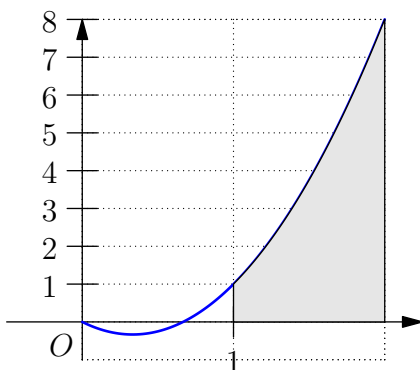


fig. 1

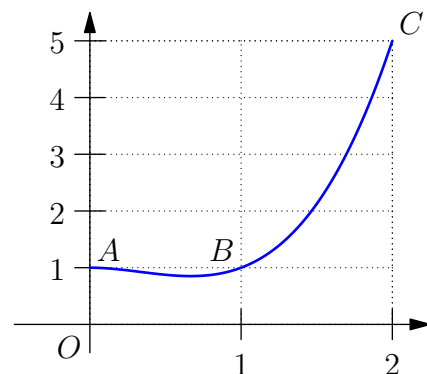


fig. 2

Proposition : la valeur exacte de l'aire de la partie grisée sous la courbe de g est fig. 1 est 4 unités d'aires.

14. Nouvelle-Calédonie 7 mars 2014 (4 points)

Pour chacune des affirmations ci-dessous, indiquer si elle est vraie ou fausse et **justifier la réponse**.

1. La fonction G définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$G(x) = x \ln x - x + 10$$

est une primitive de la fonction g définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $g(x) = \ln x$.

2. On a l'égalité : $\int_0^1 (x^2 + 1) dx = \frac{1}{3}$.

3. Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur l'intervalle $[0; 1]$.

On a alors : $E(x) = 1$.

4. Dans une population, la proportion de garçons à la naissance est $p = 0,51$.

L'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la proportion de garçons dans un échantillon de taille 100 est (en arrondissant les bornes à 0,001 près) : $[0,412; 0,608]$.

15. Nouvelle-Calédonie 7 mars 2014 (6 points)

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[2; 5]$ par :

$$f(x) = (3 - x)e^x + 1$$

Soit f' sa fonction dérivée et soit f'' sa fonction dérivée seconde.

1. Montrer que, pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[2; 5]$,

$$f'(x) = (2 - x)e^x \text{ et } f''(x) = (1 - x)e^x$$

2. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[2; 5]$.
 3. Justifier que la fonction f admet une unique solution α dans l'intervalle $[2; 5]$.
 Montrer que : $3 < \alpha < 4$.

4. (a) Soit T la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 3.

Montrer que T a pour équation $y = -e^3 x + 3e^3 + 1$.

- (b) Déterminer les coordonnées du point d'intersection de la droite T et de l'axe des abscisses.
 (c) Étudier le signe de $f''(x)$ sur l'intervalle $[2; 5]$ et en déduire la convexité ou la concavité de f sur cet intervalle.
 (d) En déduire que : $\alpha < 3 + \frac{1}{e^3}$.
 On a donc : $3 < \alpha < 3 + \frac{1}{e^3} < 3,05$.

5. On considère l'algorithme suivant :

Variables :	a, b, m et r sont des nombres réels
Initialisation :	Affecter à a la valeur 3 Affecter à b la valeur 3,05
Entrée :	Saisir r
Traitement :	TANT QUE $b - a > r$ Affecter à m la valeur $\frac{a+b}{2}$ SI $f(m) > 0$ ALORS Affecter à a la valeur m SINON Affecter à b la valeur m FIN SI FIN TANT QUE
SORTIES :	Afficher a Afficher b

- (a) Faire fonctionner l'algorithme précédent avec $r = 0,01$ en recopiant et en complétant le tableau ci-dessous. On arrondira au millièmes les valeurs de $f(m)$.

	$b - a$	$b - a > r$	m	$f(m)$	$f(m) > 0$	a	b
Initialisation						3	3,05
étape 1	0,05	oui	3,025	0,485	oui	3,025	3,05
étape 2							
étape 3							

- (b) Interpréter les résultats trouvés pour a et b à la fin de l'étape 3.

16. Amérique du Sud 21 novembre 2013 (6 points)

On considère f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

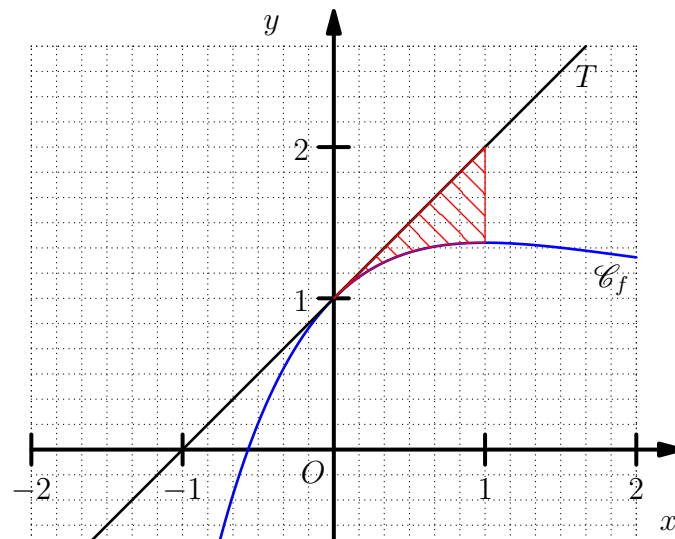
$$f(x) = x e^{-x} + 1$$

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé du plan et f' la fonction dérivée de f .

1. (a) Montrer que, pour tout réel x , $f'(x) = e^{-x}(1 - x)$.
 (b) En déduire le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.
2. (a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[-1; 0]$
 (b) Donner un encadrement de α à 10^{-1} près.
3. Montrer que l'équation réduite de la tangente T à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0 est $y = x + 1$.
4. L'objectif de cette question est de déterminer la position relative de $\mathcal{C}_f$ par rapport à T .
 À l'aide d'un logiciel de calcul formel, on a obtenu, pour tout réel x , l'expression et le signe de $f''(x)$ ou f'' désigne la dérivée seconde de f .

	Instruction	Réponse
1	$f(x) = x * \exp(-x) + 1$	$x e^{-x} + 1$
2	$f''(x) = \text{dérivée seconde}[f(x)]$	$e^{-x}(x - 2)$
3	$\text{résoudre}[e^{-x}(x - 2) \geq 0]$	$x \geq 2$

- (a) Déterminer le sens de variation de la dérivée f' de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
- (b) Déterminer l'intervalle de $\mathbb{R}$ sur lequel la fonction est convexe puis celui sur lequel la fonction est concave.
- (c) En déduire la position relative de $\mathcal{C}_f$ par rapport à T sur l'intervalle $[-\infty; 2]$.
5. On a tracé ci-dessous la courbe $\mathcal{C}_f$ et la tangente T dans un repère orthonormé.



- (a) On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = e^{-x}(-1 - x) + x$$

Montrer que F est une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

- (b) Calculer, en unités d'aire, l'aire du domaine hachuré compris entre la courbe $\mathcal{C}_f$, la tangente T et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$ puis donner le résultat arrondi à 10^{-3} près.

17. Amérique du Sud 21 novembre 2013 (5 points)

Une entreprise informatique produit et vend des clés USB. La vente de ces clés est réalisée par des commerciaux qui se déplacent aux frais de l'entreprise.

Pour chacune des cinq affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse.

1. La direction de l'entreprise décide de diminuer le budget consacré aux frais de déplacements de ses commerciaux.

Affirmation 1 : « Diminuer ce budget de 6 % par an pendant 5 ans revient à diminuer ce budget de 30 % sur la période de 5 ans ».

2. La production mensuelle varie entre 0 et 10 000 clés.

Le bénéfice mensuel, exprimé en milliers d'euros, peut être modélisé par la fonction B définie sur l'intervalle $[0; 10]$ par :

$$B(x) = -x^2 + 10x - 9$$

où x représente le nombre de milliers de clés produites et vendues.

Affirmation 2a : « Lorsque l'entreprise produit et vend entre 1 000 et 9 000 clés USB, le bénéfice est positif ».

Affirmation 2b : « Lorsque l'entreprise produit et vend 5 000 clés USB, le bénéfice mensuel est maximal ».

Affirmation 2c : « Lorsque l'entreprise produit et vend entre 2 000 et 8 000 clés USB, son bénéfice mensuel moyen est égal à 78000 € ».

3. Pour contrôler la qualité du stock formé des milliers de clés USB fabriquées chaque année, on sélectionne au hasard un échantillon de 4 000 clés. Parmi ces clés, 210 sont défectueuses.

Le directeur des ventes doit stopper toute la chaîne de fabrication des clés USB si la borne supérieure de l'intervalle de confiance, au niveau de confiance 95 %, dépasse 7 %.

Affirmation 3 : « À l'issue du contrôle, le directeur des ventes stoppera toute fabrication ».

18. Nouvelle-Calédonie 18 novembre 2013 (QCM 3 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.

Pour chacune des questions posées une seule des quatre réponses est exacte. Recopier le numéro de la question sur la copie et indiquer la lettre correspondant à la réponse choisie.

Une réponse exacte rapporte 1 point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse ne rapportent ni n'enlèvent aucun point.

Aucune justification n'est demandée.

1. La fonction f est définie pour tout nombre réel x par :

$$f(x) = e^{2x+\ln x}$$

- (a) La fonction f est concave.
- (b) La fonction f possède une fonction dérivée seconde qui s'annule.
- (c) La fonction f possède une fonction dérivée seconde strictement positive.
- (d) La fonction f possède une fonction dérivée qui s'annule.

2. Une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est définie par :

- (a) $F(x) = 2e^{2x+\ln x}$.
- (b) $F(x) = e^{x^2+x\ln x}$.
- (c) $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x+\ln x}$.
- (d) $F(x) = e^{2x+\ln x}$.

3. La fonction g est la fonction constante définie pour tout nombre réel x par $g(x) = 2$.

L'aire du domaine délimité par les courbes représentatives de g et de f , l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = \ln 2$ est :

- (a) $\int_0^{\ln 2} (F(x) - 2x)dx$.
- (b) $\int_0^{\ln 2} (f(x) + 2)dx$.
- (c) $\int_0^{\ln 2} (2 - f(x))dx$.
- (d) $\int_0^{\ln 2} (f(x) - 2)dx$.

19. Nouvelle-Calédonie 18 novembre 2013 (3 points)

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[1; 10]$ par :

$$f(x) = x^2 - 14x + 15 + 20 \ln x$$

1. Montrer que pour tout nombre réel x de l'intervalle $[1; 10]$, on a :

$$f'(x) = \frac{2x^2 - 14x + 20}{x}$$

2. Construire, en justifiant, le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[1; 10]$.
3. En déduire la nombre de solutions de l'équation $f(x) = 3$ dans l'intervalle $[1; 10]$.

20. Métropole Réunion 13 septembre 2013 (5 points)

Partie A

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[-10; 30]$ par :

$$f(x) = 5 + x e^{0,2x-1}$$

On admet que f est dérivable sur cet intervalle et admet des primitives sur cet intervalle.

1. Soit f' la fonction dérivée de la fonction f .
Montrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[-10; 30]$, $f'(x) = (0,2x + 1) e^{0,2x-1}$.
2. En déduire le sens de variation de f sur l'intervalle $[-10; 30]$.
3. Justifier que l'équation $f(x) = 80$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[0; 20]$ et donner un encadrement de α à 0,1 près.
4. Soit F la fonction définie sur $[-10; 30]$ par :

$$F(x) = 5(x - 5) e^{0,2x-1} + 5x$$

On admet que F est une primitive de f dans l'intervalle $[-10; 30]$.

- (a) Calculer la valeur exacte de $I = \int_5^{10} f(x) dx$.
- (b) En déduire la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[5; 10]$. (On donnera une valeur arrondie au centième.)

Partie B

En 2010, un styliste a décidé d'ouvrir des boutiques de vêtements à prix modérés, tout d'abord dans son pays d'origine, puis dans la communauté européenne et au niveau mondial.

Il a utilisé la fonction f définie dans la partie A mais seulement sur l'intervalle $[0; 20]$ pour modéliser son développement et a désigné par $f(x)$ le nombre de magasins de son enseigne existant en $2010 + x$.

1. Calculer $f(0)$ et interpréter le résultat.
2. En utilisant la partie A, indiquer à partir de quelle année la chaîne possédera 80 boutiques.
3. Chaque magasin a un chiffre d'affaires journalier moyen de 2 500 euros.

Si on considère qu'un magasin est ouvert 300 jours par an, calculer à la centaine d'euros près, le chiffre d'affaires annuel moyen que le styliste peut espérer pour l'ensemble de ses boutiques entre 2015 et 2020.

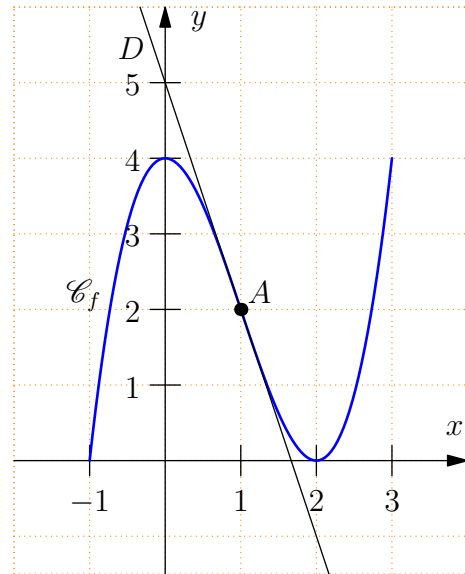
21. Métropole Réunion 13 septembre 2013 (QCM 5 points)

On considère une fonction f définie sur l'intervalle $[-1; 3]$, deux fois dérivable sur cet intervalle et dont la représentation $\mathcal{C}_f$ dans un repère orthonormé est proposée ci-contre.

On désigne par f' la fonction dérivée de f , par f'' la fonction dérivée seconde de f , par F une primitive de f (On admet l'existence de F).

La droite D est tangente à $\mathcal{C}_f$ au point A d'abscisse 1, seul point en lequel la courbe traverse la tangente. L'axe des abscisses est tangent à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 2.

La tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0 est la droite d'équation $y = 4$.



Pour chacune des questions ci-dessous, une seule des quatre propositions est exacte.

Indiquez sur votre copie le numéro de la question et la proposition choisie.

Une réponse juste apporte un point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse ne rapportent ni n'enlèvent aucun point.

1. (a) f est convexe sur l'intervalle $[-1; 0]$.
 (b) f est concave sur l'intervalle $]1; 2[$.
 (c) f est convexe sur l'intervalle $]1; 3[$.
 (d) $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de sa tangente au point d'abscisse -1 .
2. (a) $f(1) = 5$
 (b) $f'(1) = 2$
 (c) $f''(1) = -3$
 (d) La tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1 a pour équation $y = -3x + 5$.
3. (a) $f'(x) > 0$ pour tout x de l'intervalle $] - 1; 2[$.
 (b) f' est croissante sur l'intervalle $]1; 2[$.
 (c) $f(x) = 0$ si et seulement si $x = 0$ ou $x = 2$.
 (d) $f'(x) \leq 0$ pour tout x de l'intervalle $] - 2; -1[$.
4. (a) $\int_{-1}^0 f(x)dx < 0$
 (b) $3 < \int_0^2 f(x)dx < 6$
 (c) $\int_{-1}^0 f(x)dx = \int_0^2 f(x)dx$
 (d) La valeur moyenne de f sur l'intervalle $[0; 2]$ est égale à 1.
5. (a) f' est croissante sur l'intervalle $] - 1; 2[$.
 (b) F est croissante sur l'intervalle $] - 1; 2[$.
 (c) f est croissante sur l'intervalle $] - 1; 2[$.
 (d) $F(1) > F(2)$.

22. Antilles Guyane 12 septembre 2013 (5 points)

Une entreprise fabrique des pièces métalliques pour la construction automobile. On modélise le bénéfice journalier par la fonction B définie sur $[0; 10]$ par :

$$B(x) = x + 4e^{-x} - 5$$

où x représente le nombre de pièces produites et vendues, exprimé en centaines, et $B(x)$ représente le bénéfice en milliers d'euros.

1. (a) Déterminer $B'(x)$ où B' désigne la fonction dérivée de la fonction B .
(b) Démontrer que $B'(x)$ s'annule uniquement pour $x = \ln(4)$.
(c) Calculer les valeurs exactes de $B(0)$; $B(10)$ et $B(\ln(4))$
(d) Dresser et compléter le tableau de variation de la fonction B sur $[0; 10]$.
2. (a) Justifier que l'équation $B(x) = 0$ possède une unique solution α sur $[\ln(4); 10]$.
(b) Donner une valeur approchée à 10^{-2} près de α .
3. À partir de combien d'unités produites et vendues l'entreprise sera-t-elle bénéficiaire ?

23. Antilles Guyane 12 septembre 2013 (5 points)

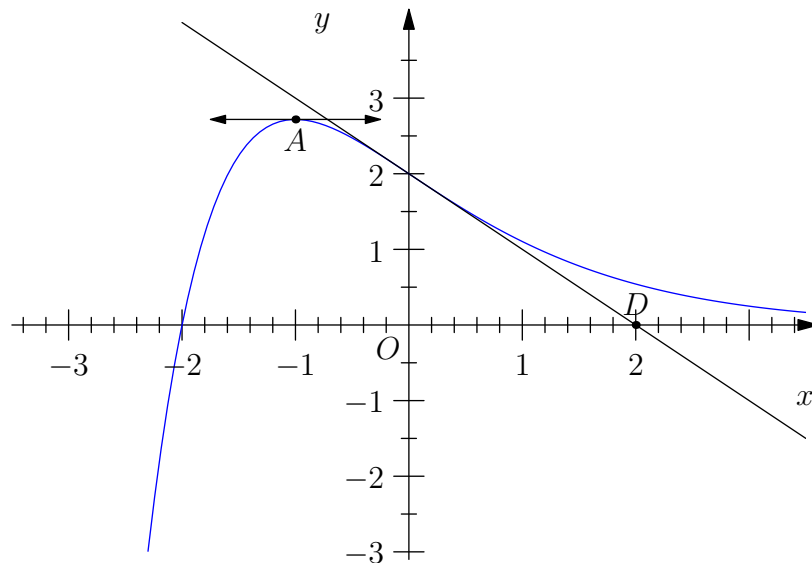
Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

La courbe C d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ est donnée ci-dessous.

La courbe C passe par les points $A(-1; e)$ et $B(0; 2)$ où $e = \exp(1)$.

La tangente à la courbe C au point A est horizontale et la tangente à la courbe C au point B est la droite (BD) , où D a pour coordonnées $(2; 0)$.



Pour chacune des affirmations suivantes, recopier sur votre copie le numéro de la question et indiquer, sans justifier, si elle est vraie ou fausse en vous appuyant sur la représentation graphique ci-dessus.

Une bonne réponse rapporte 0,5 point; une mauvaise réponse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point.

1. L'équation $f(x) = 1$ admet exactement trois solutions dans l'intervalle $[-2; 3]$.
2. La fonction f est convexe sur l'intervalle $[1; 3]$.
3. $f'(-1) = 0$.
4. $f'(0) = -1$,
5. $f'(x) \geq 0$ sur l'intervalle $[1; 3]$.
6. Une primitive F de la fonction f est croissante sur l'intervalle $[1; 3]$.

Partie B

Pour chacune des affirmations suivantes, recopier sur votre copie le numéro de la question et indiquer, **en justifiant**, si elle est vraie ou fausse.

Une bonne réponse rapporte 1 point; une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

1. L'ensemble des solutions de l'inéquation : $0,2 \ln x - 1 \leq 0$ est l'intervalle $[e; +\infty[$.
2. On considère la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = x^2 - 2 \ln x$.
La fonction g est convexe sur $]0; +\infty[$.

24. Polynésie 4 septembre 2013 (5 points)

Une entreprise qui produit du papier recyclé, a été créée en l'année 2000 et le tableau ci-dessous donne l'évolution de sa production.

Année	2000	2002	2004	2006	2008	2010	2012
Rang de l'année	0	2	4	6	8	10	12
Production en tonnes	7 000	18 811	36 620	49 000	58 012	63 098	68 500

1. (a) Déterminer le pourcentage d'augmentation de la production entre les années 2000 et 2012. On donnera le résultat arrondi sous la forme $a \%$ où a est un nombre entier.
- (b) Déterminer un nombre réel positif qui est solution de l'équation :

$$x^{12} = 9,79$$

Interpréter ce nombre en termes de taux d'évolution de la production de cette entreprise entre les années 2000 et 2012. On donnera le résultat arrondi sous la forme $b \%$ où b est un nombre entier.

2. L'entreprise fait appel à un cabinet d'experts pour modéliser l'évolution de la production de l'entreprise afin de faire une projection jusqu'en 2020. Le cabinet d'experts propose la fonction f définie sur l'intervalle $[2; 20]$ par :

$$f(x) = 27\,131 \ln x + 0,626x^3$$

où x représente le rang de l'année et $f(x)$ le nombre de tonnes produites.

- (a) On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[2; 20]$. Déterminer $f'(x)$ puis les variations de la fonction f sur $[2; 20]$.
- (b) À l'aide de cette modélisation, l'entreprise peut-elle dépasser une production de 90 000 tonnes de papier recyclé avant l'année 2020 ? Justifier.
3. Une commande de bobines de papier de 2,20 m de large et pesant chacune environ 500 kg est faite à cette entreprise. Le poids d'une bobine varie en fonction de nombreux facteurs.
Soit X la variable aléatoire qui à toute bobine choisie au hasard dans cette commande associe son poids. On admet que X suit une loi normale de paramètres $\mu = 500$ et $\sigma = 2$.
 - (a) Toute bobine dont le poids est inférieur à 496 kg est refusée.
Quelle est la probabilité qu'une bobine choisie au hasard dans cette commande soit refusée ?
Donner une valeur arrondie du résultat à 10^{-4} .
 - (b) L'entreprise perd de l'argent pour toute bobine dont le poids est supérieur à 506 kg.
Quelle est la probabilité qu'une bobine choisie au hasard dans cette commande fasse perdre de l'argent à l'entreprise ? Donner une valeur arrondie du résultat à 10^{-4} .

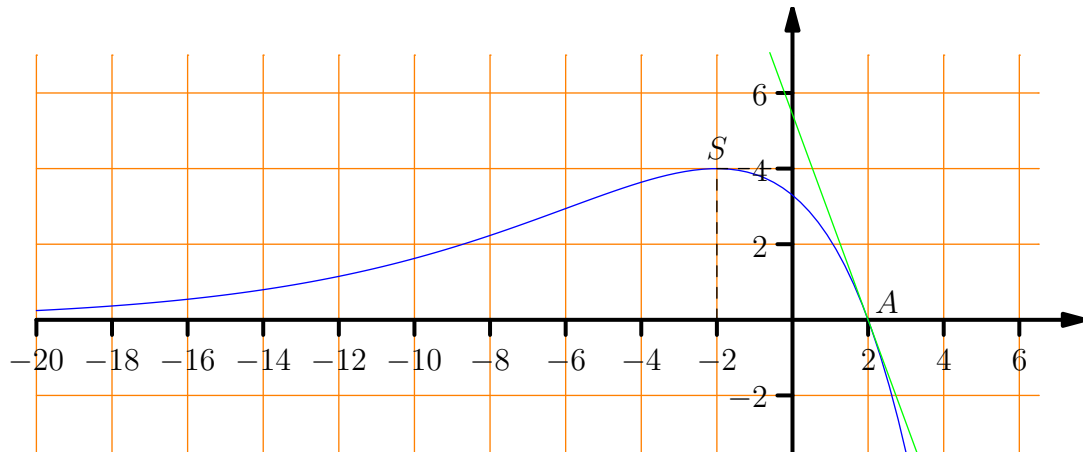
25. Polynésie 4 septembre 2013 (qcm - 4 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Les questions sont indépendantes les unes des autres. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est correcte.

Indiquer sur la copie le numéro de la question et recopier la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

Une bonne réponse rapporte un point. Une mauvaise réponse ou l'absence de réponse n'apporte, ni n'enlève aucun point.

On a tracé ci-dessous la courbe représentative C_f d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ ainsi que sa tangente au point A d'abscisse 2.



1. Quelle est l'équation de la tangente à C_f en A ?

a) $y = ex + 2e$

b) $y = 3x + 2e$

c) $y = ex + 3e$

d) $y = -5x + 4e$

2. La fonction f est :

a) concave sur $] -\infty; 0]$

b) convexe $] -\infty; 0]$

c) concave sur $[0; 2]$

d) convexe sur $[0; 2]$

3. La valeur de $\int_0^2 f(x)dx$ est :

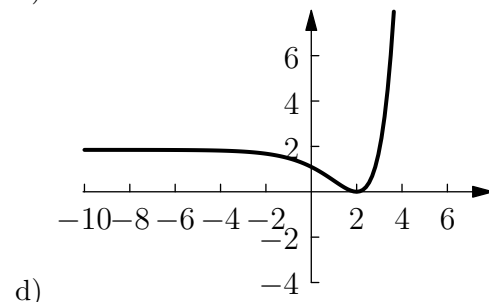
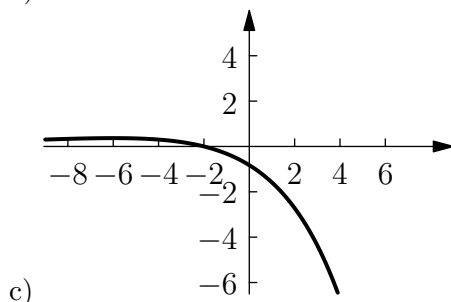
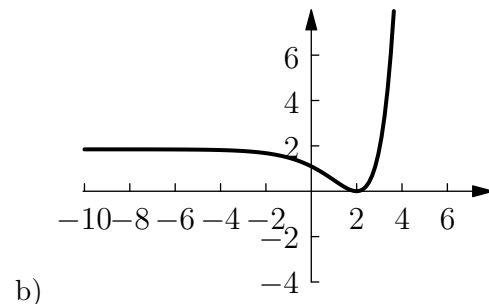
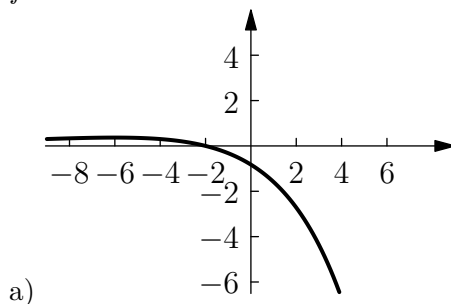
a) $50e$

b) $16e - 24\sqrt{e}$

c) $0,1e$

d) $-5e - \sqrt{e}$

4. Parmi les quatre courbes représentées ci-dessous, laquelle représente la fonction dérivée de la fonction f ?



26. Métropole sujet dévoilé juin 2013 (6 points)

Dans un laboratoire, des scientifiques ont étudié pendant 10 ans l'effet de la pollution sur une population d'insectes car ils craignaient l'extinction de cette espèce.

L'étude a été effectuée sur un échantillon de 25 000 insectes.

Les deux parties peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.

Partie A

Une étude a permis de montrer que la population d'insectes diminue très rapidement lors des quatre premières années. La population peut être modélisée par la fonction f définie sur l'intervalle $[0; 4]$ par $f(t) = 25 e^{-0,5t}$, où t est le temps exprimé en années et $f(t)$ le nombre de milliers d'insectes.

1. Calculer le pourcentage de diminution du nombre d'insectes la première année. Arrondir à 1 %.
2. Montrer que la fonction F définie sur l'intervalle $[0; 4]$ par :

$$F(t) = -50 e^{-0,5t}$$

est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[0; 4]$.

3. Calculer la valeur exacte de $\int_2^4 25 e^{-0,5t} dt$.
4. En déduire la population moyenne d'insectes entre le début de la deuxième et le début de la quatrième année.

Partie B

Après de longues recherches, un biologiste a mis au point un traitement pour essayer de sauver cette espèce. Ce traitement est administré aux insectes à partir de la quatrième année.

L'évolution de la population est alors modélisée par la fonction g définie sur l'intervalle $[4; 10]$ par :

$$g(t) = 20 e^{-0,1t^2} + t - 4,65$$

1. On désigne par g' la fonction dérivée de g .
Montrer que pour tout réel t de l'intervalle $[4; 10]$, on a $g'(t) = -4t e^{-0,1t^2} + 1$.
2. On admet que la fonction g' est continue et strictement croissante sur l'intervalle $[4; 10]$.
Montrer que l'équation $g'(t) = 0$ a une solution et une seule α dans l'intervalle $[4; 10]$. Donner la valeur arrondie au dixième de α .
3. (a) En déduire la signe de $g'(t)$ sur l'intervalle $[4; 10]$.
(b) Donner le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $[4; 10]$.
(c) Que peut-on supposer quant à l'effet du traitement sur la population d'insecte ?

27. Métropole 20 juin 2013 (5 points)

Dans cet exercice on étudie l'évolution de la dépense des ménages français en programmes audiovisuels (redevance audiovisuelle, billets de cinémas, vidéos, ...).

On note D_n la dépense des ménages en programmes audiovisuels, exprimée en milliards d'euros, au cours de l'année $1995 + n$.

année	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002
n	0	1	2	3	4	5	6	7
D_n	4,95	5,15	5,25	5,4	5,7	6,3	6,55	6,9

année	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
n	8	9	10	11	12	13	14	15
D_n	7,3	7,75	7,65	7,79	7,64	7,82	7,89	8,08

Soit f la fonction définie, pour tout nombre réel x , par

$$f(x) = -0,003 \, 2x^3 + 0,06x^2 + 5$$

Pour tout entier n vérifiant $0 \leq n \leq 20$, on décide de modéliser la dépense des ménages français en programmes audiovisuels exprimée en milliards d'euros, au cours de l'année $1995 + n$ par le nombre $f(n)$.

1. Calculer $f(5)$.
2. Déterminer le pourcentage p , de l'erreur commise en remplaçant D_5 par $f(5)$.
(Le pourcentage d'erreur est obtenu par le calcul : $p = \frac{\text{valeur réelle} - \text{valeur estimée}}{\text{valeur réelle}}$ et le résultat sera donné à 0,1 % près).
3. En utilisant la fonction f , quelle estimation de la dépense totale peut-on effectuer pour l'année 2013 ?
(On arrondira le résultat au centième de milliard d'euros).
4. On veut utiliser la fonction f pour estimer la dépense moyenne des ménages entre le 1^{er} janvier 1995 et le 1^{er} janvier 2015.

On calcule pour cela $M = \frac{1}{20} \int_0^{20} f(x) dx$.

- (a) Déterminer une primitive F de la fonction f sur l'intervalle $[0; 20]$.
- (b) Calculer M .

28. Métropole 20 juin 2013 (5 points)

Une entreprise fabrique des poulies utilisées dans l'industrie automobile. On suppose que toute la production est vendue.

L'entreprise peut fabriquer entre 0 et 3 600 poulies par semaine. On note x le nombre de milliers de poulies fabriquées et vendues en une semaine. (x varie donc dans l'intervalle $[0; 3,6]$).

Le bénéfice hebdomadaire est noté $B(x)$, il est exprimé en milliers d'euros.

L'objet de cet exercice est d'étudier cette fonction B . Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.

Partie A : étude graphique

On a représenté en annexe 2 la fonction B dans un repère du plan.

Chaque résultat sera donné à 100 poulies près ou à cent euros près suivant les cas.

Les traits utiles à la compréhension du raisonnement seront laissés sur le graphique et une réponse écrite sur la copie sera attendue pour chaque question posée.

1. Déterminer dans quel intervalle peut varier le nombre de poulies pour que le bénéfice soit supérieur ou égal à 13 000 €.
2. Quel est le bénéfice maximum envisageable pour l'entreprise ?
Pour quelle nombre N de poulies fabriquées et vendues semble-t-il être réalisé ?

Partie B : étude théorique

Le bénéfice hebdomadaire noté $B(x)$, exprimé en milliers d'euros vaut

$$B(x) = -5 + (4 - x) e^x$$

1. (a) On note B' la fonction dérivée de B .
Montrer que, pour tout réel x de l'intervalle $I = [3; 3,6]$, on a : $B'(x) = (3 - x) e^x$.
(b) Déterminer le signe de la dérivée B' sur l'intervalle I .
(c) Dresser le tableau de variation de la fonction B . On indiquera les valeurs de la fonction B aux bornes de l'intervalle.
2. (a) Justifier que l'équation $B(x) = 13$ admet deux solutions x_1 et x_2 , l'une dans l'intervalle $[0; 3]$ et l'autre dans l'intervalle $[3; 3,6]$.
(b) À l'aide de la calculatrice, déterminer une valeur approchée à 0,01 près de chacune des deux solutions.

Annexe à rendre avec la copie



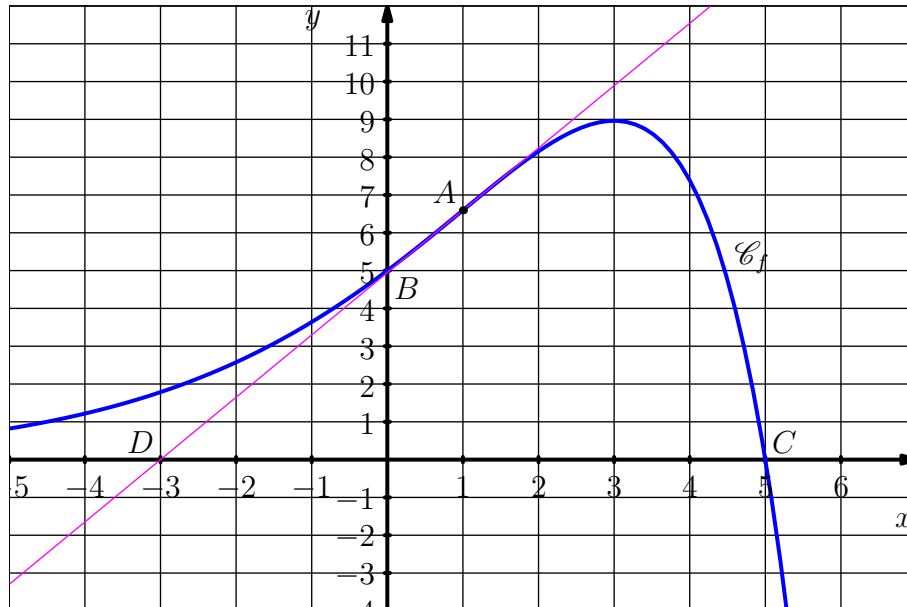
29. Asie 19 juin 2013 (5 points)

La courbe $\mathcal{C}_f$ ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction définie et deux fois dérivable sur l'ensemble des nombres réels.

Elle passe par les points $A(1; 4e^{0,5})$, $B(0; 5)$ et $C(5; 0)$.

Le point $D(-3; 0)$ appartient à la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point A .

On note f' la fonction dérivée de f sur $\mathbb{R}$.



Partie A - Lecture graphique

- Quel est le signe de $f'(1)$? Justifier.
- Que semble représenter le point A pour la courbe $\mathcal{C}_f$?
- (a) Préciser un domaine du plan dont l'aire est égale à $I = \int_0^3 f(x) dx$.
 (b) Recopier sur votre copie le seul encadrement qui convient parmi :
 $0 \leq I \leq 9$ $10 \leq I \leq 12$ $20 \leq I \leq 24$

Partie B - Par le calcul

On admet que pour tout réel x , $f(x) = (-x + 5)e^{0,5x}$ et $f'(x) = (1,5 - 0,5x)e^{0,5x}$.

On note f'' la fonction dérivée seconde de f sur $\mathbb{R}$.

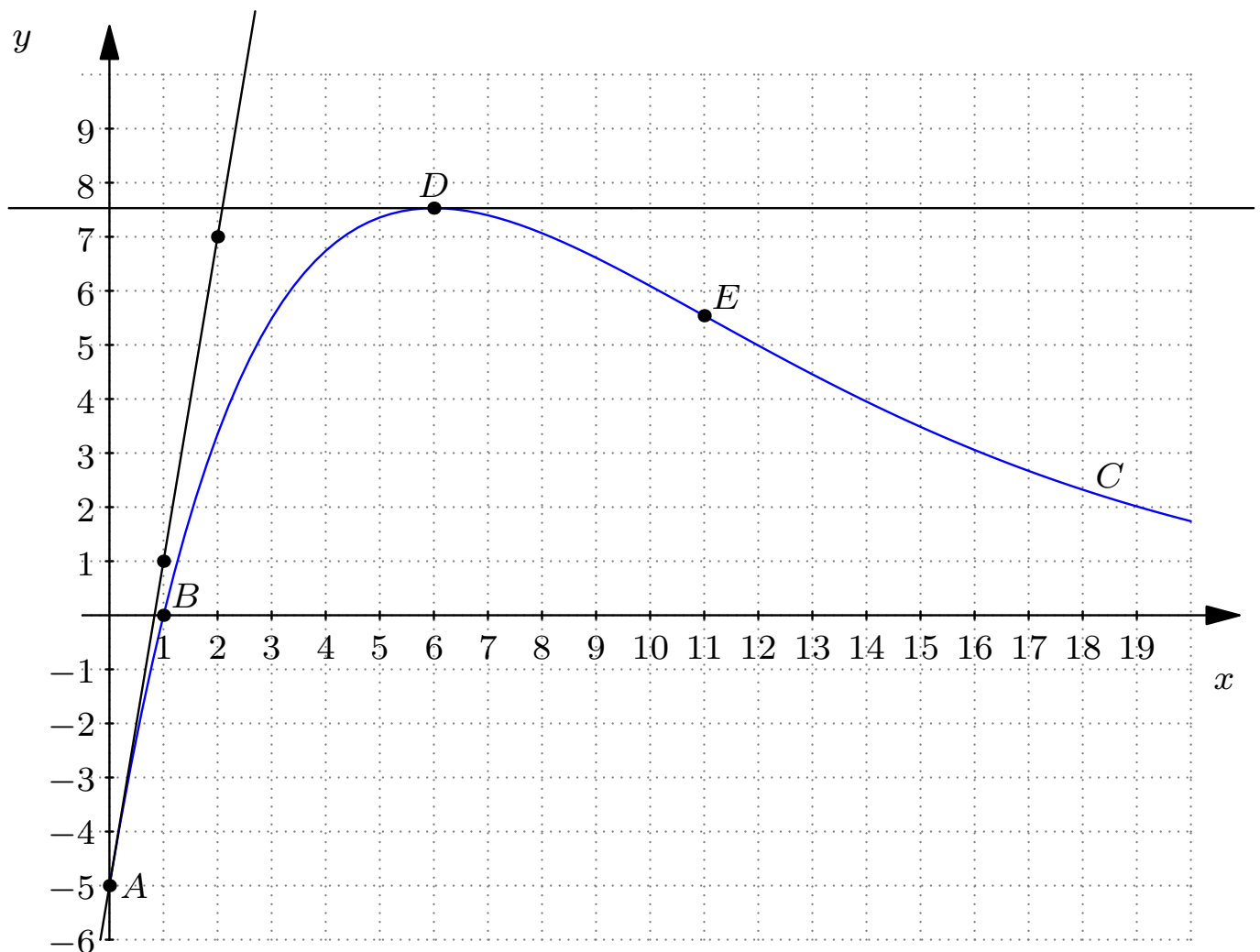
- (a) Vérifier que, pour tout réel x , $f''(x) = 0,25(-x + 1)e^{0,5x}$.
 (b) Résoudre l'équation $f''(x) = 0$. Montrer que le point A est un point d'inflexion de la courbe $\mathcal{C}_f$.
 (c) Sur quel intervalle la fonction f est-elle convexe ? Justifier.
- Soit F la fonction définie, pour tout réel x par $F(x) = (-2x + 14)e^{0,5x}$. On admet que f est une primitive de f' sur $\mathbb{R}$.
 Calculer $I = \int_0^3 f(x) dx$. On donnera la valeur exacte puis la valeur arrondie au centième.

30. Antilles Guyane 19 juin 2013 (6 points)

Partie A

On a représenté ci-dessous, dans le plan muni d'un repère orthonormal, la courbe représentative C d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0; 20]$. On a tracé les tangentes à la courbe C aux points A , D et E d'abscisses respectives 0 ; 6 et 11.

On note f' la fonction dérivée de la fonction f .



Par lecture graphique (aucune justification n'est demandée) :

1. Donner les valeurs exactes de $f(0)$, $f(1)$, $f'(0)$ et $f'(6)$.
2. Indiquer si la courbe C admet un point d'inflexion. Si oui, préciser ce point.
3. Déterminer un encadrement, d'amplitude 4, par deux nombres entiers de

$$I = \int_4^8 f(x) dx$$

4. Indiquer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 4$. Préciser un encadrement de la (ou des) solutions à l'unité.

Partie B

La fonction f est définie sur l'intervalle $[0; 20]$ par $f(x) = (5x - 5)e^{-0,2x}$.

1. Montrer que $f'(x) = (-x + 6)e^{-0,2x}$ où f' désigne la fonction dérivée de f sur l'intervalle $[0; 20]$.
2. (a) Étudier le signe de $f'(x)$ sur $[0; 20]$.
(b) Dresser le tableau de variations de f sur $[0; 20]$. On fera apparaître les valeurs exactes de $f(0)$ et $f(6)$.
3. Justifier que l'équation $f(x) = 4$ admet une unique solution α sur $[0; 6]$. Donner la valeur arrondie au millième de α .
4. (a) Montrer que la fonction F définie sur $[0; 20]$ par

$$F(x) = (-25x - 100)e^{-0,2x}$$

est une primitive de f sur $[0; 20]$.

- (b) Calculer la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[4; 8]$.
Donner sa valeur exacte.

Partie C

Une entreprise fabrique x centaines d'objets où x appartient à $[0; 20]$. La fonction f des parties **A** et **B** modélise le bénéfice de l'entreprise en milliers d'euros, en supposant que toute la production est vendue. Répondre aux questions suivantes en utilisant les résultats précédents, et en admettant que l'équation $f(x) = 4$ admet une autre solution β sur $[6; 20]$ dont la valeur arrondie au millième est 13,903.

1. Quelle doit être la production de l'entreprise pour réaliser un bénéfice d'au moins 4 000 € ?
2. L'entreprise pense produire régulièrement entre 400 et 800 objets. Déterminer alors la valeur moyenne du bénéfice. (On donnera le résultat arrondi à l'euro près)

31. Centres Étrangers groupe 1 12 juin 2013 (6 points)

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[2; 8]$ par :

$$f(x) = \frac{-x^2 + 10x - 16}{x^2}$$

On appelle (C) sa courbe représentative.

1. Montrer que pour tout réel de l'intervalle $[2; 8]$, on a :

$$f'(x) = \frac{-10x + 32}{x^3}$$

2. (a) Étudier le signe de $f'(x)$ sur $[2; 8]$.
(b) En déduire le tableau de variations de f sur l'intervalle $[2; 8]$.
3. On appelle f'' la dérivée seconde de f sur $[2; 8]$.

On admet que, pour tout réel x de l'intervalle $[2; 8]$, on a :

$$f''(x) = \frac{20x - 96}{x^4}$$

- (a) Montrer que f est une fonction convexe sur $[4,8; 8]$.
(b) Montrer que le point de (C) d'abscisse 4,8 est un point d'inflexion.
4. On considère la fonction F définie sur $[2; 8]$ par :

$$F(x) = -x + 10 \ln x + \frac{16}{x}$$

- (a) Montrer que F est une primitive de f sur $[2; 8]$.
(b) Calculer $I = \int_2^8 f(x) dx$.

32. Amérique du Nord 30 mai 2013 (6 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ dont la courbe représentative C_f est tracée ci-dessous dans un repère orthonormé.

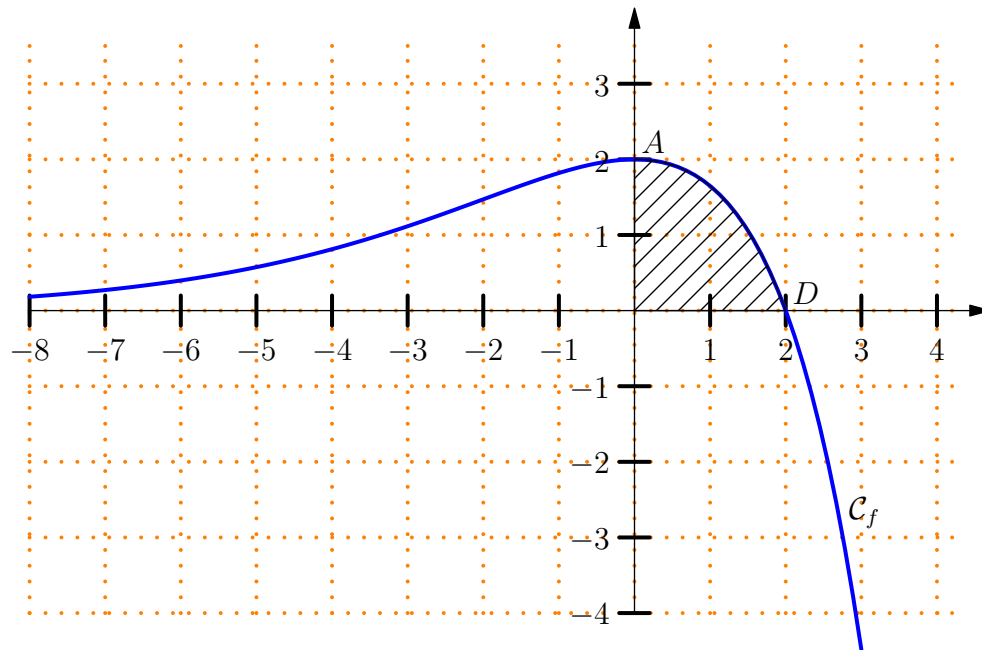


Figure 1

Partie A

On suppose que f est de la forme $f(x) = (b - x)e^{ax}$ où a et b désignent deux constantes.

On sait que :

- Les points $A(0 ; 2)$ et $D(2 ; 0)$ appartiennent à la courbe C_f .
- La tangente à la courbe C_f au point A est parallèle à l'axe des abscisses.

On note f' la fonction dérivée de f , définie sur $\mathbb{R}$.

1. Par lecture graphique, indiquer les valeurs de $f(2)$ et $f'(0)$.
2. Calculer $f'(x)$.
3. En utilisant les questions précédentes, montrer que a et b sont solutions du système suivant :

$$\begin{cases} b - 2 &= 0 \\ ab - 1 &= 0 \end{cases}$$

4. Calculer a et b et donner l'expression de $f(x)$.

Partie B

On admet que $f(x) = (-x + 2)e^{0,5x}$.

1. À l'aide de la figure 1, justifier que la valeur de l'intégrale $\int_0^2 f(x) dx$ est comprise entre 2 et 4.
2. (a) On considère F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = (-2x + 8)e^{0,5x}$.
Montrer que F est une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

(b) Calculer la valeur exacte de $\int_0^2 f(x) dx$ et en donner une valeur approchée à 10^{-2} près.

3. On considère G une autre primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Parmi les trois courbes C_1 , C_2 et C_3 ci-dessous, une seule est la représentation graphique de G . Déterminer la courbe qui convient et justifier la réponse.

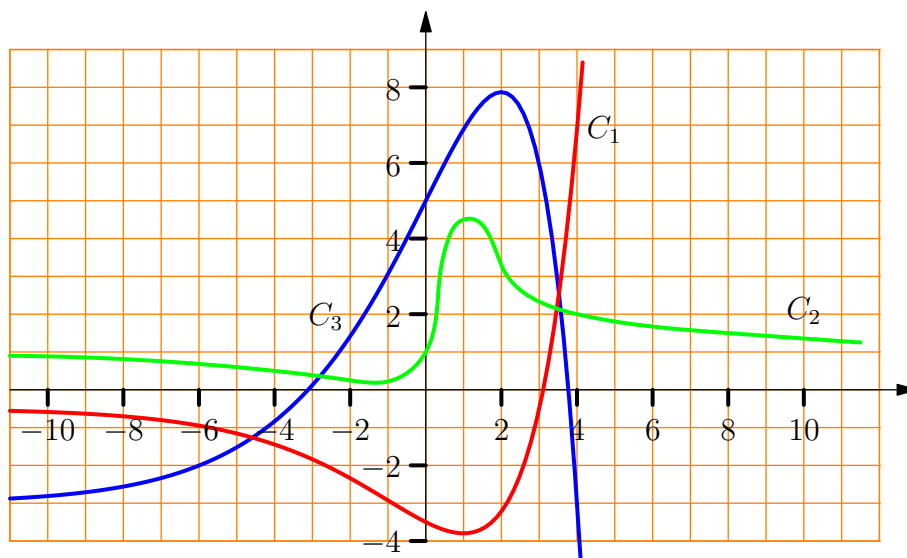


Figure 2

33. Liban 28 mai 2013 (5 points)**Partie A**

On considère la fonction C définie sur l'intervalle $[5 ; 60]$ par :

$$C(x) = \frac{e^{0,1x} + 20}{x}.$$

1. On désigne par C' la dérivée de la fonction C .

Montrer que, pour tout $x \in [5 ; 60]$, $C'(x) = \frac{0,1x e^{0,1x} - e^{0,1x} - 20}{x^2}$.

2. On considère la fonction f définie sur $[5 ; 60]$ par :

$$f(x) = 0,1x e^{0,1x} - e^{0,1x} - 20.$$

- (a) Montrer que la fonction f est strictement croissante sur $[5 ; 60]$.
 - (b) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ possède une unique solution α dans $[5 ; 60]$.
 - (c) Donner un encadrement à l'unité de α .
 - (d) En déduire le tableau de signes de $f(x)$ sur $[5 ; 60]$.
3. En déduire le tableau de variations de C sur $[5 ; 60]$.
4. En utilisant le tableau de variations précédent, déterminer le nombre de solutions des équations suivantes :
- (a) $C(x) = 2$.
 - (b) $C(x) = 5$.

Partie B

Une entreprise fabrique chaque mois x vélos de course, avec x appartenant à l'intervalle $[5 ; 60]$.

Le coût moyen de fabrication, exprimé en milliers d'euros, pour une production de x vélos de course, est donné par la fonction C définie dans la partie A.

Déterminer le nombre de vélos à produire pour que le coût de fabrication moyen soit minimal.

34. Pondichéry 15 avril 2013 (6 points)

La partie C peut être traitée indépendamment des parties A et B.

PARTIE A

On désigne par f la fonction définie sur l'intervalle $[0 ; 6]$ par

$$f(x) = 1 - (x + 1)e^{-x}.$$

1. Montrer que $f'(x) = xe^{-x}$ où f' désigne la fonction dérivée de la fonction f .
2. Démontrer que l'équation $f(x) = 0,5$ admet une solution unique α sur l'intervalle $[0 ; 6]$.
Déterminer une valeur arrondie de α à 0,01.
3. On admet que la fonction F définie sur $[0 ; 6]$ par $F(x) = x + (x + 2)e^{-x}$ est une primitive de f sur $[0 ; 6]$. Donner la valeur exacte puis une valeur arrondie à 10^{-3} de $I = \int_0^6 f(x) \, dx$.

PARTIE B

Une entreprise lance la production de batteries pour véhicules électriques.

Une étude a modélisé le rythme de la production journalière sur les six premiers mois à l'aide de la fonction f définie dans la partie A pour x compris entre 0 et 6.

x représente le nombre de mois (de 30 jours) depuis le lancement du produit.

$f(x)$ représente la production journalière de batteries en milliers.

1. Exprimer en mois puis en jours le moment où la production atteindra 0,5 millier soit 500 unités.
2. Déterminer une valeur arrondie à 10^{-3} de la valeur moyenne, exprimée en milliers, de la production sur les six premiers mois.

PARTIE C

Il est prévu que l'autonomie permise par ce type de batteries, sous certaines conditions de conduite, soit de 200 km.

Sur un parcours joignant une ville située à 160 km, on suppose que l'autonomie, exprimée en km, permise par ces batteries suit une loi normale d'espérance $\mu = 200$ et d'écart-type $\sigma = 40$.

1. Quelle est la probabilité, arrondie au centième, de ne pas atteindre cette ville ?
2. La probabilité de pouvoir faire l'aller-retour jusqu'à cette ville sans recharge des batteries est-elle supérieure à 0,01 ? Justifier votre réponse.

Table des matières

1. Métropole 20 juin 2014 (5 points)	3
2. Antilles — Guyane 19 juin 2014 (6 points)	5
3. Antilles — Guyane 19 juin 2014 (QCM 4 points)	6
4. Asie 19 juin 2014 (5 points)	7
5. Asie 19 juin 2014 (Vrai-Faux 4 points)	8
6. Polynésie 13 juin 2014 (5 points)	9
7. Polynésie 13 juin 2014 (5 points)	10
8. Centres Étrangers 12 juin 2014	12
9. Amérique du Nord 30 mai 2014 (5 points)	14
10. Amérique du Nord 30 mai 2014 (QCM 4 points)	16
11. Liban 27 mai 2014 (6 points)	17
12. Pondichéry 14 avril 2014 (6 points)	19
13. Pondichéry 14 avril 2014 (4 points)	21
14. Nouvelle-Calédonie 7 mars 2014 (4 points)	22
15. Nouvelle-Calédonie 7 mars 2014 (6 points)	23
16. Amérique du Sud 21 novembre 2013 (6 points)	24
17. Amérique du Sud 21 novembre 2013 (5 points)	25
18. Nouvelle-Calédonie 18 novembre 2013 (QCM 3 points)	26
19. Nouvelle-Calédonie 18 novembre 2013 (3 points)	27
20. Métropole Réunion 13 septembre 2013 (5 points)	28
21. Métropole Réunion 13 septembre 2013 (QCM 5 points)	29
22. Antilles Guyane 12 septembre 2013 (5 points)	30
23. Antilles Guyane 12 septembre 2013 (5 points)	31
24. Polynésie 4 septembre 2013 (5 points)	32
25. Polynésie 4 septembre 2013 (qcm - 4 points)	33
26. Métropole sujet dévoilé juin 2013 (6 points)	34
27. Métropole 20 juin 2013 (5 points)	35

28.Métropole 20 juin 2013 (5 points)	36
29.Asie 19 juin 2013 (5 points)	38
30.Antilles Guyane 19 juin 2013 (6 points)	39
31.Centres Étrangers groupe 1 12 juin 2013 (6 points)	41
32.Amérique du Nord 30 mai 2013 (6 points)	42
33.Libane 28 mai 2013 (5 points)	44
34.Pondichéry 15 avril 2013 (6 points)	45

Index

Algorithme, [23](#)

Calcul d'aire, [12](#), [16](#), [24](#), [26](#)

Calcul formel, [3](#), [24](#)

Convexité, [3](#), [8](#), [12](#), [21](#), [23](#), [24](#), [29](#), [31](#), [33](#), [38](#), [39](#), [41](#)

Échantillonnage, [22](#), [25](#)

Étude graphique, [3](#), [8–10](#), [14](#), [16](#), [17](#), [21](#)

Exponentielle, [3](#), [5](#), [12](#), [17](#), [21](#), [23](#), [24](#), [26](#), [28](#), [30](#), [34](#),
[36](#), [38](#), [40](#), [42](#), [44](#), [45](#)

Fonction homographique, [9](#)

Intégrale, [8](#), [13](#), [14](#), [19](#), [21](#), [24](#), [28](#), [29](#), [33](#), [34](#), [38](#), [39](#),
[41](#), [42](#)

Logarithme, [6–9](#), [14](#), [19](#), [21](#), [22](#), [26](#), [27](#), [31](#), [32](#)

Loi normale, [32](#), [45](#)

Loi uniforme, [22](#)

Nombre dérivé, [8](#), [16](#), [21](#)

Polynômes, [5](#), [25](#), [35](#)

Pourcentages, [25](#), [32](#), [35](#)

Primitive, [6](#), [7](#), [9](#), [14](#), [22](#), [24](#), [26](#), [28](#), [31](#), [34](#), [40–42](#), [45](#)

Suites numériques, [6](#)

TVI, [3](#), [7](#), [23](#), [24](#), [27](#), [28](#), [30](#), [34](#), [36](#), [44](#)

Valeur moyenne, [5](#), [7](#), [9](#), [19](#), [28](#), [29](#), [34](#), [35](#), [40](#), [45](#)