APMEP

Baccalauréat ES — Suites numériques

Tapuscript : B. Colombel

dernière mise à jour : 21 décembre 2014

Code source, remarques, erreurs : maurice72 at ymail.com

N°	Lieu et date	Suites géométriques	Suites arithmético-géométriques	Algorithmes
1	Métropole 20 juin 2014		×	×
2	Antilles — Guyane 19 juin 2014		×	×
3	Asie 19 juin 2014	×		×
4	Polynésie 13 juin 2014		×	×
5	Centres Étrangers 12 juin 2014		×	×
6	Amérique du Nord 30 mai 2014		×	×
7	Liban 27 mai 2014		×	×
8	Pondichéry 7 avril 2014		×	×

Session 2013

N°	Lieu et date	Suites géométriques	Suites arithmético-géométriques	Algorithmes
9	Nouvelle-Calédonie 7 mars 2014		×	
10	Amérique du Sud 21 novembre 2013		×	×
11	Nouvelle-Calédonie 18 novembre 2013		×	×
12	Métropole Réunion 13 septembre 2013		×	×
13	Antilles Guyane 12 septembre 2013		×	×
14	Polynésie 4 septembre 2013	×	×	×
15	Métropole sujet dévoilé juin 2013	×		×
16	Asie 19 juin 2013	×		×
17	Centres Étrangers 12 juin 2013		×	×
18	Polynésie 7 juin 2013	×		×
19	Amérique du Nord 30 mai 2013		×	×
20	Liban 28 mai 2013		×	×
21	Pondichery 15 avril 2013	×		×

1. Métropole 20 juin 2014 (5 points)

À l'automne 2010, Claude achète une maison à la campagne ; il dispose d'un terrain de 1 500 m^2 entièrement engazonné. Mais tous les ans, 20 % de la surface engazonnée est détruite et remplacée par de la mousse. Claude arrache alors, à chaque automne, la mousse sur une surface de 50 m^2 et la remplace par du gazon. Pour tout nombre entier naturel n, on note u_n la surface en m^2 de terrain engazonné au bout de n années, c'est-à-dire à l'automne $2010 + n$. On a donc $u_0 = 1\ 500$.

1. Calculer u_1.
2. Justifier que, pour entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}8\,u_n + 50$.
3. On considère la suite (v_n) définie pour tout nombre entier naturel n par : $v_n = u_n - 250$.
   (a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique. Préciser son premier terme et sa raison.
   (b) Exprimer v_n en fonction de n.
   En déduire que pour tout entier naturel n, $u_n = 250 + 1\ 250 \times 0{,}8^n$.
   (c) Quelle est la surface de terrain engazonné au bout de 4 années ?
4. (a) Déterminer par le calcul la plus petite valeur de l'entier naturel n telle que :

$$250 + 1\ 250 \times 0{,}8^n < 500$$

   Interpréter le résultat obtenu.
   (b) Compléter l'algorithme fourni en annexe pour qu'il affiche la solution obtenue à la question précédente.
5. Claude est certain que les mauvaises herbes ne peuvent envahir la totalité de son terrain.
   A-t-il raison ? Justifier la réponse.

Annexe

Initialisation	u prend la valeur 1 500 n prend la valeur 0

Traitement	Tant que .... faire
	    u prend la valeur ......
	    n prend la valeur ......
	Fin Tant que

Sortie	Afficher n

2. Antilles – Guyane 19 juin 2014 (5 points)

Un opérateur de téléphonie mobile constate que, chaque année, il perd 8 % de ses précédent abonnés et que, par ailleurs, il gagne 3 millions de nouveaux abonnés.
En 2013 le nombre d'abonnés est de 20 millions.
On s'intéresse au nombre d'abonnés, en millions, pour l'année $2013+n$. En supposant que cette évolution se poursuit de la même façon, la situation peut être modélisée par la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n, par :

$$\begin{cases} u_0 = & 20 \\ u_{n+1} = & 0{,}92\,u_n + 3 \end{cases}$$

Le terme u_n donne une estimation du nombre d'abonnés pour l'année $2013 + n$.

Partie A

1. (a) En utilisant cette modélisation, l'opérateur décide d'arrondir les résultats à 10^{-3}.
   À quoi correspond ce choix d'arrondi ?
   (b) Déterminer le nombre d'abonnés en 2014 et en 2015.

On définit la suite (v_n) par $v_n = u_n - 37{,}5$ pour tout entier naturel n.

2. Démontrer que (v_n) est une suite géométrique de raison 0,92. Préciser son premier terme.
3. Exprimer v_n en fonction de n.
   En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = -17{,}5 \times 0{,}92^n + 37{,}5$.
4. Déterminer le nombre d'abonnés en millions en 2020. Arrondir les résultats à 10^{-3}.
5. Déterminer la limite de la suite (u_n).
6. L'opérateur peut-il espérer dépasser 30 millions d'abonnés ?

Partie B

Compte tenu des investissements, l'opérateur considère qu'il réalisera des bénéfices lorsque le nombre d'abonnés dépassera 25 millions.

1. Recopier et compléter l'algorithme suivant afin de déterminer le nombre d'années nécessaires à partir de 2013 pour que l'opérateur fasse des bénéfices.

Variables :	N un nombre entier naturel non nul
	U un nombre réel
Traitement :	Affecter à U la valeur 20
	Affecter à N la valeur 0
	Tant que $\cdots$
	Affecter à U la valeur $0{,}92 \times U + 3$
	Affecter à N la valeur $N + 1$
	Fin Tant que
Sortie :	Afficher $\cdots$

2. En quelle année l'opérateur fera-t-il des bénéfices pour la première fois ?

3. Asie 19 juin 2014 (6 points)

On étudie l'évolution de la population d'une ville, depuis le 1^er^ janvier 2008.

Partie A : un premier modèle

Pour cette partie, on admet que la population augmente de 3,5 % par an depuis le 1^er^ janvier 2008.

1. Déterminer le pourcentage d'augmentation de la population entre le 1^er^ janvier 2008 et le 1^er^ janvier 2014. Donner une réponse à 0,1 % près.
2. À partir de 2008, on modélise la population de cette ville au 1^er^ janvier à l'aide d'une suite :
   Pour tout entier naturel n, on note u_n le nombre d'habitants, exprimé en centaines de milliers d'habitants, au 1^er^ janvier de l'année $2008 + n$.
   Au 1^er^ janvier 2008, cette ville comptait 100 000 habitants.
   (a) Que vaut u_0 ?
   (b) Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_n = 1{,}035^n$.
   (c) Suivant ce modèle, en quelle année la population aura-t-elle doublé ? Justifier la réponse.

Partie B : un second modèle

On modélise la population de cette ville à partir du 1^er^ janvier 2008 par la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{3}{1 + 2\,\mathrm{e}^{-0{,}05x}}$$

où x désigne le nombre d'années écoulées depuis le 1^er^ janvier 2008 et $f(x)$ le nombre d'habitants en centaines de milliers.
On admet que f est croissante sur $[0;+\infty[$.

On considère l'algorithme suivant :

Initialisation :	X prend la valeur 0
Traitement :	Tant que $f(X) \leqslant 2$
	X prend la valeur $X + 1$
	Fin TANT que
Sortie :	Afficher X

Si l'on fait fonctionner cet algorithme, alors le résultat affiché en sortie est 28. Interpréter ce résultat dans le contexte de ce problème.

4. Polynésie 13 juin 2014 (5 points)

La suite (u_n) est définie pour tout nombre entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_0 &= 5 \\ u_{n+1} &= \frac{1}{2}u_n + 1 \end{cases}$$

Partie A

1. On souhaite écrire un algorithme affichant, pour un entier naturel n non nul donné, tous les termes de la suite, du rang 0 au rang n.

   Parmi les trois algorithmes suivants, un seul convient.

   Indiquer lequel et justifier pourquoi les deux autres ne peuvent donner le résultat attendu.

Algorithme 1

Variables :
U est un nombre réel
i et N sont des nombres entiers
début
  Saisir une valeur pour N ;
  U prend la valeur 5 ;
  pour *i de 0 à N* **faire**
    Affecter à U la valeur $\frac{1}{2} \times U + 1$;
  fin
  Afficher U ;
fin

Algorithme 2

Variables :
U est un nombre réel
i et N sont des nombres entiers
début
  Saisir une valeur pour N ;
  pour *i de 0 à N* **faire**
    U prend la valeur 5 ;
    Afficher U ;
    Affecter à U la valeur $\frac{1}{2} \times U + 1$;
  fin
fin

Algorithme 3

Variables :
U est un nombre réel
i et N sont des nombres entiers
début
  Saisir une valeur pour N ;
  U prend la valeur 5 ;
  pour *i de 0 à N* **faire**
    Afficher U ;
    Affecter à U la valeur $\frac{1}{2} \times U + 1$;
  fin
fin

2. On saisit la valeur 9 pour N, l'affichage est le suivant :

5	3,5	2,75	2,375	2,185	2,093 8	2,049 6	2,023 4	2,011 7	2,005 9

   Quelle conjecture peut-on émettre sur le sens de variation de cette suite ?

Partie B

On introduit une suite auxiliaire (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = u_n - 2$.

1. Montrer que (v_n) est une suite géométrique. Préciser sa raison q et son premier terme v_0.
2. Montrer que, pour tout nombre entier naturel n, on a $u_n = 2 + 3\left(\frac{1}{2}\right)^n$.
3. Étudier les variations de la suite (u_n).
4. Déterminer la limite de la suite (u_n).
5. À partir de quel rang a-t-on : $u_n - 2 \leqslant 10^{-6}$?

5. Centres Étrangers 12 juin 2014 (5 points)

Dans une ville, un nouveau lycée vient d'ouvrir ses portes et accueille pour sa première rentrée 500 élèves. D'une année sur l'autre, le proviseur du lycée prévoit une perte de 30 % de l'effectif et l'arrivée de 300 nouveaux élèves.
On modélise cette situation par une suite numérique (u_n) où u_n représente le nombre d'élèves inscrits au lycée pour l'année $2013 + n$, avec n entier naturel. On a donc $u_0 = 500$.

1. (a) Calculer le nombre d'élèves qui seront inscrits au lycée en 2014.
   (b) Calculer Je nombre d'élèves qui seront inscrits au lycée en 2015.
2. Justifier que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} = 0{,}7u_n + 300$.
3. On souhaite, pour un entier n donné, afficher tous les termes de la suite (u_n) du rang 0 au rang n.
   Lequel des trois algorithmes suivants permet d'obtenir le résultat souhaité ? Justifier.

Algorithme 1	Algorithme 2	Algorithme 3
Variables : n,i entiers naturels, u nombre réel **Début algorithme** Lire n u prend la valeur 500 Pour i allant de 1 à n Afficher u u prend la valeur $0{,}7 \times u + 300$ Fin Pour **Fin algorithme**	**Variables :** n,i entiers naturels, u nombre réel **Début algorithme** Lire n u prend la valeur 500 Pour i allant de 1 à n Afficher u u prend la valeur $0{,}7 \times u + 300$ Fin Pour Afficher u **Fin algorithme**	**Variables :** n,i entiers naturels, u nombre réel **Début algorithme** Lire n u prend la valeur 500 Pour i allant de 1 à n u prend la valeur $0{,}7 \times u + 300$ Fin Pour Afficher u **Fin algorithme**

4. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par : $v_n = u_n - 1\,000$.
   (a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 0{,}7$.
   (b) En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = 1\,000 - 500 \times 0{,}7^n$.
   (c) Déterminer la limite de la suite (u_n).
   (d) Interpréter le résultat précédent.
5. (a) Résoudre dans l'ensemble des entiers naturels l'inéquation $u_n \geqslant 990$.
   (b) Interpréter le résultat trouvé précédemment.

6. Amérique du Nord 30 mai 2014 (5 points)

Afin d'entretenir une forêt vieillissante, un organisme régional d'entretien des forêts décide d'abattre chaque année 5 % des arbres existants et de replanter 3 000 arbres.
Le nombre d'arbres de cette forêt est modélisé par une suite notée u où u_n désigne le nombre d'arbres au cours de l'année $(2013 + n)$.
En 2013, la forêt compte 50 000 arbres.

1. (a) Déterminer le nombre d'arbres de la forêt en 2014.
   (b) Montrer que la suite u est définie par $u_0 = 50\ 000$ et pour tout entier naturel n par la relation

$$u_{n+1} = 0{,}95u_n + 3\ 000$$

2. On considère la suite v définie pour tout entier naturel n par $v_n = 60\ 000 - u_n$.
   (a) Montrer que la suite v est géométrique de raison 0,95.
   Déterminer son premier terme.
   (b) Exprimer v_n en fonction de n.
   (c) En déduire que pôur tout entier naturel n, $u_n = 10\ 000(6 - 0{,}95^n)$.
   (d) Déterminer la limite de la suite u.
   (e) Interpréter le résultat précédent.
3. (a) Résoudre dans l'ensemble des entiers naturels l'inéquation $u_n \geqslant 57\ 000$.
   (b) Interpréter ce résultat.
4. (a) On souhaite écrire un algorithme affichant pour un entier naturel n donné, tous les termes de la suite du rang 0 au rang n. Parmi les trois algorithmes suivants, un seul convient. Préciser lequel.

Algorithme 1	Algorithme 2	Algorithme 3
Variables :	**Variables :**	**Variables :**
A, U, N sont des nombres	U, I, N sont des nombres	U, I, N sont des nombres
Début de l'algorithme :	**Début de l'algorithme :**	**Début de l'algorithme :**
Saisir la valeur de A	Saisir la valeur de N	Saisir la valeur de N
N prend la valeur 0	U prend la valeur 50 000	U prend la valeur 50 000
U prend la valeur 50 000	**Pour** I variant de 1 à N	**Pour** I variant de 1 à N
Tant que $U < A$	U prend la valeur $0{,}95U + 3\ 000$	Afficher U
N prend la valeur $N + 1$	**Fin Pour**	U prend la valeur $0{,}95U + 3\ 000$
U prend la valeur $0{,}95U + 3\ 000$	Afficher U	**Fin Pour**
Fin tant que		Afficher U
Afficher N		
Fin algorithme	**Fin algorithme**	**Fin algorithme**

   (b) Lorsque $A = 57\ 000$ l'algorithme 1 affiche 24. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'énoncé.

7. Liban 27 mai 2014 (5 points)

La médiathèque d'une petite ville a ouvert ses portes le 2 janvier 2013 et a enregistré 2 500 inscriptions en 2013.
Elle estime que, chaque année, 80 % des anciens inscrits renouvelleront leur inscription l'année suivante et qu'il y aura 400 nouveaux adhérents.
On modélise cette situation par une suite numérique (a_n).
On note $a_0 = 2\ 500$ le nombre d'inscrits à la médiathèque en 2013 et a_n représente le nombre d'inscrits à la médiathèque pendant l'année $2013 + n$.

1. (a) Calculer a_0 et a_1.
   (b) Justifier que, pour tout entier naturel n, an a la relation $a_{n+1} = 0{,}8 \times a_n + 400$.
2. On pose, pour tout entier naturel n, $v_n = a_n - 2\ 000$.
   (a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de premier terme $u_0 = 500$ et de raison $q = 0{,}8$.
   (b) En déduire que le terme général de la suite (a_n) est $a_n = 500 \times 0{,}8^n + 2\ 000$.
   (c) Calculer la limite de la suite (a_n).
   (d) Que peut-on en déduire pour la nombre d'adhérents à la médiatèque si le schéma d'inscription reste le même au cours des années à venir ?
3. On propose l'algorithme suivant :

Variables :	N entier
	A réel
Initialisation :	N prend la valeur 0
	A prend la valeur 2 500
Traitement :	Tant que $A - 2\ 000 > 50$
	A prend la valeur $A \times 0{,}8 + 400$
	N prend la valeur $n + 1$
	Fin du Tant que
Sortie :	Affciher N

   (a) Expliquer ce que permet de calculer cet algorithme.
   (b) À l'aide de la calculatrice, déterminer le résultat obtenu grâce à cet algorithme et interpréter la réponse dans le contexte de l'exercice.

8. Pondichéry 7 avril 2014 (5 points)

Une association décide d'ouvrir un centre de soin pour les oiseaux sauvages victimes de la pollution.
Leur but est de soigner puis relâcher ces oiseaux une fois guéris.
Le centre ouvre ses portes le 1er janvier 2013 avec 115 oiseaux.
Les spécialistes prévoient que 40 % des oiseaux présents dans le centre au 1er janvier d'une année restent présents le 1er janvier suivant et que 120 oiseaux nouveaux sont accueillis dans le centre chaque année.
On s'intéresse au nombre d'oiseaux présents dans le centre au 1er janvier des années suivantes.
La situation peut être modélisée par une suite (u_n) admettant pour premier terme $u_0 = 115$, le terme u_n donnant une estimation du nombre d'oiseaux l'année $2013 + n$.

1. Calculer u_1 et u_2. Avec quelles précision convient-il de donner ces résultats ?
2. Les spécialistes déterminent le nombre d'oiseaux présents dans le centre au 1er janvier de chaque année à l'aide d'un algorithme.
   (a) Parmi les trois algorithmes proposés ci-dessous, seul l'algorithme 3 permet d'estimer le nombre d'oiseaux présents au 1er janvier de l'année $2013 + n$.
   Expliquer pourquoi les deux premiers algorithmes ne donnent pas le résultat attendu.

Algorithme 1

```
Variables : U est un nombre réel
            i et N sont des nombres entiers
début
    Saisir une valeur pour N ;
    Affecter 115 à U ;
    pour i de 1 à N faire
        Affecter 0,6 × U + 120 à U
    fin
    Afficher U ;
fin
```

Algorithme 2

```
Variables : U est un nombre réel
            i et N sont des nombres entiers
début
    Saisir une valeur pour N ;
    pour i de 1 à N faire
        Affecter 115 à U ;
        Affecter 0,4 × U + 115 à U
    fin
    Afficher U ;
fin
```

Algorithme 3

```
Variables : U est un nombre réel
            i et N sont des nombres entiers
début
    Saisir une valeur pour N ;
    Affecter 115 à U ;
    pour i de 1 à N faire
        Affecter 0,4 × U + 120 à U
    fin
    Afficher U ;
fin
```

   (b) Donner, pour tout entier naturel n, l'expression de u_{n+1} en fonction de u_n.
3. On considère la suite v_n définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 200$.
   (a) Montrer que v_n est une suite géométrique de raison 0,4. Préciser v_0.
   (b) Exprimer, pour tout entier naturel n, v_n en fonction de n.
   (c) En déduire que pour tout entier naturel n, $u_n = 200 - 85 \times 0{,}4^n$.
   (d) La capacité d'accueil du centre est de 200 oiseaux. Est-ce suffisant ? Justifier la réponse.
4. Chaque année, le centre touche une subvention de 20 euros par oiseau présent au 1er janvier.
   Calculer le montant total des subventions perçues par le centre entre le 1er janvier 2013 et le 31 décembre 2018 si l'on suppose que l'évolution du nombre d'oiseaux se poursuit selon les mêmes modalités durant cette période.

9. Nouvelle-Calédonie 7 mars 2014 (5 points)

On a observé l'évolution des inscriptions dans le club de gymnastique d'une ville.

Chaque année, 30 % des personnes inscrites au club de gymnastique l'année précédente renouvellent leur inscription au club.
De plus, chaque année, 10 % des habitants de la ville qui n'étaient pas inscrits au club l'année précédente s'y inscrivent.
On appelle n le nombre d'années d'existence du club.
On note g_n la proportion de la population de la ville inscrite au club de gymnastique lors de l'année n et p_n la proportion de la population qui n'est pas inscrite.

La première année de fonctionnement du club (année « zéro »), 20 % des habitants de la ville se sont inscrits. On a donc $g_0 = 0{,}2$.

1. Soit n un entier naturel. Que vaut la somme $g_n + p_n$?
2. (a) Justifier que, pour tout entier naturel n, $g_{n+1} = 0{,}3g_n + 0{,}1p_n$.
   (b) En déduire que, pour tout entier naturel n, $g_{n+1} = 0{,}2g_n + 0{,}1$.
3. Pour tout entier naturel, on pose $u_n = g_n - 0{,}125$.
   Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
4. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).
5. Montrer que, pour tout entier n, $g_n = 0{,}125 + 0{,}075 \times 0{,}2^n$.
   Comment la proportion de la ville inscrite au club de gymnastique évolue-t-elle au cours des années ?

10. Amérique du Sud 21 novembre 2013

Dans un pays, suite à une élection, un institut de sondage publie chaque mois la cote de popularité du président (c'est-à-dire le pourcentage de personnes ayant une opinion favorable à l'action qu'il mène). Ce sondage résulte d'une enquête réalisée auprès d'un échantillon de la population du pays.

Les enquêtes réalisées révèlent que d'un mois à l'autre :

- 6 % des personnes qui étaient favorables ne le sont plus ;
- 4 % des personnes qui n'étaient pas favorables le deviennent.

On interroge au hasard une personne dans la population du pays et on note :

- F_0 l'événement « la personne interrogée a une opinion favorable dès l'élection du président » de probabilité p_0 et $\overline{F_0}$ son événement contraire ;
- F_1 l'événement « la personne interrogée la 1^er^ mois a une opinion favorable » de probabilité p_1 et $\overline{F_1}$ son événement contraire.

1. (a) Recopier et compléter l'arbre pondéré suivant :

   (b) Montrer que $p_1 = 0{,}9\,p_0 + 0{,}04$.

Pour la suite de l'exercice, on donne $p_0 = 0{,}55$ et on note, pour tout entier naturel n, F_n l'évènement « la personne interrogée le n-ième mois a une opinion favorable » et p_n sa probabilité.
On admet de plus, que pour tout entier naturel n, $p_{n+1} = 0{,}9\,p_n + 0{,}04$.

2. On considère l'algorithme suivant :

Variables :	
	I et N sont des entiers naturels
	P est un nombre réel
Entrée :	
	Saisir N
Initialisation :	
	P prend la valeur 0,55
Traitement :	
	Pour I allant de 1 à N
	P prend la valeur $0{,}9P + 0{,}04$
	Fin Pour
Sortie :	
	Afficher P

   (a) Écrire ce qu'affiche cet algorithme lorsque l'utilisateur entre la valeur $N = 1$.

   (b) Donner le rôle de cet algorithme.

3. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel par : $u_n = p_n - 0{,}4$.

   (a) Démontrer que (u_n) est une suite géométrique de raison 0,9 et préciser la valeur de son premier terme u_0.

   (b) En déduire l'expression de u_n en fonction de n puis de p_n en fonction de n.

   (c) Déterminer la limite de la suite (p_n) et interpréter le résultat.

4. Résoudre dans l'ensemble des entiers naturels l'inéquation $0{,}15 \times 0{,}9^n + 0{,}4 \leqslant 0{,}45$.

5. Interpréter le résultat trouvé.

11. Nouvelle-Calédonie 18 novembre 2013 (5 points)

Le premier janvier 2014, Monica ouvre un livret d'épargne sur lequel elle dépose 6 000 euros.
Elle décide de verser 900 euros sur ce livret chaque premier janvier à partir de 2015 jusqu'à atteindre le plafond autorisé de 19 125 euros.
On suppose dans tout cet exercice que le taux de rémunération du livret reste fixé à 2,25 % par an et que les intérêts sont versés sur le livret le premier janvier de chaque année.

Première partie

1. Calculer le montant des intérêts pour l'année 2014 et montrer que Monica disposera d'un montant de 7 035 euros sur son livret le premier janvier 2015.
2. On note M_n le montant en euros disponible sur le livret le premier janvier de l'année $2014 + n$.
   On a donc $M_0 = 6000$ et $M_1 = 7035$.
   Montrer que pour tout entier naturel n : $M_{n+1} = 1{,}0225M_n + 900$.

Deuxième partie

Monica souhaite savoir en quelle année le montant de son livret atteindra le plafond de 19 125 euros.

1. Première méthode :
   On considère la suite (G_n) définie, pour tout entier naturel n, par $G_n = M_n + 40\ 000$.
   (a) Montrer que la suite (G_n) est une suite géométrique de raison 1,022 5. On précisera le premier terme.
   (b) Donner l'expression de G_n en fonction de n.
   En déduire que, pour tout entier naturel n, $M_n = 46\ 000 \times 1{,}022\ 5^n - 40\ 000$.
   (c) Déduire de l'expression de M_n obtenue en b. l'année à partir de laquelle le plafond de 19 125 euros sera atteint.
2. Deuxième méthode :
   L'algorithme ci-dessous permet de déterminer l'année à partir de laquelle le plafond sera atteint.

LIGNE		
1	**Variables :**	MONTANT est un réel
2		ANNÉE est un entier
3		
4	**Initialisation :**	Affecter à MONTANT la valeur 6 000
5		Affecter à ANNÉE la valeur 2014
6		
7	**Traitement :**	Tant que MONTANT < 19 125
8		Affecter à MONTANT la valeur 1,022 5 × MONTANT + 900
9		Affecter à ANNÉE la valeur ANNÉE + 1
10		
11	**Sortie :**	Afficher « le plafond du livret sera atteint en ... »
12		Afficher ANNÉE

   (a) Il suffit de modifier deux lignes de cet algorithme pour qu'il détermine l'année à partir de laquelle le plafond est atteint pour un montant versé initialement de 5 000 euros et des versements annuels de 1 000 euros.
   Indiquez sur votre copie les numéros des lignes et les modifications proposées.
   (b) Proposez une modification de la boucle conditionnelle pour que l'algorithme affiche également à l'écran le montant disponible au premier janvier de chaque année.

12. Métropole Réunion 13 septembre 2013 (5 points)

Le responsable du foyer des jeunes d'un village a décidé d'organiser une brocante annuelle. Pour la première brocante, en 2012, il a recueilli 110 inscriptions.
D'après les renseignements pris auprès d'autres organisateurs dans les villages voisins, il estime que d'une année sur l'autre, 90 % des exposants se réinscriront et que 30 nouvelles demandes seront déposées.
On désigne par u_n le nombre d'exposants en $(2012+n)$ avec n un entier naturel.
Ainsi u_0 est le nombre d'exposants en 2012, soit $u_0 = 110$.

1. Quel est le nombre d'exposants attendu pour 2013 ?
2. Justifier que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}9u_n + 30$.
3. Vu la configuration actuelle de la manifestation dans le village, le nombre d'exposants ne peut pas excéder 220.

   Recopier et compléter l'algorithme proposé ci-dessous afin qu'il permette de déterminer l'année à partir de laquelle l'organisateur ne pourra pas accepter toutes les demandes d'inscription.

Variables	u est un nombre n est un nombre entier naturel
Initialisation	Affecter à u la valeur ... Affecter à n la valeur 2012

Traitement	Tant que ...
	    Affecter à u la valeur ...
	    Affecter à n la valeur $n+1$

Sortie	Afficher ...

4. Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = u_n - 300$.
   (a) Démontrer que (v_n) est une suite géométrique de raison 0,9.
   (b) En déduire que pour tout entier naturel n, $u_n = -190 \times 0{,}9^n + 300$.
   (c) Déterminer le résultat recherché par l'algorithme de la question 3 en résolvant une inéquation.
5. L'organisateur décide d'effectuer une démarche auprès de la mairie pour obtenir assez de place pour ne jamais refuser d'inscriptions. Il affirme au maire qu'il suffit de lui autoriser 300 emplacements. A-t-il raison de proposer ce nombre ? Pourquoi ?

13. Antilles Guyane 12 septembre 2013 (5 points)

En 2005, année de sa création, un club de randonnée pédestre comportait 80 adhérents. Chacune des années suivantes on a constaté que :

— 10 % des participants ne renouvelaient pas leur adhésion au club ;
— 20 nouvelles personnes s'inscrivaient au club.

On suppose que cette évolution reste la même au fil des ans.

Partie A

On donne l'algorithme suivant :

Entrée :	Saisir n entier positif
Traitement :	X prend la valeur 80 (initialisation) Pour i allant de 1 à n Affecter à X la valeur $0{,}9X + 20$ Fin Pour X prend la valeur de X arrondie à l'entier inférieur
Sortie :	Afficher X

1. Pour la valeur $n = 2$ saisie, quelle est la valeur affichée à la sortie de cet algorithme ?
2. Interpréter dans le contexte du club de randonnée, pour la valeur $n = 2$ saisie, le nombre affiché à la sortie de cet algorithme.

Partie B

1. On considère la suite (a_n) définie par $a_0 = 80$ et, pour entier naturel n, $a_{n+1} = 0{,}9a_n + 20$. Pour tout entier naturel n, on pose : $b_n = a_n - 200$.
   (a) Démontrer que (b_n) est une suite géométrique : préciser sa raison et son premier terme.
   (b) Exprimer b_n en fonction de n.
2. En déduire que, pour tout entier naturel n, on a : $a_n = 200 - 120 \times 0{,}9^n$.
3. Quelle est la limite de la suite (a_n) ?

Partie C

1. L'objectif du président du club est d'atteindre au moins 180 adhérents. Cet objectif est-il réalisable ?
2. Même question si l'objectif du président du club est d'atteindre au moins 300 adhérents.

14. Polynésie 4 septembre 2013 (6 points)

La population de l'Allemagne (nombre de personnes résidant sur le territoire allemand) s'élevait à 81 751 602 habitants au premier janvier 2011.
De plus, on sait qu'en 2011, le nombre de naissances en Allemagne ne compense pas le nombre de décès, et sans tenir compte des flux migratoires on estime le taux d'évolution de la population allemande à $-0,22$ %.
On admet que cette évolution reste constante les années suivantes.
Les résultats seront arrondis à l'unité

Partie A

On propose l'algorithme suivant :

Entrée :	Saisir le nombre entier naturel non nul S.

Traitement :	Affecter à U la valeur 81 751 602 {initialisation}
	Affecter à N la valeur 0 {initialisation}
	Tant que U > S
	    Affecter à U la valeur 0,997 8× U
	    Affecter à N la valeur N +1
	Fin tant que

Sortie :	Afficher N

On saisit en entrée le nombre S = 81 200 000. Recopier et compléter le tableau suivant autant que nécessaire en arrondissant les résultats à l'unité. Quel nombre obtient-on en sortie ?

U	81 751 602	81 571 748	...	
N	0		...	
Test U > S	Vrai		...	

Partie B

On note u_n l'effectif de la population de l'Allemagne au premier janvier $2011 + n$.

1. Déterminer u_0 et u_1.
2. (a) Justifier que la suite (u_n) est une suite géométrique, de 1[er] terme 81 751 602 et de raison 0,997 8.
   (b) Exprimer u_n en fonction de n.
3. Si cette évolution de $-0,22$ % se confirme :
   (a) Quel serait l'effectif de la population de l'Allemagne au premier janvier 2035 ?
   (b) En quelle année la population passera-telle au-dessous du seuil de 81 200 000 habitants ?

Partie C

Dans cette partie, on tient compte des flux migratoires : on estime qu'en 2011 , le solde migratoire (différence entre les entrées et les sorties du territoire) est positif en Allemagne et s'élève à 49 800 personnes.
On admet de plus que le taux d'évolution de $-0,22$ % ainsi que le solde migratoire restent constants les années suivant 2011.

1. Modéliser cette situation à l'aide d'une suite (v_n) dont on précisera le premier terme v_0 ainsi qu'une relation entre v_{n+1} et v_n.
2. Calculer v_1 et v_2. Que peut-on conjecturer sur l'évolution de la population de l'Allemagne ?

(*Données recueillies par l'Institut national d'études démographiques*)

15. Métropole sujet dévoilé juin 2013 (5 points)

Un industriel étudie l'évolution de la production des jouets sur la machine VP1OOO de son entreprise. En 2000, lorsqu'il l'a achetée, elle pouvait produire 120 000 jouets par an.
Du fait de l'usure de la machine, la production diminue de 2 % par an.
On modélise le nombre total de jouets fabriqués au cours de l'année $(2000 + n)$ par une suite (U_n). On a donc $U_0 = 120\ 000$.

1. Montrer que pour tout entier naturel n : $U_n = 120\ 000 \times 0{,}98^n$.
2. (a) Quel a été le nombre de jouets fabriqués en 2005 ?
   (b) Déterminer à partir de quelle année, le nombre de jouets fabriqués sera strictement inférieur à 100 000.
   (c) Cet industriel décide qu'il changera la machine lorsqu'elle produira moins de 90 000 jouets par an.
   Recopier et compléter les lignes 8 et 9 de l'algorithme ci-dessous afin qu'il permette de déterminer le plus petit entier naturel n tel que $U_n < 90\ 000$.

```
  Variables : A est un réel
  n est un entier naturel
  Initialisation : Affecter à A la valeur 12 000
  Affecter à n la valeur 0
1 début
2 |  tant que A ⩾ 90 000 faire
3 |  |  n prend la valeur ... ;
4 |  |  ...
5 |  fin
6 fin
  Sorties : Afficher n
```

3. (a) Exprimer $1 + 0{,}98 + 0{,}98^2 + \cdots + 0{,}98^n$ en fonction de n.
   (b) On pose $S_n = U_0 + U_1 + U_2 + \cdots + U_n$.
   Montrer que $S_n = 6\ 000\ 000 \times \left(1 - 0{,}98^{n+1}\right)$.
   (c) En déduire le nombre total de jouets fabriqués pendant les 15 premières années de production.

16. Asie 19 juin 2013 (6 points)

Le gestionnaire d'une salle de concert constate que, chaque année, le nombre d'abonnés est constitué de 70% des abonnés de l'année précédente, auxquels s'ajoutent 210 nouveaux abonnés.
Le nombre d'abonnés en 2010 était de 600.

1. Calculer le nombre d'abonnés en 2011 et 2012.
2. On définit la suite (u_n) par : $u_0 = 600$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}7u_n + 210$.
   On utilise un tableur pour calculer les termes de la suite (u_n).

	A	B
1	n	u n
2	0	600
3	1	
4	2	
5	3	
6	4	
7	5	
8	6	
9	7	

   Proposer une formule à écrire en B3 pour calculer u_1 ; cette formule « tirée vers le bas » dans la colonne devra permettre de calculer les valeurs successives de la suite (u_n).
3. On pose, pour tout entier naturel n : $v_n = u_n - 700$.
   (a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison 0,7.
   Préciser son premier terme.
   (b) Justifier que pour tout entier naturel n, $u_n = 700 - 100 \times 0{,}7^n$.
4. (a) Soit n un entier naturel. Démontrer que $u_n \geqslant 697$ est équivalent à $0{,}7^n \leqslant 0{,}03$.
   (b) Pour résoudre cette inéquation, on utilise l'algorithme suivant :

Variables :	N est un nombre entier naturel
Initialisation :	Affecter à N la Valeur 0
	Affecter à U la valeur 1
Traitement :	Tant que $U > 0{,}03$
	Affecter à N la valeur $N + 1$.
	Affecter à U la valeur $0{,}7 \times U$.
	Fin du Tant que
Sortie :	Afficher N.

   Quelle valeur de N obtient-on en sortie ? (On fera tourner l'algorithme).
   (c) Retrouvez ce résultat en résolvant l'inéquation $0{,}7^n \leqslant 0{,}03$.
   (d) En utilisant l'étude précédente de la suite (u_n), déterminer à partir de quelle année le nombre d'abonnés atteindra au moins 697.

17. Centre étrangers 12 juin 2013 (QCM 5 points)

Les services de la mairie d'une ville ont étudié l'évolution de la population de cette ville.
Chaque année, 12,5 % de la population quitte la ville et 1 200 personnes s'y installent.
En 2012, la ville comptait 40 000 habitants.
On note U_n le nombre d'habitants de la ville en l'année $2012 + n$.
On a donc $U_0 = 40\ 000$.
On admet que la suite (U_n) est définie pour tout entier naturel n par $U_{n+1} = 0{,}875 \times U_n + 1\ 200$.
On considère la suite (V_n) définie par $V_n = U_n - 9\ 600$.

Les questions numérotées de 1 à 5 de cet exercice forment un questionnaire à choix multiples (QCM). Pour chacune des questions, quatre affirmations sont proposées : une seule réponse est exacte. Une réponse exacte rapporte 1 point, une réponse fausse ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point. Pour chaque question, le candidat notera sur sa copie le numéro de la question suivi de la proposition qui lui semble correcte. Aucune justification n'est demandée.

1. La valeur de U_1 est :
   (a) 6 200 (b) 35 000 (c) 36 200 (d) 46 200
2. La suite (V_n) est :
   (a) géométrique de raison $-12{,}5$ %
   (b) géométrique de raison 0,875
   (c) géométrique de raison $-0{,}875$
   (d) géométrique de raison $-9\ 600$
3. La suite (U_n) a pour limite :
   (a) $+\infty$ (b) 0 (c) 1 200 (d) 9 600
4. On considère l'algorithme suivant :

   Variables : U, N
   Entrées : U prend la valeur 40 000 ;
   N prend la valeur 0
   début
     tant que $U > 10\ 000$ **faire**
       N prend la valeur $N + 1$;
       U prend la valeur $0{,}875 \times U + 1\ 200$
     fin
   fin
   Sorties : Afficher N

   Cet algorithme permets d'obtenir :
   (a) la valeur de $U_{40\ 000}$
   (b) toutes les valeurs de U_0 à u_N
   (c) le plus petit rang n pour lequel on a $U_n \leqslant 10\ 000$
   (d) le nombre de termes inférieurs à 1 200
5. La valeur affichée est :
   (a) 33 (b) 34 (c) 9 600 (d) 9 970,8

18. Polynésie 7 juin 2013 (5 points)

La production de perles de culture de Tahiti est une activité économique importante pour la Polynésie Française.
Les montants réalisés à l'exportation des produits perliers de 2008 à 2011 sont donnés dans le tableau suivant, en milliers d'euros :

Années	2008	2009	2010	2011
Valeurs brutes des produits perliers (en milliers d'euros)	81 295	66 052	64 690	63 182

Source : ISPF (Institut de Statistiques de Polynésie Française)

1. Montrer que le taux d'évolution annuel moyen des montants à l'exportation des produits perliers de Polynésie entre 2008 et 2011 est $-8{,}06$ % arrondi au centième.

On admet pour la suite de l'exercice que la production continuera à baisser de 8 % par an à partir de 2011.

2. On considère l'algorithme suivant :

Entrée	Saisir un nombre positif P
Traitement :	Affecter la valeur 0 à la variable N *(initialisation)*
	Affecter la valeur 63 182 à U *(initialisation)*
	Tant que $U > P$
	Affecter la valeur $N + 1$ à N
	Affecter la valeur $0{,}92 \times U$ à U
	Fin de Tant que
	Affecter la valeur $N + 2011$ à N
Sortie	Affricher N

   Si on saisit $P = 50\ 000$ entrée, qu'obtient-on en sortie par cet algorithme ? Interpréter ce résultat dans le contexte de la production de perles.

3. Pour prévoir les montants réalisés à l'exportation des perles de Tahiti, on modélise la situation par une suite (u_n). On note u_0 le montant en 2011, en milliers d'euros, et u_n le montant en $2011 + n$, en milliers d'euros. On a donc $u_0 = 63\ 182$ et on suppose que la valeur baisse tous les ans de 8 %.
   (a) Montrer que (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.
   (b) Exprimer, pour tout entier naturel n, u_n en fonction de n.
   (c) Avec ce modèle, quel montant peut-on prévoir pour l'exportation des produits perliers de Polynésie Française en 2016 ? On arrondira le résultat au milliers d'euros.
4. Calculer le montant cumulé des produits perliers exportés que l'on peut prévoir avec ce modèle à partir de 2011 (comprise) jusqu'à 2020 (comprise). On donnera une valeur approchée au millier d'euros.

19. Amérique du Nord 30 mai 2013 (5 points)

La bibliothèque municipale étant devenue trop petite, une commune a décidé d'ouvrir une médiathèque qui pourra contenir 100 000 ouvrages au total.
Pour l'ouverture prévue le 1er janvier 2013, la médiathèque dispose du stock de 35 000 ouvrages de l'ancienne bibliothèque augmenté de 7 000 ouvrages supplémentaires neufs offerts par la commune.

Partie A

Chaque année, la bibliothécaire est chargée de supprimer 5 % des ouvrages, trop vieux ou abîmés, et d'acheter 6 000 ouvrages neufs.
On appelle u_n le nombre, en milliers, d'ouvrages disponibles le 1er janvier de l'année $(2013 + n)$.
On donne $u_0 = 42$.

1. Justifier que, pour tout entier naturel n , on a $u_{n+1} = u_n \times 0{,}95 + 6$.
2. On propose, ci-dessous, un algorithme, en langage naturel.
   Expliquer ce que permet de calculer cet algorithme.

```
Variables :
   U, N
Initialisation :
   Mettre 42 dans U
   Mettre 0 dans N
Traitement :
   Tant que U < 100
      U prend la valeur U × 0,95 + 6
      N prend la valeur N +1
   Fin du Tant que
Sortie
Afficher N.
```

3. À l'aide de votre calculatrice, déterminer le résultat obtenu grâce à cet algorithme.

Partie B

La commune doit finalement revoir ses dépenses à la baisse, elle ne pourra financer que 4 000 nouveaux ouvrages par an au lieu des 6 000 prévus.
On appelle v_n le nombre, en milliers, d'ouvrages disponibles le 1er janvier de l'année $(2013 + n)$.

1. Identifier et écrire la ligne qu'il faut modifier dans l'algorithme pour prendre en compte ce changement.
2. On admet que $v_{n+1} = v_n \times 0{,}95 + 4$ avec $v_0 = 42$.
   On considère la suite (w_n) définie, pour tout entier n, par $w_n = v_n - 80$.
   Montrer que (w_n) est une suite géométrique de raison $q = 0{,}95$ et préciser son premier terme w_0.
3. On admet que, pour tout entier naturel n : $w_n = -38 \times (0{,}95)^n$.
   (a) Déterminer la limite de (w_n).
   (b) En déduire la limite de (v_n).
   (c) Interpréter ce résultat.

20. Liban 28 mai 2013 (5 points)

Partie A

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 10$ et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = 0{,}9u_n + 1{,}2.$$

1. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 12$.
   (a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
   (b) Exprimer v_n en fonction de n.
   (c) En déduire que pour tout entier naturel n, $u_n = 12 - 2 \times 0{,}9^n$.
2. Déterminer la limite de la suite (v_n) et en déduire celle de la suite (u_n).

Partie B

En 2012, la ville de Bellecité compte 10 milliers d'habitants. Les études démographiques sur les dernières années ont montré que chaque année :

- 10 % des habitants de la ville meurent ou déménagent dans une autre ville ;
- 1 200 personnes naissent ou emménagent dans cette ville.

1. Montrer que cette situation peut être modélisée par la suite (u_n) où u_n désigne le nombre de milliers d'habitants de la ville de Bellecité l'année $2012 + n$.
2. Un institut statistique décide d'utiliser un algorithme pour prévoir la population de la ville de Bellecité dans les années à venir.
   Recopier et compléter l'algorithme ci-dessous pour qu'il calcule la population de la ville de Bellecité l'année $2012 + n$.

```
VARIABLES
a,i,n.
INITIALISATION
Choisir n
a prend la valeur 10
TRAITEMENT
Pour i allant de 1 à n,
a prend la valeur ....

SORTIE
Afficher a
```

3. (a) Résoudre l'inéquation $12 - 2 \times 0{,}9^n > 11{,}5$.
   (b) En donner une interprétation.

21. Pondichéry 15 avril 2013 (5 points)

Le 1[er] janvier 2000, un client a placé 3 000 € à intérêts composés au taux annuel de 2,5 %.
On note C_n le capital du client au 1[er] janvier de l'année $2000 + n$, où n est un entier naturel.

1. Calculer C_1 et C_2. Arrondir les résultats au centime d'euro.
2. Exprimer C_{n+1} en fonction de C_n. En déduire que, pour tout nombre entier naturel n, on a la relation :

$$C_n = 3\ 000 \times 1{,}025^n.$$

3. On donne l'algorithme suivant :

Entrée	Saisir un nombre S supérieur à 3 000

Traitement	Affecter à n la valeur 0. *Initialisation*
	Affecter à U la valeur 3 000 *Initialisation*
	
	Tant que $U \leqslant S$
	  n prend la valeur $n + 1$
	  U prend la valeur $U \times 1{,}025$
	Fin tant que

Sortie	Afficher le nombre $2000 + n$

(a) Pour la valeur $S = 3\ 300$ saisie, recopier et compléter autant que nécessaire le tableau suivant. Les résultats seront arrondis à l'unité.

Valeur de n	0	1	....	
Valeur de U	3 000		....	
Condition $U \leqslant S$	vrai		....	

(b) En déduire l'affichage obtenu quand la valeur de S saisie est 3 300.

(c) Dans le contexte de cet exercice, expliquer comment interpréter le nombre obtenu en sortie de cet algorithme quand on saisit un nombre S supérieur à 3 000.

4. Au 1[er] janvier 2013, le client avait besoin d'une somme de 5 000 €. Montrer que le capital de son placement n'est pas suffisant à cette date. Déterminer, en détaillant la méthode, à partir du 1[er] janvier de quelle année le client pourrait avoir son capital initial multiplié par 10.

Table des matières