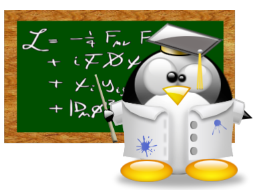
Stéphane PASQUET, 9 octobre 2018

Sommaire



Prérequis

- Puissances (notions de collège)
- Raisonnement par récurrence
- Étude de fonctions (continuité et dérivabilité)

Définition — *Fonction exponentielle*

La fonction exponentielle est l'unique fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et vérifiant les conditions :

- $f' = f$
- $f(0) = 1$

Cette fonction est notée exp.

L'existence et l'unicité d'une telle fonction est admise.

Notation

Afin d'alléger les notations, on notera :

- $\exp(1) = \mathrm{e} \approx 2,718$
- $\exp(x) = \mathrm{e}^x$
- $\mathrm{e}^0 = 1$
- $\mathrm{e}^{x+y} = \mathrm{e}^x\mathrm{e}^y$
- $\mathrm{e}^{-x} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^x}$
- $\mathrm{e}^{x-y} = \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^y}$
- $\mathrm{e}^{nx} = (\mathrm{e}^x)^n$

Propriété — *Signe de la fonction exponentielle*

Pour tout réel x,

$$\mathrm{e}^x > 0.$$

Démonstration

En effet,

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^x &= \mathrm{e}^{2\times\frac{x}{2}}\\ &= \left(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\right)^2\end{aligned}$$

Un carré étant toujours positif, $\mathrm{e}^x > 0$ car l'exponentielle ne s'annule pas. ■

Remarque

Nous venons de voir que :

$$\mathrm{e}^x = \left(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\right)^2.$$

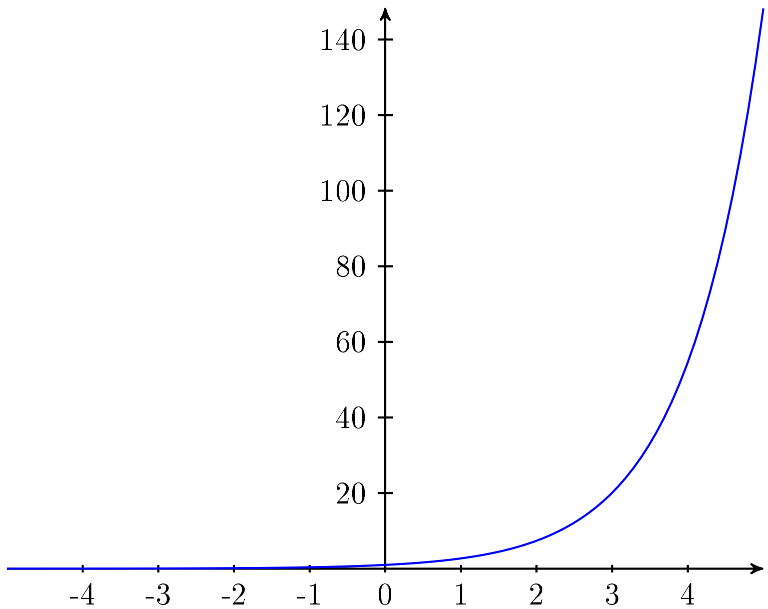
On en déduit alors :

$$\sqrt{\mathrm{e}^x} = \mathrm{e}^{\frac{x}{2}}.$$

Propriété — *Sens de variation*

La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

La courbe représentative de la fonction exponentielle est la suivante :



On peut remarquer que la fonction croît très rapidement, d'où l'expression « croître de façon exponentielle » lorsque l'on parle d'une forte croissance.

Propriété *Équations et inéquations*

Pour tous réels x et y,

$$\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^y \Leftrightarrow x = y \qquad ; \qquad \mathrm{e}^x < \mathrm{e}^y \Leftrightarrow x < y.$$

Exemple

1 Résoudre l'équation : $\mathrm{e}^{x^2} - \mathrm{e}^{2x-1} = 0$.

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{x^2} - \mathrm{e}^{2x-1} = 0 &\Leftrightarrow \mathrm{e}^{x^2} = \mathrm{e}^{2x-1} \\ &\Leftrightarrow x^2 = 2x - 1 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 1. \end{aligned}$$

L'équation admet donc une unique solution : $x = 1$.

2 Résoudre l'inéquation : $\mathrm{e}^{2x} \geqslant \dfrac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}^x}$.

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{2x} \geqslant \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}^x} &\Leftrightarrow \mathrm{e}^{2x} \times \mathrm{e}^x \geqslant \mathrm{e} \\ &\Leftrightarrow \mathrm{e}^{3x} \geqslant \mathrm{e}^1 \\ &\Leftrightarrow 3x \geqslant 1 \\ &\Leftrightarrow x \geqslant \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

L'inéquation admet donc comme ensemble solution l'intervalle $\left[\dfrac{1}{3}\,;+\infty\right[$.

Propriété *Dérivée de e^u*

Soit u une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
La dérivée de la fonction e^u est :

$$(\mathrm{e}^u)' = u'\mathrm{e}^u.$$

Exemple

On pose : $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$. Donc, $f(x) = \mathrm{e}^{u(x)}$, avec $u(x) = -x^2$.
$u'(x) = -2x$ donc :

$$f'(x) = -2x\mathrm{e}^{-x^2}.$$

Propriété

Variation de e^u

Soit u une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
La fonction e^u admet les mêmes variations que la fonction u.