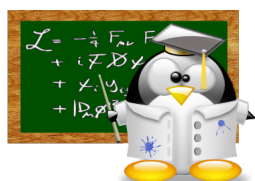


Sommaire

Intégrale	2
Lien avec les primitives	2
Valeur moyenne d'une fonction	3



Prérequis

- Continuité et théorème des valeurs intermédiaires
- Dérivées
- Primitives
- Logarithme népérien

Définition

Intégrale

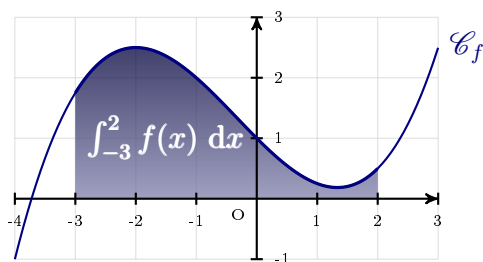
Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $I = [a; b]$.

On appelle **intégrale de f sur I** l'aire du domaine délimité par la courbe représentative de f , l'axe des abscisses, la droite d'équation $x = a$ et celle d'équation $x = b$.

On note alors cette intégrale :

$$\int_a^b f(x) \, dx.$$

On peut visualiser $\int_a^b f(x) \, dx$ de la façon suivante :



Propriété

Lien avec les primitives

Soit f une fonction continue sur un intervalle $I = [a; b]$, et soit F une primitive de f sur I . Alors,

$$\int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a).$$

Notation

On note aussi :

$$\int_a^b f(x) \, dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Remarques

- « $\int_a^b f(x) \, dx$ » si lit : « intégrale de a à b de $f(x) \, dx$. »
- Dans l'écriture $\int_a^b f(x) \, dx$, « x » est ce que l'on appelle une *variable muette*, c'est-à-dire que l'on peut la remplacer par n'importe quelle lettre dans la mesure où il n'y a aucune ambiguïté. Ainsi,

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^b f(t) \, dt.$$

Remarques (suite)

- Dans l'écriture $\int_a^b f(x) dx$, a et b sont appelés les *bornes de l'intégrale*.
- $\int_a^b f(x) dx$ est toujours exprimée en *unités d'aire* (u.a.) (où 1 u.a. représente l'aire du rectangle (ou carré) de côtés 1 (en abscisses) et 1 (en ordonnées).
Par exemple, si l'on prend 1,5 cm pour 1 unité en abscisses et 2 cm pour unité en ordonnées, 1 u.a. = 3 cm².

Définition

Valeur moyenne d'une fonction

Soit f une fonction continue et positive sur $[a; b]$, $a \neq b$.

On appelle **valeur moyenne de f sur $[a; b]$** le nombre défini par :

$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

Remarque

Lorsqu'un bénéfice (par exemple) est désigné par une fonction f , le bénéfice moyen sur une période (donc sur un intervalle $[a; b]$) correspond à la valeur moyenne de f .

Exemple

Le bénéfice d'une multinationale s'exprime (en milliers d'euros) par la fonction :

$$f(x) = e^{2x} - 1$$

où x est exprimé en années.

Le bénéfice moyen de cette entreprise au cours des 10 premières années (donc sur l'intervalle $[0; 10]$) est :

$$\begin{aligned}\mu &= \frac{1}{10-0} \int_0^{10} (e^{0,5x} - 1) dx \quad \text{où } F(x) = \frac{1}{2}e^{2x} - x \text{ est une primitive de } f(x) \\ &= \frac{1}{10} (F(10) - F(0)) \\ &= \frac{1}{10} \left[\left(\frac{1}{2}e^{2 \times 10} - 10 \right) - \left(\frac{1}{2}e^{2 \times 0} - 0 \right) \right] \\ &= \frac{1}{10} (0,5e^{20} - 10 - 0,5) \\ &= \frac{1}{10} (0,5e^{20} - 10,5) \\ \mu &\approx 24\,258\,258,720\,5\end{aligned}$$

La valeur moyenne est exprimée dans la même unité que $f(x)$ donc le bénéfice moyen est d'environ 2 425 825 872 € (à l'euro près).