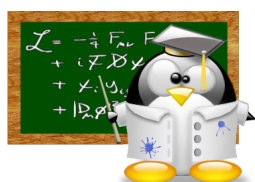




Sommaire

Logarithme népérien	2
Valeurs remarquables	2
Sens de variation	3
Relation fonctionnelle de la fonction logarithme népérien	3
Propriétés algébriques	3
Équations	4
Inéquations	5
Dérivée de la fonction logarithme népérien (admis)	5
Conservation du sens de variation par composition	5
Dérivée de $\ln u$	5



Prérequis

- Raisonnement par récurrence
- Fonction exponentielle

Définition

Logarithme népérien

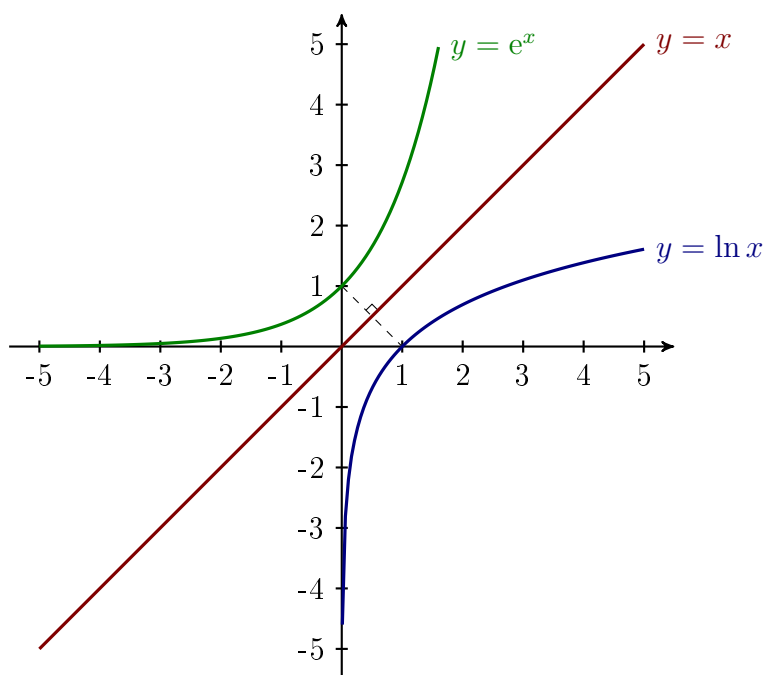
On définit la fonction **logarithme népérien** comme étant la fonction **ln** définie de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, \ln(e^x) = x \\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*, e^{\ln x} = x \end{cases}$$

Remarque

On dit que la fonction $\ln$ est la fonction réciproque de la fonction exponentielle.

Graphiquement, cela se traduit par une symétrie de la courbe représentative de la fonction exponentielle par rapport à la première bissectrice (droite d'équation $y = x$) :



Propriété

$$\forall a \in \mathbb{R}_+^*, \forall b \in \mathbb{R}, \ln a = b \iff a = e^b.$$

Démonstration

La fonction exponentielle étant continue et strictement croissante, on a :

$$\ln a = b \iff e^{\ln a} = e^b.$$

Or, par définition, $e^{\ln a} = a$. D'où le résultat. ■

Remarque

Valeurs remarquables

- $\ln 1 = 0$ (car $e^0 = 1 \Leftrightarrow \ln e^0 = \ln 1 \Leftrightarrow 0 = \ln 1$).
- $\ln e = 1$ (car $e^1 = e \Leftrightarrow \ln e^1 = \ln e \Leftrightarrow 1 = \ln e$).

Propriété

Sens de variation

La fonction $\ln$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Démonstration

Soient a et b deux réels strictement positifs tels que $\ln a < \ln b$.

Alors,

$$\begin{aligned}\ln a < \ln b &\iff e^{\ln a} < e^{\ln b} \quad \text{car la fonction exponentielle est strictement croissante sur } \mathbb{R} \\ &\iff a < b\end{aligned}$$

D'où le résultat. ■

Propriété

Relation fonctionnelle de la fonction logarithme népérien

$$\forall (a; b) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*, \ln(ab) = \ln a + \ln b.$$

Démonstration

D'une part, nous avons :

$$e^{\ln(ab)} = ab,$$

et d'autre part, nous avons :

$$e^{\ln a + \ln b} = e^{\ln a} \times e^{\ln b} = ab.$$

Ainsi,

$$e^{\ln(ab)} = e^{\ln a + \ln b}$$

et donc, parce que $x = y \Leftrightarrow e^x = e^y$:

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b. \quad \blacksquare$$

Propriété

Propriétés algébriques

Soit a un nombre réel strictement positif et n un entier relatif. Alors :

$$\boxed{1} \quad \ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a$$

$$\boxed{3} \quad \ln(a^n) = n \ln a$$

$$\boxed{2} \quad \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$$

$$\boxed{4} \quad \ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \ln a$$

Démonstration

1 $a \times \frac{1}{a} = 1$ donc $\ln \left(a \times \frac{1}{a} \right) = \ln 1 = 0$.

On en déduit alors que $\ln a + \ln \frac{1}{a} = 0$, soit $\ln \frac{1}{a} = -\ln a$.

2 $\ln \left(\frac{a}{b} \right) = \ln \left(a \times \frac{1}{b} \right) = \ln a + \ln \frac{1}{b} = \ln a - \ln b$ d'après le point précédent.

3 La démonstration se fait par récurrence sur n à l'aide de la propriété :
 $\ln(a^2) = \ln(a \times a) = \ln a + \ln a = 2 \ln a$.

4 $\ln a = \ln \left(\sqrt{a^2} \right) = 2 \ln \sqrt{a}$. D'où le résultat, en divisant par deux. ■

Exemples

1 $\ln \frac{1}{3} = -\ln 3$

2 $\ln \frac{3}{2} = \ln 3 - \ln 2$

3 $\ln 8 = \ln(2^3) = 3 \ln 2$

4 $\ln \sqrt{7} = \frac{1}{2} \ln 7$

Propriétés

Équations

1 $\forall (a; b) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*, \ln a = \ln b \iff a = b$.

2 $\forall k \in \mathbb{R}, \ln x = k \iff x = e^k$.

3 $\forall k \in \mathbb{R}_+^*, e^x = k \iff x = \ln k$.

Démonstrations

1 $\ln a = \ln b \iff e^{\ln a} = e^{\ln b}$
 $\iff a = b$.

2 $\ln x = k \iff e^{\ln x} = e^k$
 $\iff x = e^k$.

3 $e^x = k \iff \ln e^x = \ln k$
 $\iff x = \ln k$. ■

Propriétés

Inéquations

1 $\forall (a; b) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*, \ln a < \ln b \iff a < b$.

2 $\forall k \in \mathbb{R}, \ln x < k \iff x < e^k$.

3 $\forall k \in \mathbb{R}_+^*, e^x < k \iff x < \ln k$.

Ces propriétés se démontrent de la même façon que les précédentes.

Théorème

Dérivée de la fonction logarithme népérien (admis)

Sur $]0; +\infty[$, la dérivée de la fonction logarithme népérien est la fonction inverse.

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

Par ce théorème, on retrouve la stricte croissance de la fonction $\ln$ sur $\mathbb{R}_+^*$ car sur cet ensemble, $\frac{1}{x} > 0$.

Théorème

Conservation du sens de variation par composition

Soit u une fonction définie sur un intervalle I telle que $u(x) > 0$ sur I .

Alors, la fonction définie par $\ln u$ possède les mêmes variations que u sur I .

Ce théorème résulte de la propriété $a < b \iff \ln a < \ln b$.

Théorème

Dérivée de $\ln u$

Soit u une fonction définie sur un intervalle I telle que $u(x) > 0$ sur I .

Alors,

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}.$$

Démonstration

On sait que :

$$(e^v)' = v'e^v$$

donc en posant $v = \ln u$, on a :

$$(e^{\ln u})' = (\ln u)' e^{\ln u}$$

soit :

$$u' = (\ln u)' \times u$$

ou encore :

$$\frac{u'}{u} = (\ln u)'.$$

■