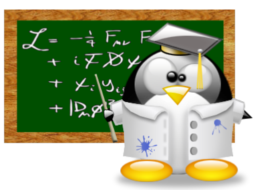
Stéphane PASQUET, 9 octobre 2018

Sommaire



Prérequis

- Intégration
- Fonction exponentielle
- Conditionnement et indépendance

Définition *Variable aléatoire discrète*

On considère une expérience aléatoire sur un univers Ω **fini**.
Une `variable aléatoire X` est une application de Ω dans $\mathbb{R}$ qui, à chaque issue, associe un nombre réel.

Exemple

Si l'on considère l'expérience aléatoire consistant à jeter un dé cubique non truqué, et si X est la variable aléatoire représentant l'ensemble des issues possibles, alors $X = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

$$\begin{aligned} X : \Omega &\to [\![1\,;6]\!] \\ \omega &\mapsto X(\omega) \end{aligned}$$

Définition *Loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète*

Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire.
La `loi de probabilité de X` est la donnée :

1. Des valeurs possibles $\{x_1; x_2; \dots; x_n\}$ prises par X ;
2. Des probabilités $P(X = x_i)$, pour i variant de 1 à n, de sorte que :

$$\sum_{i=1}^{n} P(X = x_i) = 1.$$

En général, on donne la loi de probabilité de X sous forme de tableau.

Exemple

Dans le cas de l'exemple précédent (du dé cubique), la loi de probabilité de X est :

x_i	1	2	3	4	5	6
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Définition *Espérance mathématique d'une variable aléatoire discrète*

Soit $X = \{x_1; x_2; \dots; x_n\}$ une variable aléatoire. On note, pour i variant de 1 à n, $p_i = P(X = x_i)$.
On définit l'`espérance mathématique` de X par :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i\ .$$

Exemple

Dans notre exemple précédent,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\mathrm{X}\right) &= 1\times\frac{1}{6}+2\times\frac{1}{6}+3\times\frac{1}{6}+4\times\frac{1}{6}+5\times\frac{1}{6}+6\times\frac{1}{6}\\ &= (1+2+3+4+5+6)\times\frac{1}{6}\\ &= \frac{21}{6}\end{aligned}$$

Définition — *Densité de probabilité*

Une fonction $f\ :\ I=[a\,;b]\to\mathbb{R}$ est une `densité de probabilité` si :

1. f est continue sur I ;
2. $\forall\, x\in I,\ \ f(x)\geqslant 0$;
3. $\displaystyle\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = 1$.

Exemples

1. $f : [0\,;1] \to \mathbb{R}$ est une loi de densité.
   $x \mapsto 1$
2. $f : [0\,;+\infty[\to \mathbb{R}$ est une loi de densité.
   $x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$

Propriétés

Soit X une variable aléatoire à densité f sur I.

1. $\forall\,\alpha\in\mathrm{I},\ \ \mathrm{P}\left(\mathrm{X}=\alpha\right)=0$;
2. $\mathrm{P}\left(\mathrm{X}\leqslant a\right)=1-\mathrm{P}\left(\mathrm{X}>a\right)$.

Remarques

1. La première propriété signifie simplement que dans le cas d'une variable aléatoire continue, écrire $\mathrm{P}\left(\mathrm{X}=2\right)$ (par exemple) n'a pas de sens puisque la probabilité est toujours égale à 0.
2. Par exemple, $\mathrm{P}\left(\mathrm{X}\leqslant 3\right)=1-\mathrm{P}\left(\mathrm{X}>3\right)$.

Définition — *Loi uniforme sur $[a\,;b]$*

Soit X une variable aléatoire à densité f sur I.

On dit que `X suit la loi uniforme` si $f(x)=\dfrac{1}{b-a}$ et $\mathrm{I}=[a\,;b]$.

Propriété

Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $\mathrm{I} = [a\,;b]$.
Alors, si c et d sont deux nombres de $[a\,;b]$:

$$\mathrm{P}\left(\mathrm{c} \leqslant \mathrm{X} \leqslant \mathrm{d}\right) = \frac{d-c}{b-a}\ .$$

Exemple

On choisit au hasard un nombre entre 0 et 1. La probabilité qu'il soit compris entre 0,3 et 0,4 est :

$$\mathrm{P}\left(\mathrm{X} \in [0,3\,;0,4]\right) = \frac{0,4-0,3}{1-0} = 0,1.$$

Propriété

Espérance mathématique d'une loi uniforme

Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $\mathrm{I} = [a\,;b]$.
Alors, son espérance est :

$$\mathbb{E}\left(\mathrm{X}\right) = \frac{a+b}{2}.$$

Remarque

L'espérance est donc le milieu de l'intervalle $[a\,;b]$.