

Les fonctions en Terminale ES

Disponible sur <http://www.mathweb.fr>

Fiche

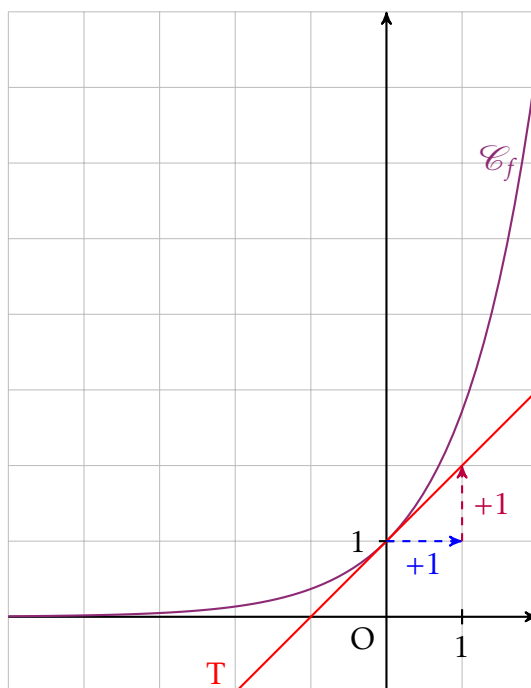
par
Stéphane PASQUET

17 août 2018

1 Dérivation

Pour une fonction f définie sur un intervalle I ,

- Le **nombre dérivé** de f en $a \in I$ correspond au **coefficient directeur de la tangente** à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse $x = a$.



Ici, le coefficient directeur de (T), tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse $x = 0$, est égal à $+1$, donc $f'(0) = 1$.

- Équation de la tangente :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

- Tableaux des principales dérivées :

Fonctions	Dérivées
x^n	nx^{n-1}
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
e^x	e^x

Fonctions	Dérivées
u^n	$nu'u^{n-1}$
$\ln u$	$\frac{u'}{u}$
e^u	$u'e^u$

Fonctions	Dérivées
uv	$u'v + uv'$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$

2 Continuité

- Théorème des valeurs intermédiaires

Si :

1. f est continue sur $[a; b]$,
2. c est compris entre $f(a)$ et $f(b)$,

alors l'équation $f(x) = c$ admet au moins une solution sur $]a; b[$.

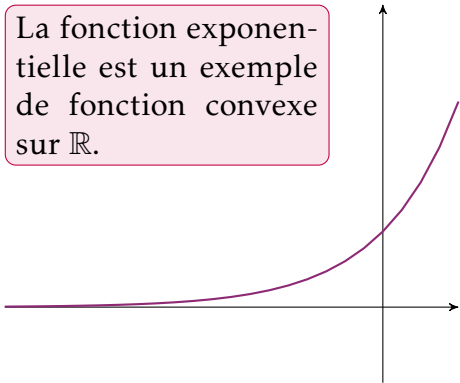
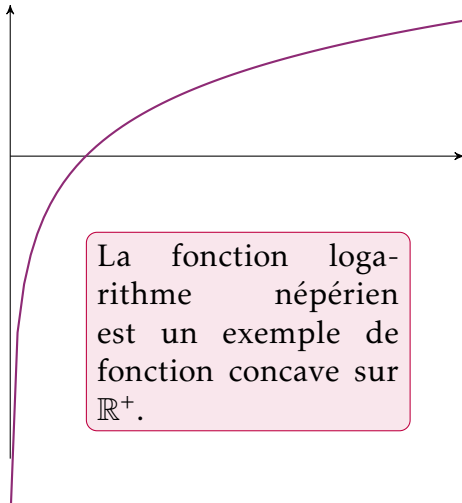
- Théorème des valeurs intermédiaires (corollaire)

Si :

1. f est continue et strictement monotone (croissante OU décroissante) sur $[a; b]$,
2. c est compris entre $f(a)$ et $f(b)$,

alors l'équation $f(x) = c$ admet une unique solution sur $]a; b[$.

3 Convexité & concavité

f est convexe sur I si ...	f est concave sur I si ...
$f''(x) \geq 0$ sur I	$f''(x) \leq 0$ sur I
f' est croissante sur I	f' est décroissante sur I
Sa courbe représentative est toujours au-dessus de ses tangentes	Sa courbe représentative est toujours au-dessous de ses tangentes
La fonction exponentielle est un exemple de fonction convexe sur $\mathbb{R}$. 	 La fonction logarithme népérien est un exemple de fonction concave sur $\mathbb{R}^+$.

4 Logarithmes et exponentielles

- $e^x \times e^y = e^{x+y}$
- $\frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}$
- $(e^x)^n = e^{nx}$
- $e^{\ln x} = x$ ($x > 0$) et $\ln(e^x) = x$ (par définition)
- $e^x = e^y \iff x = y$
- $e^x > e^y \iff x > y$
- $q^n \geq b \iff \ln(q^n) \geq \ln b$
 $\iff x \ln q \geq \ln b$
 $\iff \begin{cases} x \geq \frac{\ln b}{\ln q} & \text{si } q > 1 \text{ (car } \ln q > 0) \\ x \leq \frac{\ln b}{\ln q} & \text{si } 0 < q < 1 \text{ (car } \ln q < 0) \end{cases}$
- $\ln(xy) = \ln x + \ln y$
- $\ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y$
- $\ln(x^n) = n \ln x$
- $\ln x = \ln y \iff x = y$
- $\ln x > \ln y \iff x > y$
- $\ln a = b \iff a = e^b$

5 Intégration & primitives

- Sur un intervalle I convenablement choisi, une **primitive** F d'une fonction f est la fonction F telle que :

$$F' = f.$$

- **Tableau des principales primitives :**

Fonctions	Primitives
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + k, k \in \mathbb{R}$
$\frac{1}{x}, x > 0$	$\ln x + k, k \in \mathbb{R}$
e^x	$e^x + k, k \in \mathbb{R}$

Fonctions	Primitives
$u'u^n$	$\frac{u^{n+1}}{n+1} + k, k \in \mathbb{R}$
$\frac{u'}{u}, u > 0$	$\ln u + k, k \in \mathbb{R}$
$u'e^u$	$e^u + k, k \in \mathbb{R}$
e^{ax+b}	$\frac{1}{a}e^{ax+b} + k, k \in \mathbb{R}$

Méthode pour trouver une primitive : faire apparaître une formule de façon explicite.

Exemple : On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = xe^{-x^2+1}.$$

Pour trouver une primitive de f , on regarde les tableaux ci-dessus : f fait intervenir une exponentielle, donc F est nécessairement de la forme $u'e^u$.

On pose alors $u(x) = -x^2 + 1$, donc $u'(x) = -2x$. On fait alors apparaître $u'e^u$ dans f :

$$f(x) = -\frac{1}{2} \times (-2xe^{-x^2+1})$$

donc :

$$f = -\frac{1}{2}u'e^u.$$

Ainsi,

$$F = -\frac{1}{2}e^u \quad \text{soit} \quad F(x) = -\frac{1}{2}e^{-x^2+1}.$$

- L'intégrale sur $[a; b]$ d'une fonction continue f est :

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

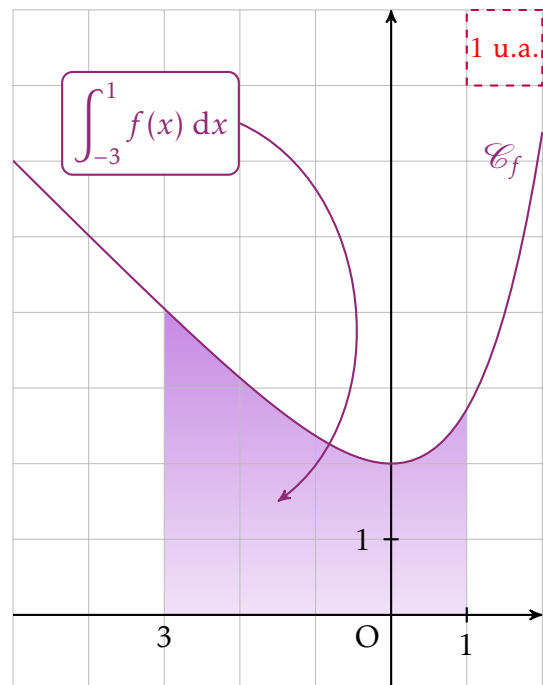
Si $f \geq 0$ sur $[a; b]$, elle représente l'aire du domaine délimité par :

- la courbe représentative de f ;
- l'axe des abscisses ;
- la droite d'équation $x = a$;
- la droite d'équation $x = b$.

Elle est alors exprimée en unité d'aire.

Ici, graphiquement, on peut affirmer (en comptant les carreaux) que :

$$10 \leq \int_{-3}^1 f(x) dx \leq 11.$$



- **Propriétés.**

1. *Linéarité :*

$$\int_a^b [\lambda f(x)] dx = \lambda \int_a^b f(x) dx \quad \text{et} \quad \int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx.$$

2. *Positivité.*

$$\text{Si } f(x) \geq 0 \text{ sur } [a; b], \text{ alors } \int_a^b f(x) dx \geq 0.$$

3. *Relation de Chasles.*

$$\text{Si } c \in [a; b], \text{ alors } \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

- **Valeur moyenne :** $\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$

6 Identification de coefficients

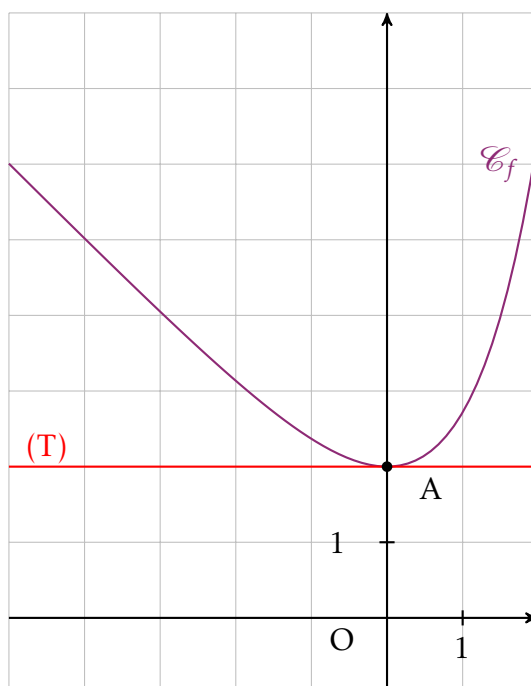
Certains exercices proposent l'expression d'une fonction à l'aide de paramètres, l'objectif étant de trouver la valeur de ces paramètres.

Pour cela, on utilisera souvent la valeur de $f(a)$ et $f'(a)$ donnée dans l'énoncé (de façon explicite ou graphique).

Exemple : On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = ae^x + bx + 1$$

dont la représentation graphique est la suivante :



(T) est la tangente à la courbe au point d'abscisse A(0; 2).

Déterminer a et b .

- Détermination de a .

On sait que $f(0) = 2$ car la courbe passe par le point de coordonnées (0; 2).

Or, $f(0) = ae^0 + b \times 0 + 1 = a + 1$. Donc, $a + 1 = 2$, soit $a = 1$.

- Détermination de b .

On sait que $f'(0) = 0$ car la tangente en 0 est horizontale (coefficient directeur nul).

Or, $f'(x) = ae^x + b$ donc $f'(0) = a + b = 1 + b$. Donc, $1 + b = 0$, soit $b = -1$.

Finalement, on a :

$$f(x) = e^x - x + 1.$$