Les suites en Terminale ES

Disponible sur `http://www.mathweb.fr`

Fiche

par
Stéphane PASQUET

13 juillet 2018

1 Suites géométriques

- **Relation de récurrence :** $u_{n+1} = qu_n$.
- **Relations explicites :** $u_n = u_0 \times q^n$ et $u_n = u_p \times q^{n-p}$.
- **Somme des premiers termes :** $u_0 + u_1 + \cdots + u_n = u_0 \times \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$.
- $1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$.
- Si $|q| < 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$.
  Si $q > 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$.

2 Étude d'une suite arithmético-géométrique

Exemple : soit la suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 & = 20\ 000 \\ u_{n+1} & = 0,9u_n + 1\ 000 \end{cases}$$

Soit alors la suite $(v_n)_{n \geqslant 0}$ définie par :

$$v_n = u_n - 10\ 000. \tag{1}$$

1. **La suite (v_n) est géométrique.**

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 10\ 000 \\ &= 0,9u_n - 9\ 000 \\ &= 0,9(u_n - 10\ 000) \\ v_{n+1} &= 0,9v_n \end{aligned}$$

Exemple (suite) :

2. **Expression du terme général u_n.**
   (v_n) est géométrique de raison $q = 0,9$ et de premier terme :
   $$v_0 = u_0 - 10\ 000 = 10\ 000.$$
   Donc,
   $$v_n = v_0 \times q^n = 10\ 000 \times 0,9^n\ ,$$
   et donc , d'après l'équation 1 :
   $$\begin{aligned} u_n &= v_n + 10\ 000 \\ u_n &= 10\ 000 \times 0,9^n + 10\ 000. \end{aligned}$$

3. **Limite de la suite (u_n).**
   On sait que $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$ car (v_n) est géométrique de raison $0 < q < 1$.
   Donc,
   $$\begin{aligned} \lim_{n \to +\infty} u_n &= \lim_{n \to +\infty} (v_n + 10\ 000) \\ &= \lim_{n \to +\infty} v_n + 10\ 000 \\ &= 10\ 000. \end{aligned}$$