Exercice 1 : suites et algorithme

Une équipe de statisticiens propose les modèles suivants pour comparer l'évolution future de la population française et de la population allemande.
On note u_n la population de l'Allemagne estimée en millions d'habitants au 1^er^ janvier de l'année $2010+n$. On a alors $u_0 = 81,2$ et $u_{n+1} = 0,998u_n + 0,2$.
On note v_n la population de la France estimée en millions d'habitants au 1^er^ janvier de l'année $2010+n$. On a alors $v_0 = 63,2$ et $v_{n+1} = 1,002v_n + 0,1$.

On considère la suite $(w_n)_{n\geqslant 0}$ définie, pour tout entier naturel n, par la relation $w_n = u_n - 100$.

1. Montrer que $(w_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
2. En déduire une expression de w_n, puis de u_n en fonction de n.
3. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$. Comment peut-on interpréter cette valeur ?
4. On considère l'algorithme suivant :

Algorithme

```
> Entrées
    u et v : nombres réels
    n : nombre entier
> Traitement
    Affecter à u la valeur 81,2
    Affecter à v la valeur 63,2
    Affecter à n la valeur 0
    Tant que |u-v| ⩾15
        Affecter à u la valeur 0.998u+0.2
        Affecter à v la valeur 1.002v+0.1
        Affecter à n la valeur n+1
    Fin du Tant que
> Sortie
    Afficher n
```

(a) Recopier et compléter le tableau suivant (arrondir les résultats à 10^{-3}) :

n	0	1	2	3
u_n	81,2			
v_n	63,2			
$u_n - v_n$				

(b) Un élève de Terminale programme cet algorithme sur sa calculatrice. Son programme affiche « 16 ».
Son programme retourne-t-il le bon résultat ? À quoi ce dernier correspond-il ?

Exercice 2 : fonction exponentielle

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$g(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}} + 2.$$

On note $\mathscr{C}_g$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.
   Comment interpréter graphiquement ces résultats ?
2. Calculer $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} g(x)$. On admettra que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} g(x) = 2$.
3. Montrer que pour tout réel x non nul, $g'(x) = \dfrac{1}{x^3}e^{-\frac{1}{x}}$.
4. En déduire le signe de $g'(x)$ puis les variations de g sur son domaine de définition.
5. Montrer qu'il existe une unique solution sur $[-1\,;0[$, notée α, à l'équation $g(x) = 0$.
   Déterminer alors une valeur approchée de α à 10^{-2} près.
6. Étudier la convexité de la fonction g sur $\mathbb{R}^*$.
   Existe-t-il un ou plusieurs point d'inflexion à $\mathscr{C}_g$?
7. Déterminer une équation de la tangente à $\mathscr{C}_g$ au point d'abscisse $\dfrac{1}{3}$.

Exercice 3 : fonction logarithme

On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty]$ par :

$$f(x) = \ln x + 3x - 1.$$

1. Calculer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ puis $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
2. Montrer que f est strictement croissante sur $]0\,;+\infty]$.
3. En déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]0\,;1]$.
   Déterminer alors une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

Exercice 4 : Probabilités

Une usine produit des sacs. Chaque sac fabriqué peut présenter deux défauts : le défaut a et le défaut b. Un sac est dit défectueux s'il présente au moins l'un des deux défauts.

1. Dans cette question, les probabilités demandées seront données avec leurs valeurs décimales exactes.

   On prélève un sac au hasard dans la production d'une journée.

   On note A l' événement « le sac présente le défaut a » et B l'événement « le sac présente le défaut b ». Les probabilités des événements A et B sont respectivement $P(A) = 0,02$ et $P(B) = 0,01$; on suppose que ces deux événements sont indépendants.

   (a) Calculer la probabilité de l'événement C : « le sac prélevé présente le défaut a et le défaut b ».

   (b) Calculer la probabilité de l'événement D : « le sac est défectueux ».

   (c) Calculer la probabilité de l'événement E : « le sac ne présente aucun défaut ».

(d) Sachant que le sac présente le défaut a, quelle est la probabilité qu'il présente aussi le défaut b ?

2. On suppose que la probabilité (arrondie au centième) qu'un sac soit défectueux est égale à $0,03$.

   On prélève au hasard un échantillon de 100 sacs dans la production d'une journée. La production est suffisamment importante pour que l'on assimile ce prélèvement à un tirage avec remise de 100 sacs. On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de 100 sacs, associe le nombre de sacs défectueux.

   (a) Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

   (b) Quelle est la probabilité de l'événement « au moins un sac est défectueux » ? On arrondira cette probabilité au centième. Interpréter ce résultat.

   (c) Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X.

   Interpréter ce résultat dans le cadre de l'énoncé.

Exercice 1

1. Par définition, on a : $w_{n+1} = u_{n+1} - 100$. D'où :

$$\begin{aligned} w_{n+1} &= u_{n+1} - 100 \\ &= 0,998u_n + 0,2 - 100 \\ &= 0,998u_n - 99,8 \\ &= 0,998\left(u_n - \frac{99,8}{0,998}\right) \\ &= 0,998\,(u_n - 100) \\ \boxed{w_{n+1} = 0,998w_n} \end{aligned}$$

   Ainsi, (w_n) est une suite géométrique de raison $a = 0,998$ et de premier terme $w_0 = u_0 - 100 = 81,2 - 100 = -18,8$.

2. De la question précédente, on déduit que $w_n = w_0 \times q^n$, soit $\boxed{w_n = -18,8 \times 0,998^n}$.

   Ainsi, de l'égalité $w_n = u_n - 100$, on déduit $u_n = w_n + 100$; d'où $\boxed{u_n = -18,8 \times 0,998^n + 100}$.

3. $0 < 0,998 < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} (0,998^n) = 0$.

   Ainsi, $\lim\limits_{n \to +\infty} (-18,8 \times 0,998^n) = 0$, d'où $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 100}$.

   Nous pouvons interpréter ce dernier résultat par le fait que la population de l'Allemagne tendra à se rapprocher de 100 millions d'habitants si rien ne change entre temps.

4. (a) Le tableau complété est le suivant :

n	0	1	2	3
u_n	81,2	81,238	81,275	81,313
v_n	63,2	63,426	63,653	63,881
$u_n - v_n$	18	17,811	17,622	17,432

   (b) Pour $n = 15$, $u_n - v_n \approx 15,112$ et pour $n = 16$, $u_n - v_n \approx 14,718$.
   Ainsi, $n = 16$ est bien la première valeur de n pour laquelle $u_n - v_n < 15$.
   Cela signifie qu'en 2010+16, soit en 2026, la différence entre les deux populations sera inférieure à 15 millions d'habitants.

Exercice 2

1. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{1}{x}\right)=0$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)=1$.
   De plus, $\lim\limits_{X\to 0}\left(\mathrm{e}^{-X}\right)=\mathrm{e}^0=1$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}\right)=1$.
   Ainsi, par produit, $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}\right]=1$; d'où $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=3}$.

   $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x}\right)=0$ donc, par un raisonnement analogue au précédent, on en déduit que $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)}=3$.

   Ces résultats signifient que $\mathscr{C}_g$ admet une asymptote d'équation $y=3$ aux deux infinis.
2. $\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\dfrac{1}{x}\right)=-\infty$, donc $\lim\limits_{x\to 0^-}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)=-\infty$.
   De plus, $\lim\limits_{X\to+\infty}\mathrm{e}^X=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}\right)=+\infty$.
   Par produit, on a donc $\boxed{\lim\limits_{x\to 0^-}g(x)=-\infty}$ (ajouter 2 ne change pas la limite).
3. g est de la forme $uv+2$, avec :

   $u(x)=1+\dfrac{1}{x}$
   $u'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$

   $v(x)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$ (de la forme e^u, dérivée : $u'\mathrm{e}^u$)
   $v'(x)=\dfrac{1}{x^2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$

   Ainsi,

$$\begin{aligned}
g'(x)&=-\frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}+\left(1+\frac{1}{x}\right)\times\frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}\\
&=\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}\left[-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^2}\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]\\
&=\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)\\
&\boxed{g'(x)=\frac{1}{x^3}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}}
\end{aligned}$$

4. De la question précédente, on déduit que $g'(x)$ est du signe de x^3 (car une exponentielle est toujours strictement positive). D'où le tableau suivant :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	||	$+$
$g(x)$	$3 \searrow -\infty$	||	$2 \nearrow 3$

5. La fonction g est continue et strictement décroissante sur $[-1\,;0[$.
   De plus, $g(1)=2\mathrm{e}^{-1}+2>0$ donc « 0 » est une valeur intermédiaire entre $g(1)$ et $-\infty$.
   Ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α sur $[-1\,;0[$.
   À l'aide de la calculatrice, on trouve $\underline{\alpha\approx-0,68}$.

6. Pour étudier la convexité de g, on calcule $g''(x)$.
   g' est de la forme uv avec :

   $u(x) = \dfrac{1}{x^3}$ $\qquad$ $v(x) = e^{-\frac{1}{x}}$

   $u'(x) = -\dfrac{3}{x^4}$ $\qquad$ $v'(x) = \dfrac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}$

   D'où :

$$\begin{aligned} g''(x) &= -\frac{3}{x^4}e^{-\frac{1}{x}} + \frac{1}{x^3} \times \frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}} \\ &= e^{-\frac{1}{x}}\left(-\frac{3}{x^4} + \frac{1}{x^5}\right) \\ g''(x) &= \frac{-3x+1}{x^5}e^{-\frac{1}{x}} \end{aligned}$$

   L'exponentielle étant toujours strictement positive, $g''(x)$ est du signe de $\dfrac{-3x+1}{x^5}$ d'où le tableau suivant :

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$-3x+1$		$+$		$+$	0	$-$	
x^5		$-$	0	$+$		$+$	
$g''(x)$		$-$	$\|$	$+$	0	$-$	

   On en déduit alors que la fonction g est convexe sur $\left]0\,;\dfrac{1}{3}\right]$ et concave sur les intervalles $]-\infty\,;0[$ et $\left[\dfrac{1}{3}\,;+\infty\right[$.

   Il y a un point d'inflexion d'abscisse $\dfrac{1}{3}$ car en $\dfrac{1}{3}$, la dérivée seconde s'annule en changeant de signe.

7. L'équation d'une tangente à $\mathscr{C}_g$ en un point d'abscisse a est de la forme :

$$y = g'(a)(x-a) + g(a).$$

   Ici, $a = \dfrac{1}{3}$.

$$\begin{aligned} g\left(\frac{1}{3}\right) &= 4e^{-3} + 2 \\ g'\left(\frac{1}{3}\right) &= 27e^{-3} \end{aligned}$$

   L'équation de la tangente au point d'abscisse $\dfrac{1}{3}$ est donc :

$$y = \left(27e^{-3}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right) + 4e^{-3} + 2$$

$$y = \left(27e^{-3}\right)x - 9e^{-3} + 4e^{-3} + 2$$

$$\boxed{y = \left(27e^{-3}\right)x - 5e^{-3} + 2}$$

Exercice 3

1. $\lim_{x \to 0} \ln x = -\infty$ et $\lim_{x \to 0} (3x - 1) = -1$.
   Ainsi, par somme, $\boxed{\lim_{x \to 0} f(x) = -\infty}$.

   $\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ et $\lim_{x \to +infty} (3x - 1) = +\infty$.
   Ainsi, par somme $\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$.
2. $f'(x) = \frac{1}{x} + 3 = \frac{1 + 3x}{x}$.
   Or, pour $x > 0$, $1 + 3x > 0$. Donc, $f'(x) > 0$ sur $]0;+\infty[$.
   $\underline{f \text{ est donc strictement croissante sur }]0;+\infty[.}$
3. f est continue et strictement croissante sur $]0;1]$.
   De plus, $f(1) = \ln 1 + 3 \times 1 - 1 = 2 > 0$ et $\lim_{x \to 0} f(x) < 0$, donc « 0 » est une valeur intermédiaire entre $f(1)$ et $\lim_{x \to 0} f(x)$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe une unique solution α sur $]0;1]$ à l'équation $f(x) = 0$.
   La calculatrice nous aide à trouver $\alpha \approx 0,54$.