

Exercice 1 - Probabilités & suites

Dans un zoo, l'unique activité d'un manchot est l'utilisation d'un bassin aquatique équipé d'un toboggan et d'un plongoir.

On a observé que si un manchot choisit le toboggan, la probabilité qu'il le reprenne est 0,3.

Si un manchot choisit le plongoir, la probabilité qu'il le reprenne est 0,8.

Lors du premier passage les deux équipements ont la même probabilité d'être choisis.

Pour tout entier naturel n non nul, on considère l'évènement :

— T_n : « le manchot utilise le toboggan lors de son n -ième passage. »

— P_n : « le manchot utilise le plongoir lors de son n -ième passage. »

On considère alors la suite (u_n) définie pour tout entier naturel $n \geq 1$ par :

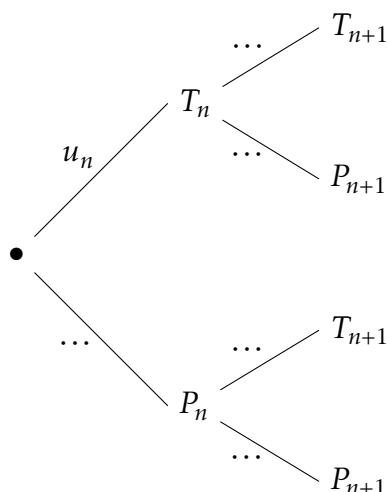
$$u_n = p(T_n)$$

où $p(T_n)$ est la probabilité de l'évènement T_n .

1. (a) Donner les valeurs des probabilités $p(T_1)$, $p(P_1)$ et des probabilités conditionnelles $p_{T_1}(T_2)$, $p_{P_1}(T_2)$.

- (b) Montrer que $p(T_2) = \frac{1}{4}$.

- (c) Recopier et compléter l'arbre suivant :



- (d) Démontrer que pour tout entier $n \geq 1$, $u_{n+1} = 0,1u_n + 0,2$.

- (e) À l'aide de la calculatrice, émettre une conjecture concernant la limite de la suite (u_n) .

2. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel $n \geq 1$ par :

$$v_n = u_n - \frac{2}{9}.$$

- (a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{10}$. Préciser son premier terme.

- (b) Exprimer v_n en fonction de n . En déduire l'expression de u_n en fonction de n .

- (c) Calculer la limite de la suite (u_n) . Ce résultat permet-il de valider la conjecture émise en 1. e. ?

Exercice 2 - Étude d'une fonction logarithme

Partie A

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$f(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right).$$

1. Déterminer les limites de $f(x)$ aux bornes de son domaine de définition.
2. Calculer $f'(x)$ puis déterminer le sens de variation de f sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Dresser un tableau de variations complet de la fonction f .

Partie B

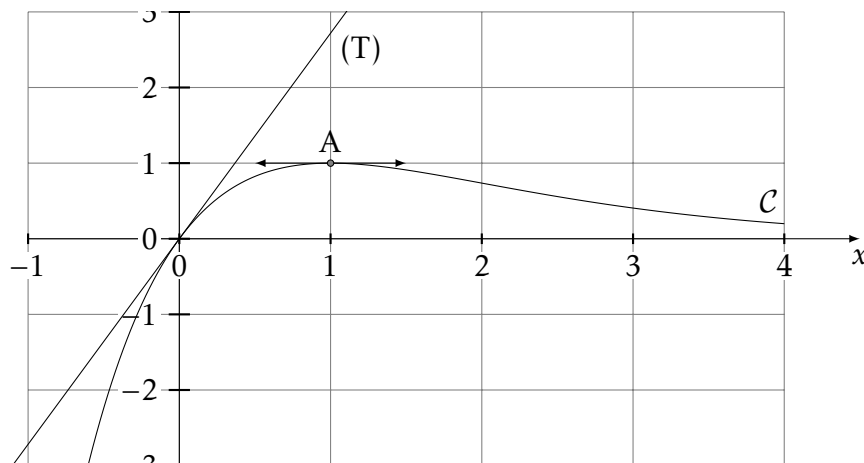
On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$g(x) = f(x) - x.$$

1. Montrer que g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. (a) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$.
(b) En déduire que l'équation α est l'unique solution de l'équation $f(x) = x$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
(c) À l'aide de votre calculatrice, déterminer une valeur approchée de α à 10^{-3} près.

Exercice 3 : Lectures graphiques & fonction exponentielle

On a représenté ci-dessous la représentation graphique $\mathcal{C}$ d'une fonction f sur l'intervalle $[-1; 4]$.



(T) est la tangente à $\mathcal{C}$ au point $O(0;0)$ et celle au point $A(1;1)$ est horizontale.
Pour chacune des questions suivantes, une seule réponse est correcte. Indiquer laquelle.

1. $f'(1)$ vaut :

(a) 0

(b) 1

(c) 2,5

2. $f(1)$ vaut :

(a) 0

(b) 1

(c) 2,5

3. La fonction f est concave sur :

(a) $[-1; 4]$

(b) $[0; 1]$

(c) $[2; 4]$

On sait que $f(x) = axe^{bx}$ où a et b sont deux réels.

4. À l'aide des questions 1 et 2, montrer que a et b vérifient le système :

$$\begin{cases} ae^b = 1 \\ 1 + b = 0 \end{cases}$$

En déduire a et b .

5. On admet que $f(x) = xe^{1-x}$.

(a) Montrer que la dérivée seconde de f est $f''(x) = (2 - x)e^{1-x}$.

(b) En déduire les intervalles où f est convexe et concave sur $\mathbb{R}$.

Préciser les coordonnées des éventuels points d'inflexion de $\mathcal{C}$.

CORRECTION

Exercice 1 : Probabilités & suites

1. (a) T_1 et P_1 étant équiprobables, $p(T_1) = p(P_1) = 0,5$.

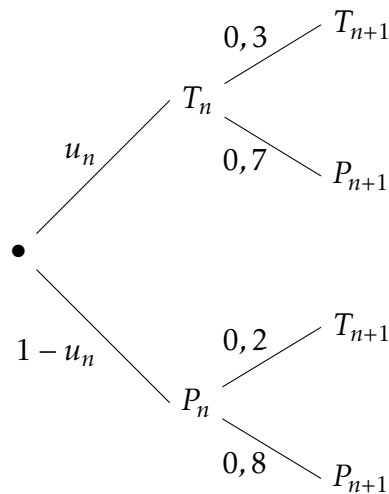
D'après l'énoncé la probabilité de prendre le toboggan après avoir pris le plongoir est égale à $p_{P_1}(T_2) = 1 - 0,8 = 0,2$.

Toujours d'après l'énoncé $p_{T_1}(T_2) = 0,3$.

- (b) D'après le principe des probabilités totales :

$$p(T_2) = p(T_1 \cap T_2) + p(P_1 \cap T_2) = 0,5 \times 0,3 + 0,5 \times 0,2 = 0,15 + 0,1 = 0,25 = \frac{1}{4}.$$

- (c) Recopier et compléter l'arbre suivant :



- (d) Toujours d'après le principe des probabilités totales :

$$u_{n+1} = p(T_{n+1}) = p(T_n \cap T_{n+1}) + p(P_n \cap T_{n+1}) = u_n \times 0,3 + (1 - u_n) \times 0,2 = 0,3u_n + 0,2 - 0,2u_n = 0,1u_n + 0,2.$$

- (e) La calculatrice donne $u_1 = 0,5$; $u_2 = 0,25$; $u_3 = 0,225$; $u_4 = 0,225$; $u_5 = 0,2225$.

Il semble que u_n ait pour limite $0,222\dots$

2. (a) $v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{2}{9} = 0,1u_n + 0,2 - \frac{2}{9} = \frac{1}{10}u_n + \frac{1}{5} - \frac{2}{9} = \frac{1}{10}u_n - \frac{1}{45} = \frac{1}{10}\left(u_n - \frac{2}{9}\right) = \frac{1}{10}v_n$.

La suite (v_n) est donc géométrique de raison $\frac{1}{10}$; son premier terme est

$$v_1 = u_1 - \frac{2}{9} = \frac{1}{2} - \frac{2}{9} = \frac{5}{18}.$$

- (b) On sait que $v_n = v_1 \left(\frac{1}{10}\right)^{n-1} = \frac{5}{18} \left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}$.

Comme $u_n = v_n + \frac{2}{9}$, on a $u_n = \frac{2}{9} + \frac{5}{18} \left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}$.

- (c) Comme $0 < \frac{1}{10} < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^{n-1} = 0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{2}{9}$.

Or $\frac{2}{9} = 0,222\dots$ ce qui valide la conjecture faite à la question 1. e.

Exercice 2 : Étude d'une fonction logarithme

Partie A

$$1. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} \right) = 0 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) = \ln 1 = 0.$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left(\frac{1}{x} \right) = +\infty \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty.$$

$$2. f'(x) = \frac{-\frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x}} = \frac{-1}{x^2 \left(1 + \frac{1}{x} \right)}.$$

On sait que sur $\mathbb{R}_+^*$, $1 + \frac{1}{x} > 0$ donc $f'(x) < 0$.

Ainsi, f est strictement décroissante sur $] -\infty; -1[$ et sur $] 0; +\infty[$.

3. On a le tableau suivant :

x	0	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	0

Partie B

$$\begin{aligned} 1. g'(x) &= f'(x) - 1 \\ &= \frac{-1}{x^2 + x} - 1 \\ &= \frac{-1 - x^2 - x}{x(x+1)} \\ &= -\frac{x^2 + x + 1}{x(x+1)} \end{aligned}$$

Or, le discriminant de $x^2 + x + 1$ étant $\Delta = -3 < 0$, ce polynôme est toujours strictement positif.

De plus, $x(x+1) > 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$; donc $g'(x) < 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

g est donc strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. (a) g est strictement décroissante et continue sur $\left[\frac{1}{2}; 1 \right]$.

De plus, $g\left(\frac{1}{2}\right) = \ln 3 - \frac{1}{2} \approx 0,6$ et $g(1) = \ln 2 - 1 \approx -0,3$. Donc 0 est une valeur intermédiaire entre $g\left(\frac{1}{2}\right)$ et $g(1)$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe alors une unique valeur α sur $\left[\frac{1}{2}; 1 \right]$ telle que $g(\alpha) = 0$.

(b) $g(x) = 0 \iff f(x) - x = 0 \iff f(x) = x$.

Ainsi, α est aussi l'unique solution de l'équation $f(x) = x$ sur $\left[\frac{1}{2}; 1 \right]$.

(c) On obtient $\alpha \approx 0,806$.

Exercice 3 : Lectures graphique & fonction exponentielle

- $f'(1) = 0$: c'est le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point A. Elle est horizontale donc il est nul.
- $f(1) = 1$ car $A(1; 1)$.
- f est concave sur $[0; 1]$; en effet, sur les 3 intervalles proposé, seul sur $[0; 1]$ les tangentes à $\mathcal{C}$ sont au-dessus.

4. $f(1) = 1 \iff ae^b = 1.$

$f'(x) = (a + abx)e^{bx}$ donc $f'(1) = 0 \iff (a + ab)e^b = 0$, soit $a(1 + b)e^b = 0$. Or, $e^b \neq 0$ donc $a(1 + b) = 0$. Mais $a \neq 0$ sinon, la fonction f serait la fonction nulle, ce qui n'est pas le cas ici.

Ainsi, $1 + b = 0$.

a et b vérifient donc bien le système $\begin{cases} ae^b = 1 \\ 1 + b = 0 \end{cases}.$

5. (a) $f(x)$ est de la forme $f(x) = uv(x)$ donc $f'(x) = (u'v + uv')(x).$

$u(x) = x$ donc $u'(x) = 1.$

$v(x) = e^{1-x}$ donc $v'(x) = (-1)e^{1-x} = -e^{1-x}.$

Donc $f'(x) = e^{1-x} + x \times (-e^{1-x})$, soit $f'(x) = (1 - x)e^{1-x}.$

De la même façon, on a :

$f''(x) = -1e^{1-x} + (1 - x)(-e^{1-x})$, soit $f''(x) = (x - 2)e^{1-x}.$

(b) f est convexe $\iff f''(x) > 0.$

Or, $f''(x) > 0 \iff 2 - x > 0$ car $e^{1-x} > 0$ pour tout x .

Donc f est convexe pour $x < 2$.

On en déduit que f est convexe sur $]-\infty; 2]$ et concave sur $[2; +\infty[.$

Il existe un point d'inflexion si $f''(x)$ s'annule en changeant de signe, ce qui est le cas pour $x = 2$.

$f(2) = 2e^{-1}$ donc $I(2; 2e^{-1})$ est l'unique point d'inflexion de $\mathcal{C}$.