

STAGE TERMINALE ES - AVRIL

★ Exercice 1

Statistiques

Le tableau ci-dessous donne l'évolution de l'indice des prix de vente des appartements anciens à Paris au quatrième trimestre des années 2000 à 2007 (Source : INSEE).

Année	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
Rang de l'année : x_i	0	1	2	3	4	5	6	7
Indice : y_i	100	108,5	120,7	134,9	154,8	176,4	193,5	213,6

1. Calculer le pourcentage d'augmentation de cet indice de l'année 2000 à l'année 2007.
2. Construire le nuage de points $M_i(x_i; y_i)$ dans le plan $(\mathcal{P})$ muni d'un repère orthogonal défini de la manière suivante :
 - sur l'axe des abscisses, on placera 0 à l'origine et on choisira 2 cm pour représenter une année.
 - sur l'axe des ordonnées, on placera 100 à l'origine et on choisira 1 cm pour représenter 10 unités.
3. Déterminer les coordonnées du point moyen G de ce nuage. Placer le point G dans le plan $(\mathcal{P})$.
4. L'allure de ce nuage permet de penser qu'un ajustement affine est adapté.
 - (a) A l'aide de la calculatrice, déterminer une équation de la droite (d) d'ajustement de y en x , obtenue par la méthode des moindres carrés. Les coefficients seront arrondis au centième.
 - (b) Tracer la droite (d) dans le plan $(\mathcal{P})$.
5. En supposant que cet ajustement affine reste valable pour les deux années suivantes, estimer l'indice du prix de vente des appartements anciens de Paris au quatrième trimestre 2009. Justifier la réponse.

★ Exercice 2

Probabilités

Le parc informatique d'un lycée est composé de 200 ordinateurs dont :

- 30 sont considérés comme neufs ;
- 90 sont considérés comme récents ;
- les autres sont considérés comme anciens.

Une étude statistique indique que :

- 5% des ordinateurs neufs sont défectueux ;
- 10% des ordinateurs récents sont défectueux ;

- 20% des ordinateurs anciens sont défectueux.

On choisit au hasard un ordinateur de ce parc. On note les événements suivants :

N : "L'ordinateur est neuf"

R : "L'ordinateur est récent"

A : "L'ordinateur est ancien"

D : "L'ordinateur est défectueux"

$\overline{D}$ l'évènement contraire de D .

1. Construire un arbre pondéré décrivant la situation.
2. Calculer la probabilité que l'ordinateur choisi soit neuf et défectueux.
3. Démontrer que la probabilité que l'ordinateur choisi soit défectueux est égale à 0,1325.
4. Déterminer la probabilité que l'ordinateur soit ancien sachant qu'il est défectueux. Donner le résultat sous forme décimale arrondie au centième.
5. Pour équiper le centre de ressources de l'établissement, on choisit au hasard 3 ordinateurs dans le parc. On admet que le parc est suffisamment important pour qu'on puisse assimiler ces choix à des tirages successifs indépendants avec remise. Déterminer la probabilité qu'exactement un des ordinateurs choisis soit défectueux. Donner le résultat sous forme décimale arrondie au centième.

★ Exercice 3

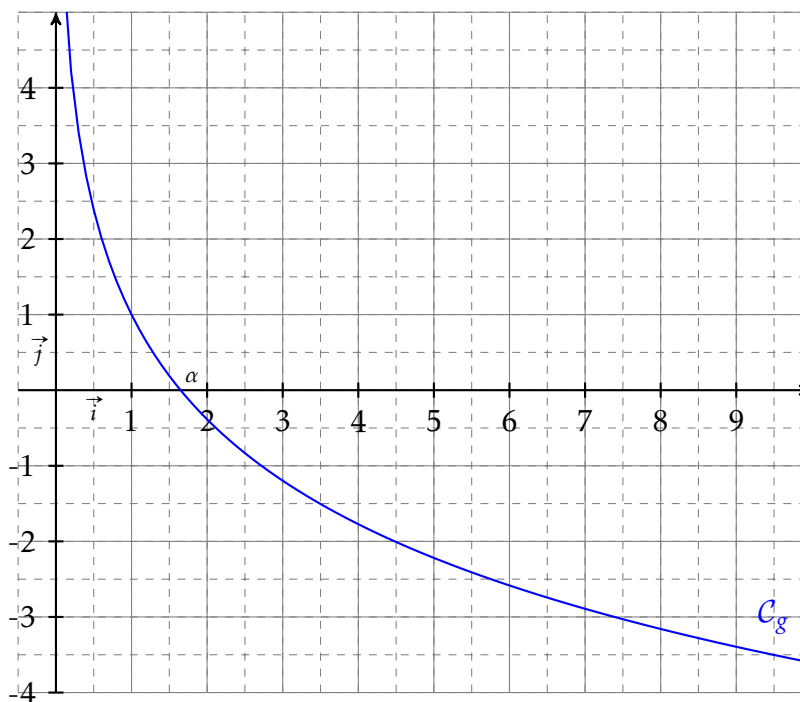
Logarithme Népérien

PARTIE A - ETUDE PRÉLIMINAIRE

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par :

$$g(x) = 1 - 2\ln(x)$$

On donne ci-dessous sa courbe représentative $\mathcal{C}_g$ dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Cette courbe $\mathcal{C}_g$ coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse α .



1. Déterminer la valeur exacte de α .
2. On admet que la fonction g est strictement décroissante sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
Donner, en justifiant, le signe de $g(x)$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

PARTIE B - ETUDE D'UNE FONCTION

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{2\ln(x) + 1}{x}$.

1. Déterminer la limite de f en $+\infty$ (on rappelle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$).
On admettra que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$.
2. (a) Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.
(b) Étudier le signe de $f'(x)$ et en déduire le tableau de variations de la fonction f .
3. (a) Déterminer une primitive F de la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
On pourra remarquer que $f(x) = 2 \times \frac{1}{x} \times \ln(x) + \frac{1}{x}$.
(b) Soit $I = \frac{1}{4} \int_1^5 f(x) dx$. Déterminer la valeur exacte de I , puis en donner une valeur approchée au centième près.

PARTIE C - APPLICATION ÉCONOMIQUE

Dans cette partie, on pourra utiliser certains résultats de la partie B.

Une entreprise de sous-traitance fabrique des pièces pour l'industrie automobile.
Sa production pour ce type de pièces varie entre 1 000 et 5 000 pièces par semaine, selon la demande.

On suppose que toutes les pièces produites sont vendues.

Le bénéfice unitaire, en fonction du nombre de pièces produites par semaine, peut être modélisé par la fonction f définie dans la partie B, avec x exprimé en milliers de pièces et $f(x)$ exprimé en euros.

1. Déterminer, au centime près, la valeur moyenne du bénéfice unitaire pour une production hebdomadaire comprise entre 1 000 et 5 000 pièces.
2. Dans cette question, la réponse sera soigneusement justifiée. Toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.
Pour quelle(s) production(s), arrondie(s) à l'unité près, obtient-on un bénéfice unitaire égal à 1,05 €?

★ Exercice 4

Lecture d'un tableau de variations

On donne le tableau de variation d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $]2; +\infty[$.

On note f' la fonction dérivée de f sur l'intervalle $]2; +\infty[$.

On appelle $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

x	2	3	10	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
f					

On suppose de plus que $f(5) = 0$ et que $f'(5) = -2$.

1. À l'aide du tableau, répondre aux questions suivantes. Aucune justification n'est demandée.
 - (a) Quelles sont les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition ? Interpréter graphiquement les résultats.
 - (b) Donner une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 3.
 - (c) Quel est le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 4$ sur l'intervalle $]2; +\infty[$?
2. Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]2; +\infty[$ par : $g(x) = e^{f(x)}$.
 - (a) Calculer $g(5)$.
 - (b) Calculer la limite de la fonction g en 2.
 - (c) Déterminer le sens de variations de g sur l'intervalle $[3; 10]$, en justifiant la réponse.
 - (d) Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction g au point d'abscisse 5.

CORRECTION

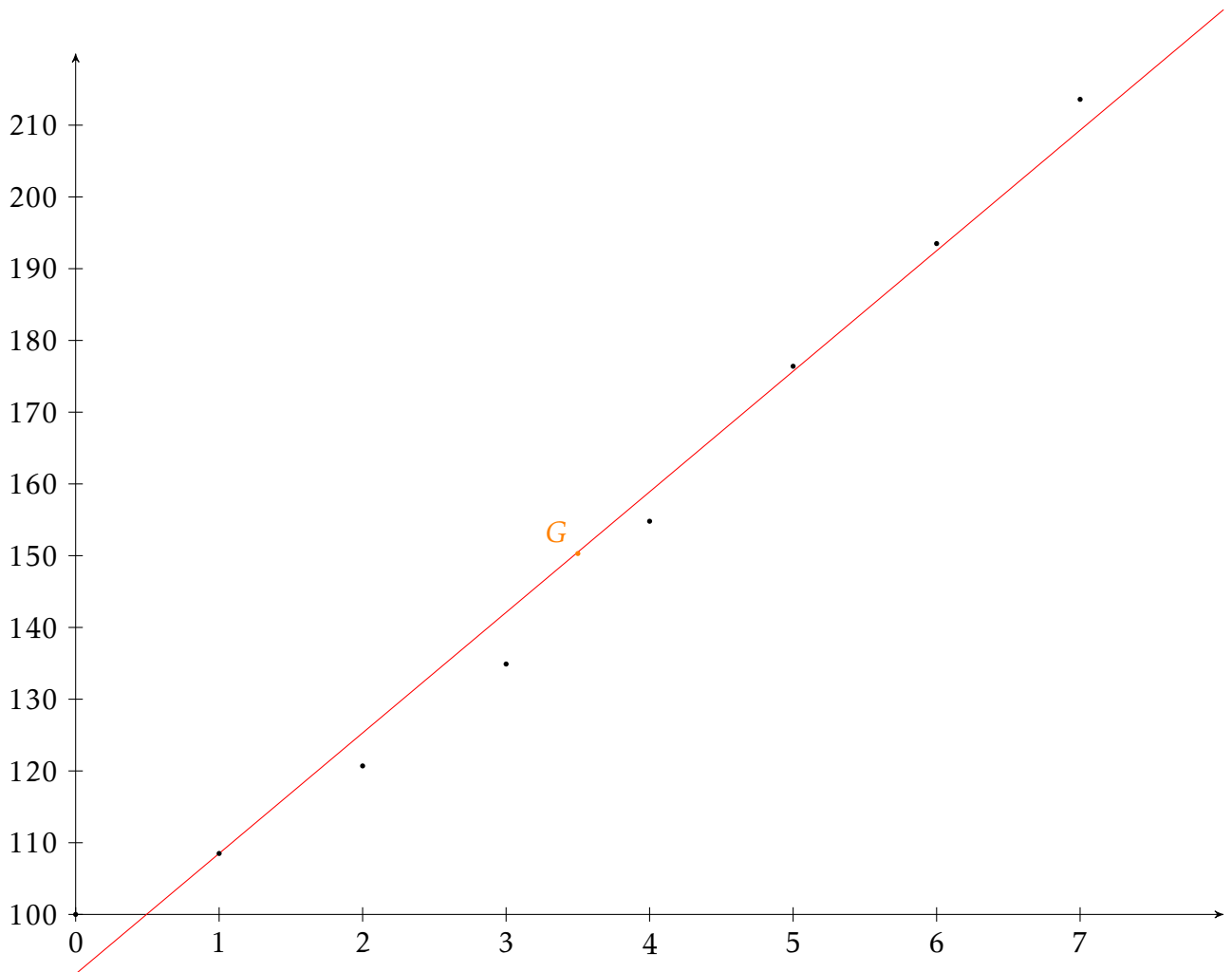
★ Exercice 1

1. Le pourcentage d'augmentation de l'indice entre 2000 et 2007 se calcule de la façon suivante :

$$p = \frac{213,6 - 100}{100} = 1,136$$

Le pourcentage d'augmentation de l'indice entre 2000 et 2007 est donc égal à 113,6 %.

2. On a le nuage de points suivant :



3. Notons $G(\bar{x}; \bar{y})$ le point moyen de ce nuage. Alors :

$$\bar{x} = \frac{0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7}{8} = 3,5$$

$$\bar{y} = \frac{100 + 108,5 + 120,7 + 134,9 + 154,8 + 176,4 + 193,5 + 213,6}{8} = 150,3$$

4. (a) La calculatrice nous permet d'établir l'équation de la droite d'ajustement de y en x obtenue par la méthode des moindres carrés suivante :

$$y = 16,75x + 91,67$$

(b) Voir graphique

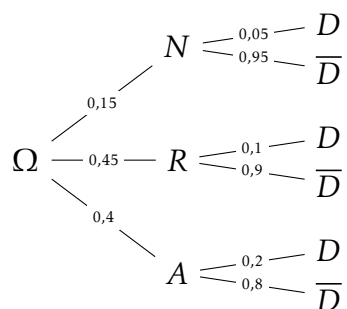
5. Pour estimer l'indice du prix de vente des appartements anciens de Paris au quatrième trimestre 2009, on remplace x par 9 dans l'équation précédemment trouvée, et on trouve :

$$y = 16,75 \times 9 + 91,67 = 242,42$$

Ainsi, l'indice sera d'environ 242,42.

★ Exercice 2

1. On a l'arbre pondéré suivant :



2. La probabilité que l'ordinateur choisi soit neuf et défaillant est donnée par :

$$P(N \cap D) = P(N) \times P_N(D) = 0,15 \times 0,05 = 0,0075$$

3. D'après la formule des probabilités totales, on a :

$$P(D) = P(D \cap A) + P(D \cap R) + P(D \cap N)$$

Ainsi, d'après l'arbre, on a :

$$P(D) = 0,4 \times 0,2 + 0,45 \times 0,1 + 0,0075 = 0,1325$$

4. La probabilité que l'ordinateur choisi soit ancien sachant qu'il est défaillant est donnée par :

$$P_D(A) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{0,08}{0,1325} \approx 0,60$$

5. On effectue une répétition de trois épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes, de probabilité de succès ("défaillant") 0,1325 (d'après la question 3) : l'expérience suit donc la loi binomiale de paramètre 3 et 0,1325.

La probabilité d'obtenir exactement un succès est :

$$3 \times 0,1325 \times (1 - 0,1325)^2 \approx 0,30$$

★ Exercice 3

PARTIE A - ETUDE PRÉLIMINAIRE

1. α est la valeur telle que $f(\alpha) = 0$. C'est donc la solution de l'équation $f(x) = 0$.

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\Leftrightarrow 1 - 2\ln(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow 1 = 2\ln(x) \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2} = \ln(x) \\ &\Leftrightarrow e^{\frac{1}{2}} = e^{\ln(x)} \\ &\Leftrightarrow e^{\frac{1}{2}} = x \end{aligned}$$

Ainsi, $\alpha = \sqrt{e}$.

2. La fonction g est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$ et s'annule en α ; ainsi :

- pour $0 < x < \alpha$, $g(x) > 0$
- pour $x > \alpha$, $g(x) < 0$

PARTIE A - ETUDE D'UNE FONCTION

1. On peut écrire $f(x) = 2\frac{\ln(x)}{x} + \frac{1}{x}$.

Or, $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2\frac{\ln(x)}{x} = 2 \times 0 = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$.

Ainsi, par addition, $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0}$.

2. (a) f est de la forme $\frac{u}{v}$ donc $f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$. Donc :

$$f'(x) = \frac{\frac{2}{x} \times x - (2\ln(x) + 1) \times 1}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{1 - 2\ln(x)}{x^2}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}}$$

(b) Nous avons vu le signe de $g(x)$ dans la partie A; or, $f'(x)$ est du signe de $g(x)$ car $x^2 > 0$ sur $]0; +\infty[$, d'où le tableau suivant :

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$		+	-
f		$f(\alpha)$	0

3. (a) Une primitive de $2 \times \frac{1}{x} \times \ln(x)$ est $(\ln x)^2$ (d'après la formule : $f(x) = 2u'u$ donne $F(x) = u^2$) et une primitive de $\frac{1}{x}$ est $\ln(x)$ donc :

$$F(x) = (\ln x)^2 + \ln x$$

(b) On a :

$$I = \frac{1}{4} \int_1^5 f(x) dx$$

$$I = \frac{1}{4} [F(x)]_1^5$$

$$I = \frac{1}{4} (F(5) - F(1))$$

$$I = \frac{1}{4} ((\ln 5)^2 + \ln 5 - (\ln 1)^2 - \ln 1)$$

$$I = \frac{(\ln 5)^2 + \ln 5}{4}$$

A l'aide de la calculatrice, on trouve : $I \approx 1,05$.

PARTIE C -APPLICATION ÉCONOMIQUE

1. La valeur moyenne du bénéfice unitaire pour une production hebdomadaire comprise entre 1 000 et 5 000 pièces est la valeur moyenne de la fonction f entre 1 et 5, c'est-à-dire $\frac{1}{5-1} \int_1^5 f(x) dx$, soit I .

La valeur moyenne du bénéfice unitaire pour une production hebdomadaire comprise entre 1 000 et 5 000 pièces est donc de 1,05 €.

2. On doit résoudre l'équation $f(x) = 1,05$; or on ne peut pas la résoudre de façon exacte. Sur $[1; 5]$, on a le tableau de variation suivant :

x	1	α	5
$f'(x)$	+	0	-
f	$f(1)$	$f(\alpha)$	$f(5)$

On a : $f(1) = 1$, $f(\alpha) \approx 1,21$ et $f(5) \approx 0,84$.

En utilisant le théorème des valeurs intermédiaires on montre que cette équation a deux solutions : une sur l'intervalle $]1; \alpha[$ et une autre sur l'intervalle $]\alpha; 5[$.

Puis en utilisant la méthode de balayage sur la calculatrice on trouve que les solutions sont approximativement :

$$1,05 < x_1 < 1,06 \quad ; \quad 3,11 < x_2 < 3,12$$

Il faut donc produire 105 pièces ou 311 pièces pour avoir un bénéfice unitaire égal à 1,05 €.

★ Exercice 4

1. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -\infty$, ce qui signifie que $\mathcal{C}$ admet une asymptote verticale d'équation $x = 2$.
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 4$, ce qui signifie que $\mathcal{C}$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 4$.

La tangente à $\mathcal{C}$ en $x = 3$ est horizontale ; comme $f(3) = 6$, son équation est : $y = 6$.

- (b) Il y a deux solutions à l'équation $f(x) = 4$: l'une sur l'intervalle $]2; 3[$ et l'autre sur l'intervalle $]3; 10[$.
2. (a) $g(5) = e^{f(5)} = e^0 = 1$.
- (b) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -\infty$ et $\lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = 0$ donc $\boxed{\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 0}$.
- (c) Sur $]3; 10[$, la fonction f est croissante et la fonction exponentielle est croissante. Or, la composée d'une fonction décroissante et d'une fonction croissante est décroissante.
Ainsi, g est décroissante sur $]3; 10[$.
- (d) L'équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction g au point d'abscisse 5 est donnée par la formule :

$$y = g'(5)(x - 5) + g(5)$$

Or, $g'(x) = f'(x)e^{f(x)}$. On a alors :

$$y = f'(5)e^{f(5)}(x - 5) + g(5)$$

D'où :

$$y = -2e^0(x - 5) + 1$$

Finalement, l'équation de cette tangente est : $y = -2x + 11$.