

Les interrogos d'Hugo

Thème : continuité et dérivabilité

◆ Questions de cours

Complète les phrases suivantes :

- 1 Une fonction f est continue sur un intervalle si on peut tracer sa courbe représentative sans lever le crayon sur cet intervalle.
- 2 On veut démontrer que l'équation $f(x) = c$ admet une seule solution sur $[a; b]$ à l'aide du théorème des valeurs intermédiaires. Les trois conditions qu'il est nécessaire d'avoir sont :
 - f est continue sur $[a; b]$
 - f est strictement monotone sur $[a; b]$
 - c est compris entre $f(a)$ et $f(b)$, peut importe l'ordre
- 3 f est une fonction dérivable sur un intervalle I et $a \in I$.

L'équation réduite de la tangente à sa courbe passant par le point d'abscisse a est :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

- 4 Complétez les formules de dérivation suivantes :

- $(uv)' = u'v + uv'$

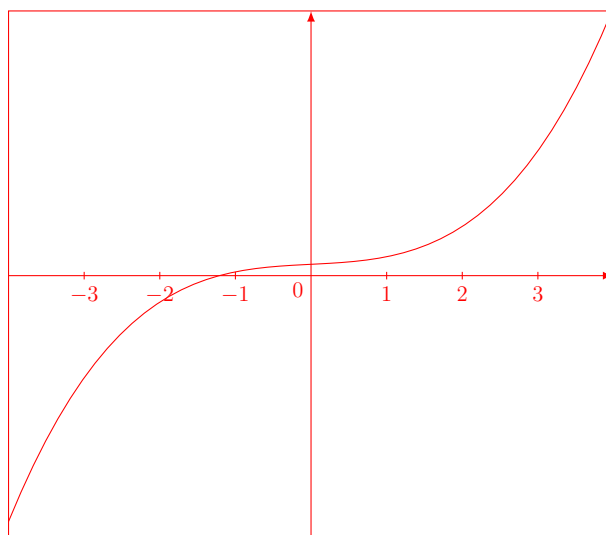
- $\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$

- $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

◆ Résoudre une équation

On souhaite résoudre l'équation : $x^3 + x + 3 = 0$.

- 1** Tracer la courbe représentative de la fonction f définie par $f(x) = x^3 + x + 3$ sur votre calculatrice et conjecturer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$.



On voit que la courbe coupe une seule fois l'axe des abscisses ; par conséquent, on peut conjecturer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.

2 Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.

La dérivée de la fonction f est :

$$f'(x) = 3x^2 + 1$$

Afin de déterminer le ou les intervalles sur le(s)quel(s) f est croissante, on résout l'inéquation :

$$f'(x) \geq 0 \iff 3x^2 + 1 \geq 0$$

$$\iff 3x^2 \geq -1$$

$$\iff x^2 \geq -\frac{1}{3} \quad (\text{toujours vrai car } x^2 \text{ est toujours positif ou nul})$$

Ainsi, f' est toujours strictement positive et donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

3 En déduire le nombre exact de solutions de l'équation $f(x) = 0$.

- f est continue sur $\mathbb{R}$;
- f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$;
- $f(-2) = (-2)^2 - 2 + 3 = -8 - 2 + 3 = -7 < 0$ et $f(-1) = (-1)^2 - 1 + 3 = 1 > 0$ donc 0 est une valeur intermédiaire à $f(-2)$ et $f(-1)$ [autrement dit : $f(-2) < 0 < f(-1)$]

Ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $[-2; -1]$.

4 À l'aide de votre calculatrice, déterminer une valeur approchée de cette ou ces solution(s) à 0,01 près.

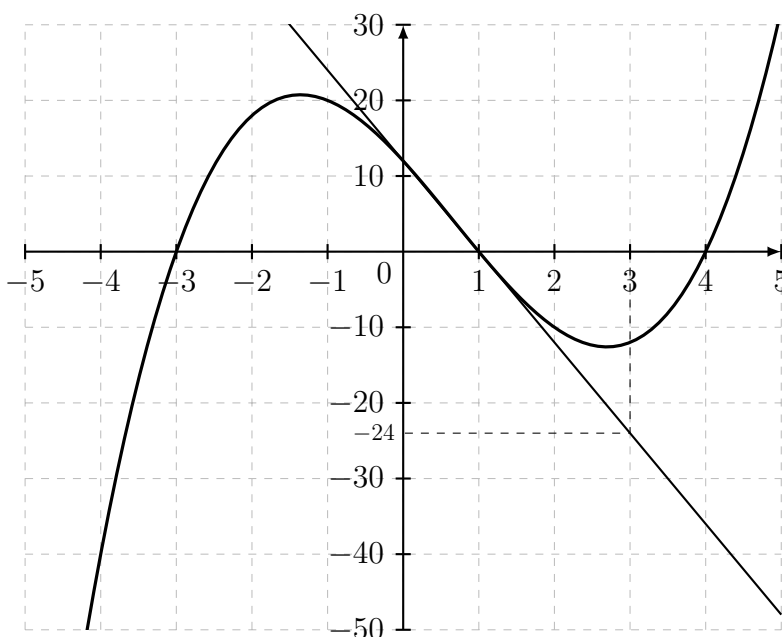
Plusieurs façons de répondre à cette question :

- On entre l'expression de la fonction dans la calculatrice, puis on construit un tableau de valeurs entre -2 et -1 avec un pas de 0,1 pour commencer, puis après avoir situé la solution entre $-1,3$ et $-1,2$, on construit un tableau de valeurs avec un pas de 0,01 de $-1,3$ à $-1,2$.
- On entre l'expression de la fonction dans la calculatrice (dans Y_1) et on entre la valeur « 0 » dans Y_2 . On trace les deux graphiques (les courbes d'équation $y = f(x)$ et $y = 0$) puis on demande l'intersection : la calculatrice nous affiche alors directement la solution : $-1,21341166276$.

Une valeur approchée à 0,01 près de l'unique solution à l'équation $f(x) = 0$ est $-1,21$.

◆ Lectures graphiques

On a représenté ci-dessous la courbe représentative d'une fonction f définie sur $[-5; 5]$ ainsi que sa tangente au point d'abscisse 1 sur laquelle se trouve le point de coordonnées $(3; -24)$.



Répondre par « Vrai » ou « Faux » aux questions suivantes :

- 1 L'équation $f(x) = 0$ admet exactement trois solutions sur $[-5; 5]$.

VRAI. En effet, la courbe coupe 3 fois l'axe des abscisses, donc il existe 3 valeurs de x pour lesquelles $f(x) = 0$.

- 2 L'équation $f'(x) = 0$ admet exactement trois solutions sur $[-5; 5]$.

FAUX. En effet, la courbe admet 2 extremums (un minimum et un maximum) donc il existe 2 valeurs de x pour lesquelles $f'(x) = 0$.

La courbe « ne s'aplatit pas » en dehors de ces deux extremums (c'est la notion de point d'inflexion que l'on verra dans le chapitre « Convexité ») donc ce sont les deux seules valeurs de x qui annulent $f'(x)$.

- 3 $f'(1) = -12$.

VRAI. En effet, $f'(1)$ est le nombre dérivé de f en 1 et est égal au coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse 1. Ce coefficient directeur se calcule avec les coordonnées de deux points de la tangente : $(1; 0)$ et $(3; -24)$:

$$m = \frac{-24 - 0}{3 - 1} = -12.$$

Donc $f'(1) = -12$.

- 4 $f'(x) \leq 0$ sur $[-1; 2]$.

VRAI. En effet, la courbe décroît sur $[-1; 2]$, ce qui signifie que la dérivée est négative sur cet intervalle.

◆ Problème lié à l'économie

Une entreprise fabrique des planches à hauteur de 10 000 par mois au maximum.

Pour x milliers de voitures fabriquées mensuellement, le coût total de production, exprimé en centaine d'euro, est donné par :

$$C(x) = 5x^3 - 40x^2 + 100x + 500.$$

Le marché est prêt à offrir un prix unitaire de 18 000 €.

- 1 Montrer que le bénéfice, exprimé en centaine d'euro, pour x quantité, est :

$$B(x) = -5x^3 + 40x^2 + 80x - 500.$$

Le bénéfice est la différence entre la recette, exprimée en centaine d'euro (donc ici égale à $180x$) et le coût total. Donc :

$$\begin{aligned} B(x) &= 180x - C(x) \\ &= 180x - (5x^3 - 40x^2 + 100x + 500) \\ &= 180x - 5x^3 + 40x^2 - 100x - 500 \end{aligned}$$

$$B(x) = -5x^3 + 40x^2 + 80x - 500$$

- 2 Déterminer le nombre de voitures à fabriquer pour que le bénéfice soit maximal, puis préciser la valeur de ce bénéfice.

$B'(x) = -15x^2 + 80x - 80$. Le discriminant de $B'(x)$ est :

$$\Delta = 80^2 - 4 \times (-15) \times (-80) = 1\,600 = 40^2.$$

Donc $B'(x)$ admet deux racines :

$$x_1 = \frac{-80 - 40}{2 \times (-15)} = 4 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-80 + 40}{2 \times (-15)} = \frac{4}{3}.$$

D'où le tableau suivant :

x	0	$\frac{4}{3}$	4	10	
$B'(x)$	−	0	+	0	−
B	−500		140		−700

Le bénéfice est donc maximal pour $x = 4$, soit pour 4 000 voitures fabriquées par mois, et il est alors égal à 14 000 €.

Le coût moyen de production, noté C_M , représentant le coût par unit produite, est donné par :

$$C_M(x) = \frac{C(x)}{x}$$

3 Montrer que $C'_M(x) = \frac{10}{x^2}(x^3 - 4x^2 - 50)$.

$$\begin{aligned} C_M(x) &= \frac{5x^3 - 40x^2 + 100x + 500}{x} \\ &= \frac{5x^3}{x} - \frac{40x^2}{x} + \frac{100x}{x} + \frac{500}{x} \\ &= 5x^2 - 40x + 100 + \frac{500}{x} \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} C'_M(x) &= 10x - 40 - \frac{500}{x^2} \\ &= \frac{10x \times x^2}{x^2} - \frac{40x^2}{x^2} - \frac{500}{x^2} \\ &= \frac{10x^3 - 40x^2 - 500}{x^2} \\ &= \frac{10(x^3 - 4x^2 - 50)}{x^2} \end{aligned}$$

$$C'_M(x) = \frac{10}{x^2}(x^3 - 4x^2 - 50)$$

4 On pose $f(x) = x^3 - 4x^2 - 50$.

(a) Étudier les variations de f sur $[0; 10]$.

$f'(x) = 3x^2 - 8x = x(3x - 8)$; les racines de $f'(x)$ sont donc 0 et $\frac{8}{3}$, d'où le tableau suivant :

x	0	$\frac{8}{3}$	10		
$f'(x)$	0	−	0	+	
f	−50		−59,5		550

(b) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[0; 10]$, dont on précisera une valeur approchée à 0,001 près.

Sur $\left[0; \frac{8}{3}\right]$, $f(x) < 0$ d'après le tableau de variations précédent.

De plus, sur $\left[\frac{8}{3}; 10\right]$, f est continue, strictement croissante et $f\left(\frac{8}{3}\right) < 0 < f(10)$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $\left[\frac{8}{3}; 10\right]$.

À la calculatrice, on trouve que cette solution est : $\alpha \approx 5,596$.

(c) En déduire le signe de $C'_M(x)$ sur $]0; 10]$.

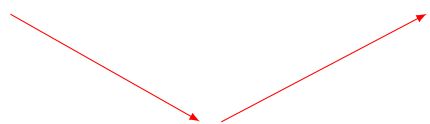
$C'_M(x) = \frac{10}{x^2}f(x)$ est du signe de $f(x)$ car $\frac{10}{x^2} > 0$ d'où :

x	0	α	10
$C'_M(x)$		-	+

5 Déduire de la question 4 le sens de variation de C_M .

Du tableau de signe précédent, on en déduit :

x	0	α	10
$C'_M(x)$		-	+
$C_M(x)$			



Pour quelle quantité de voitures le coût moyen est-il minimal ? Quel est alors ce coût ?

On peut alors conclure que le coût moyen est minimal pour $x = \alpha$, soit pour 5 596 voitures fabriquées.

$C_M(5,596) \approx 122$. Le coût moyen est alors à peu près égal à 12 200 €.

Le coût marginal représente la variation du coût total pour une unité supplémentaire de production. Le nombre de voitures est suffisamment grand pour accepter que ce coût soit donné par la formule :

$$C_m(x) = C'(x).$$

6 Déterminer l'expression de $C_m(x)$, puis calculer $C_m(\alpha)$. Que peut-on remarquer ?

$$C_m(x) = C'(x) = 15x^2 - 80x + 100.$$

$C_m(\alpha) \approx 122$. On remarque alors que $C_m(\alpha) = C_M(\alpha)$.