

■ *Les interrogos d'Hugo* ■ ■ ■ ■ ■ ■ ■ ■ ■ ■ ■ ■ ■ ■ ■ ■

Thème : continuité et dérivabilité

◆ Questions de cours

Complète les phrases suivantes :

- 1 Une fonction f est continue sur un intervalle si ...
- 2 On veut démontrer que l'équation $f(x) = c$ admet une seule solution sur $[a; b]$ à l'aide du théorème des valeurs intermédiaires. Les trois conditions qu'il est nécessaire d'avoir sont :
 - ...
 - ...
 - ...
- 3 f est une fonction dérivable sur un intervalle I et $a \in I$.

L'équation réduite de la tangente à sa courbe passant par le point d'abscisse a est : $y = \dots$
- 4 Complétez les formules de dérivation suivantes :
 - $(uv)' = \dots$
 - $\left(\frac{1}{v}\right)' = \dots$
 - $\left(\frac{u}{v}\right)' = \dots$

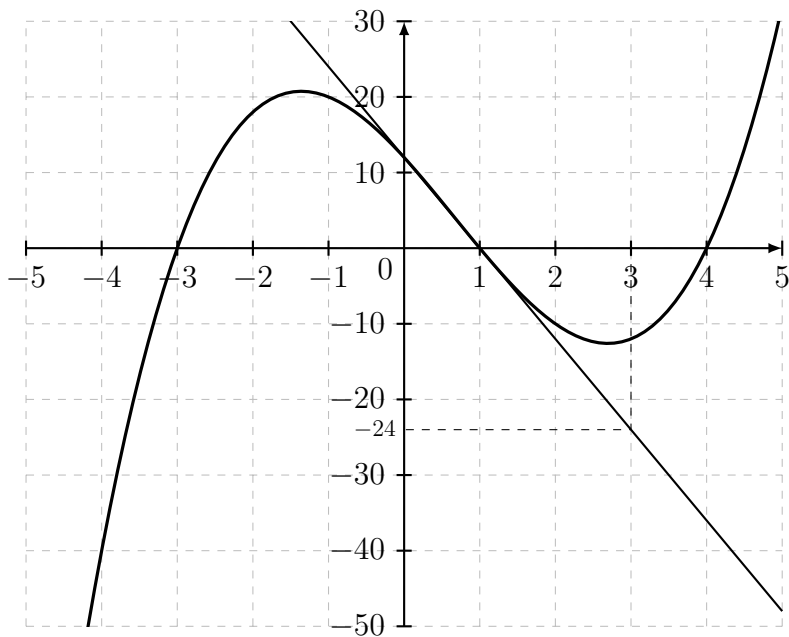
◆ Résoudre une équation

On souhaite résoudre l'équation : $x^3 + x + 3 = 0$.

- 1 Tracer la courbe représentative de la fonction f définie par $f(x) = x^3 + x + 3$ sur votre calculatrice et conjecturer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$.
- 2 Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.
- 3 En déduire le nombre exact de solutions de l'équation $f(x) = 0$.
- 4 À l'aide de votre calculatrice, déterminer une valeur approchée de cette ou ces solution(s) à 0,01 près.

◆ Lectures graphiques

On a représenté ci-dessous la courbe représentative d'une fonction f définie sur $[-5; 5]$ ainsi que sa tangente au point d'abscisse 1 sur laquelle se trouve le point de coordonnées $(3; -24)$.



Répondre par « Vrai » ou « Faux » aux questions suivantes :

- 1 L'équation $f(x) = 0$ admet exactement trois solutions sur $[-5; 5]$.
- 2 L'équation $f'(x) = 0$ admet exactement trois solutions sur $[-5; 5]$.
- 3 $f'(1) = -12$.
- 4 $f'(x) \leq 0$ sur $[-1; 2]$.

◆ Problème lié à l'économie

Une entreprise fabrique des voitures à hauteur de 10 000 par mois au maximum.

Pour x milliers de voitures fabriquées mensuellement, le coût total de production, exprimé en centaine d'euro, est donné par :

$$C(x) = 5x^3 - 40x^2 + 100x + 500.$$

Le marché est prêt à offrir un prix unitaire de 18 000 €.

1 Montrer que le bénéfice, exprimé en centaine d'euro, pour x quantité, est :

$$B(x) = -5x^3 + 40x^2 + 80x - 500.$$

2 Déterminer le nombre de voitures à fabriquer pour que le bénéfice soit maximal, puis préciser la valeur de ce bénéfice.

Le coût moyen de production, noté C_M , représentant le coût par unité produite, est donné par :

$$C_M(x) = \frac{C(x)}{x}$$

3 Montrer que $C'_M(x) = \frac{10}{x^2}(x^3 - 4x^2 - 50)$.

4 On pose $f(x) = x^3 - 4x^2 - 50$.

a. Étudier les variations de f sur $[0; 10]$.

b. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[0; 10]$, dont on précisera une valeur approchée à 0,001 près.

c. En déduire le signe de $C'_M(x)$ sur $]0; 10]$.

5 Déduire de la question **4** le sens de variation de C_M .

Pour quelle quantité de voitures le coût moyen est-il minimal ? Quel est alors ce coût ?

Le coût marginal représente la variation du coût total pour une unité supplémentaire de production. Le nombre de voitures est suffisamment grand pour accepter que ce coût soit donné par la formule :

$$C_m(x) = C'(x).$$

6 Déterminer l'expression de $C_m(x)$, puis calculer $C_m(\alpha)$. Que peut-on remarquer ?