

Les interrogos d'Hugo

Thème : la fonction exponentielle

◆ Questions de cours

On désigne par a et b deux nombres réels strictement positifs, et n un entier relatif.

Complète les égalités suivantes :

1

 $e^a \times e^b = e^{a+b}$

$$\boxed{3} \quad \left(e^a\right)^n = e^{\textcolor{red}{na}}$$

$$\boxed{2} \quad \frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$$

$$\boxed{4} \quad e^0 = 1$$

5 $e^a = e^b \iff a = b$

6

 $e^a > e^b \iff a > b$

7 La dérivée de la fonction $f(x) = e^x$ est $f'(x) = e^x$

◆ Application du cours

Écrire sous la forme d'une seule exponentielle les nombres suivants.

$$\boxed{1} \quad \frac{e^5 \times e^7}{e^{-12}} = e^{5+7-(-12)} = e^{24}$$

$$\boxed{4} \quad \frac{e^{8x} \times e^{2x}}{e^{3x}} - 2e^{7x} = e^{10x-3x} - 2e^{7x}$$

$$\boxed{2} \quad \frac{e^{-9} \times e^{11}}{e^2} = e^{-9+11-2} = e^0 = 1$$

$$\begin{aligned} &= e^{7x} - 2e^{7x} \\ &= -e^{7x} \end{aligned}$$

$$\boxed{3} \quad (e^5)^{-2} \times e^{11} = e^{5 \times (-2) + 11} = e^1 = e$$

◆ Équations et inéquations

Résoudre chacune des équations et inéquations suivantes, d'inconnue x .

$$\boxed{1} \quad e^{x+2} = 1 \iff e^{x+2} = e^0$$

$$\Leftrightarrow x + 2 = 0$$

$$\iff \boxed{x = -2}$$

$$\boxed{2} \quad \frac{e^{2x} \times e^x}{e^{7x}} - e^x = 0 \iff e^{2x+x-7x} = e^x$$

$$\Leftrightarrow e^{-4x} = e^x$$

$$\Leftrightarrow -4x = x$$

$$\iff \boxed{x = 0}$$

3 $e^{2x} - 4e^x + 3 \geq 0 \iff X^2 - 4X + 3 \geq 0 (*)$ en posant $X = e^x$

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 3 = 16 - 12 = 4$$

$$X_1 = \frac{4 - \sqrt{4}}{2} \quad \text{et} \quad X_2 = \frac{4 + \sqrt{4}}{2} > 0$$

$$X_1 = 1 \quad \text{et} \quad X_2 = 3$$

$$(*) \iff X^2 - 4X + 3 \geq 0 \text{ si } X \in]-\infty; 1] \cup [3; +\infty[$$

$$\Longleftrightarrow e^x \in]0; 1] \cup [3; +\infty[\text{ car } e^x > 0$$

$$\Longleftrightarrow x \in]-\infty; \ln 1] \cup [\ln 3; +\infty[$$

$$\iff x \in]-\infty; 0] \cup [\ln 3; +\infty[$$

$$\boxed{4} \quad e^{157x^3+895,75x-451,012} < 0.$$

Une exponentielle est TOUJOURS strictement positive donc cette inéquation, quelle que soit la valeur de l'exposant, n'a aucune solution.

◆ Étude d'une fonction exponentielle

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^{3x} - 3e^x.$$

- 1 Montrer que $f'(x)$ est du signe de $e^{2x} - 1$. e^{3x} est de la forme e^u avec $u(x) = 3x$; donc sa dérivée est $u'e^u = 3e^{3x}$. Donc :

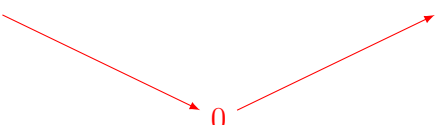
$$\begin{aligned} f'(x) &= 3e^{3x} - 3e^x \\ &= 3e^x(e^{2x} - 1) \end{aligned}$$

Or, $3e^x > 0$ pour tout x donc $f'(x)$ est du signe de $e^{2x} - 1$.

- 2 En déduire les variations de f sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} e^{2x} - 1 > 0 &\iff e^{2x} > 1 \\ &\iff e^{2x} > e^0 \\ &\iff 2x > 0 \\ &\iff x > 0 \end{aligned}$$

D'où le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$		-	+
$f(x)$			

- 3 Donner l'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse $a = 7$.

L'équation de la tangente au point d'abscisse a est donnée par la formule :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

Ici, $f'(a) = f'(7) = 3e^7(e^{14} - 1)$ et $f(7) = e^{21} - 3e^7$ donc cela donne :

$$y = 3e^7(e^{14} - 1)(x - 7) + e^{21} - 3e^7$$

En développant, on trouve :

$$y = 3e^7(e^{14} - 1)x - 21e^7(e^{14} - 1) + e^{21} - 3e^7$$

ou encore :

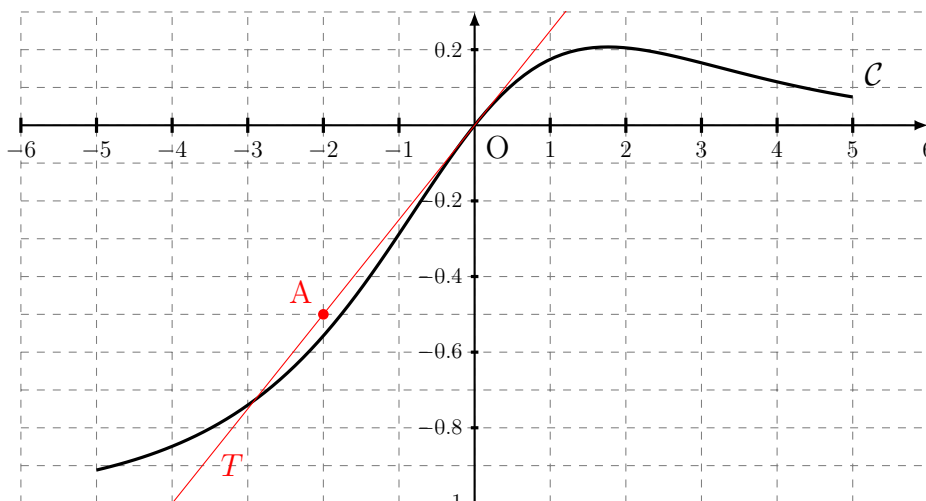
$$y = 3e^7(e^{14} - 1)x - 20e^{21} + 18e^7$$

que l'on peut aussi donner sous la forme :

$$y = 3\,956\,443\,913,55x - 26\,376\,294\,950,3$$

◆ QCM – Lectures graphiques

Voici la courbe représentative $\mathcal{C}$ d'une fonction f .



$\mathcal{C}$ passe par l'origine du repère.

T est la tangente à $\mathcal{C}$ en O .

Le point $A(-2; -0,5)$ est sur T .

Partie A

À l'aide du graphique, répondre aux questions suivantes.

- 1 Dresser le tableau de variation de f sur $[-5; 5]$.

x	-5	1,8	5
$f(x)$	-0,9	0,21	0,08

Les valeurs données en images dans ce tableau ne sont qu'approximatives.

- 2 Quelle est la valeur de $f'(0)$? De $f(0)$?

$f'(0)$ correspond au coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse $x = 0$, donc de T .

Cette tangente passe par les points $A(-2; -0,5)$ et $O(0; 0)$ donc son coefficient directeur est :

$$\frac{y_A - y_O}{x_A - x_O} = \frac{-0,5}{-2} = 0,25.$$

Ainsi, $f'(0) = 0,25$.

$f(0) = 0$ car $\mathcal{C}$ passe par $O(0; 0)$.

- 3 Quel est le signe de $f'(x)$ sur $[-5; -1]$?

Sur $[-5; -1]$, f est strictement croissante donc $f'(x) > 0$.

Partie B

La fonction f est définie par :

$$f(x) = \frac{e^{0,5x} - 1}{e^x + 1}$$

Un logiciel de calcul nous donne :

$$f'(x) = \frac{-0,5e^{1,5x} + 0,5e^{0,5x} + e^x}{(e^x + 1)^2}$$

1 Justifier que $f'(x)$ est du signe de $-e^x + 2e^{0,5x} + 1$.

En factorisant le numérateur de $f'(x)$ par $0,5e^{0,5x}$, on obtient :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{0,5e^{0,5x}(-e^{1,5x-0,5x} + 1 + 2e^{x-0,5x})}{(e^x + 1)^2} \\ &= \frac{0,5e^{0,5x}(-e^x + 1 + 2e^{0,5x})}{(e^x + 1)^2} \end{aligned}$$

Or $0,5e^{0,5x} > 0$ et $(e^x + 1)^2 > 0$ sur $\mathbb{R}$ donc $f'(x)$ est du signe de $-e^x + 1 + 2e^{0,5x}$.

2 On considère le polynôme $P(X) = -X^2 + 2X + 1$.

(a) Donner le signe de $P(X)$ sur $\mathbb{R}$.

$P(X)$ est un polynôme de degré 2 dont le discriminant est :

$$\Delta = 2^2 - 4 \times (-1) \times 1 = 4 + 4 = 8.$$

Il admet donc deux racines :

$$X_1 = \frac{-2 - \sqrt{8}}{-2} = \frac{-2 - 2\sqrt{2}}{-2} = 1 + \sqrt{2}$$

et sa conjuguée :

$$X_2 = 1 - \sqrt{2}.$$

D'où le tableau de signes suivant :

X	$-\infty$	$1 - \sqrt{2}$	$1 + \sqrt{2}$	$+\infty$	
$P(X)$	$-$	0	$+$	0	$-$

(b) Que vaut $P(e^{0,5x})$? En déduire le signe de $f'(x)$ sur $[-6; 6]$, puis les variations de f .

$P(e^{0,5x}) = -(e^{0,5x})^2 + 2e^{0,5x} + 1 = -e^x + 2e^{0,5x} + 1$ qui se trouve être l'expression dont dépend le signe de $f'(x)$ comme dit dans la question 1.

On a donc posé $X = e^{0,5x}$ et donc $X > 0$, d'où le tableau de signes suivant :

e^x	0	$1 + \sqrt{2}$	$+\infty$
$P(e^x)$	$+$	0	$-$

$$e^{0,5x} = 1 + \sqrt{2} \iff 0,5x = \ln(1 + \sqrt{2}) \iff x = 2 \ln(1 + \sqrt{2}) \approx 1,762$$

d'où :

x	-6	$2 \ln(1 + \sqrt{2})$	6
$f'(x)$	$+$	0	$-$
f			

Ceci correspond bien aux observations de la partie A (nous avons trouvé la valeur « 1,8 » au lieu de 1,762).