

Les interrogos d'Hugo

Thème : le logarithme népérien

◆ Questions de cours

On désigne par a et b deux nombres réels strictement positifs et n un entier relatif.

Complète les égalités suivantes :

$$\boxed{1} \quad \ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$$

$$\boxed{4} \quad \ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \ln a$$

$$\boxed{2} \quad \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$$

$$\boxed{5} \quad \ln 1 = 0$$

$$\boxed{3} \quad \ln(a^n) = n \ln a$$

$$\boxed{6} \quad \ln e = 1$$

7 $\ln a = \ln b \iff a = b$

8

 $\ln a > \ln b \iff a > b$

9 La dérivée de la fonction $f(x) = \ln(x)$ est $f'(x) = \frac{1}{x}$

◆ Application du cours

Écrire sous la forme la plus simplifiée les nombres suivants.

Pour la question **4**, tu pourras utiliser la formule suivante gros : $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n \times (n + 1)}{2}$.

$$\begin{aligned} 1 \quad & \ln 1024 - \ln 512 \\ &= \ln \frac{1024}{512} \\ &= \ln 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \boxed{3} \quad & 5 \ln(e^2) - 10 \\ &= 5 \times 2 \ln e - 10 \\ &= 5 \times 2 \times 1 - 10 \\ &= 10 - 10 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2 \quad & \ln 10\,000 + \ln 100 \\ &= \ln(10\,000 \times 100) \\ &= \ln(10^6) \\ &= 6 \ln 10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \boxed{4} \quad \ln(e \times e^2 \times e^3 \times \dots \times e^{30}) \\
 &= \ln(e^{1+2+3+\dots+30}) \\
 &= 1 + 2 + 3 + \dots + 30 \text{ car } \ln(e^X) = X \\
 &= \frac{30 \times (30 + 1)}{2} \text{ d'après la formule de l'énoncé} \\
 &= 15 \times 31 \\
 &= \underline{465}
 \end{aligned}$$

◆ « Vrai » ou « Faux » ?

Pour chacune des affirmations suivantes, dis si elle est vraie ou fausse en justifiant.

1 $\ln(3 + 5) = \ln 15$

FAUX. En effet, $\ln(3 + 5) = \ln 8$ et $\ln 8 \neq \ln 15$ car $8 \neq 15$.

$$\boxed{2} \quad \ln(2) \times \ln(3) = \ln 5$$

FAUX car $\ln 2 \times \ln 3$ ne peux pas se simplifier.

3 $\ln(2^{3^2}) = 9 \ln 2$

VRAI. En effet, $\ln(2^{3^2}) = \ln(2^9) = 9 \ln 2$ car $\ln(a^n) = n \ln a$.

4 La fonction $\ln$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

FAUX. La fonction $\ln$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ car $\ln x$ n'est défini que pour $x > 0$. En revanche, elle prend ses valeurs sur $\mathbb{R}$ car $\ln x$ peut prendre des valeurs variant de $-\infty$ à $+\infty$.

5 La courbe représentative de la fonction $\ln$ passe par le point de coordonnées $(1; 0)$.

VRAI car $\ln 1 = 0$.

6 La courbe représentative de la fonction $\ln$ passe par le point de coordonnées $(e; 1)$.

VRAI car $\ln e = 1$.

7 La tangente à la courbe représentative de la fonction $\ln$ qui passe par le point d'abscisse $x = 2$ a pour coefficient directeur $\ln 2$.

FAUX. En effet, le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative d'une fonction f au point d'abscisse a est égal à $f'(a)$. Or, $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ donc le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de la fonction $\ln$ au point d'abscisse 2 a pour coefficient directeur $\frac{1}{2}$.

◆ Étude d'une fonction logarithme

On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = x \ln x - x.$$

1 Montrer que $f'(x) = \ln x$.

La fonction f est une fonction « somme », donc de la forme :

$$f = g + h ,$$

avec :

$$g(x) = x \ln x \quad \text{et} \quad h(x) = -x.$$

Ainsi,

$$f' = g' + h'.$$

g est un produit, donc de la forme :

$$g = uv$$

avec :

$$u(x) = x \quad \text{et} \quad v(x) = \ln x ;$$

par conséquent,

$$g' = u'v + uv'$$

avec

$$u'(x) = 1 \quad \text{et} \quad v'(x) = \frac{1}{x}.$$

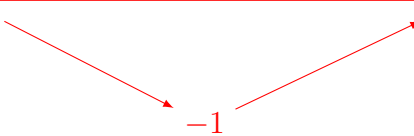
On a donc :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x} - 1 \\ &= \ln x + 1 - 1 \end{aligned}$$

$$\boxed{f'(x) = \ln x}$$

2 En déduire les variations de f sur $]0; +\infty[$.

Nous connaissons le signe de $\ln x$ sur $]0; +\infty[$ donc nous connaissons le signe de $f'(x)$, d'où le tableau suivant :

x	01 $+\infty$		
$f'(x)$		-0+	
$f(x)$			

3 Donner l'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse $a = e$.

L'équation de la tangente est donnée par la formule :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

où ici $a = e$, d'où :

$$y = \ln e(x - e) + e \ln e - e$$

Or,

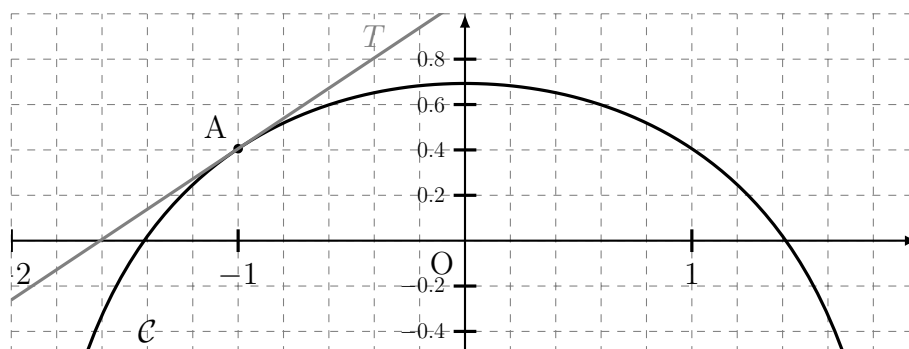
$$\ln e = 1$$

d'où :

$$y = x - 2e$$

♦ QCM – Lectures graphiques

Voici la courbe représentative $\mathcal{C}$ d'une fonction f .



Le point A est sur $\mathcal{C}$ et son abscisse est -1 .

T est la tangente à $\mathcal{C}$ en A.

Partie A

On sait que $f(x) = \ln(a - bx^2)$.

On admet que $f(1) = \ln \frac{3}{2}$ et que $f'(1) = -\frac{2}{3}$.

1 Justifier que :

$$f'(x) = \frac{-2bx}{a - bx^2}.$$

f est de la forme $\ln u$ avec $u(x) = a - bx^2$. Donc $u'(x) = -2bx$ et $f' = \frac{u'}{u}$, donc $f'(x) = \frac{-2bx}{a - bx^2}$.

2 Montrer que :

$$\begin{cases} a - b = \frac{3}{2} \\ \frac{b}{a - b} = \frac{1}{3} \end{cases}$$

D'après l'énoncé, $f(1) = \ln \frac{3}{2}$; or, en remplaçant x par 1 dans l'expression de $f(x)$, on trouve :

$$f(1) = \ln(a - b \times 1^2) = \ln(a - b)$$

et donc :

$$\ln(a - b) = \ln \frac{3}{2}$$

c'est-à-dire :

$$a - b = \frac{3}{2}$$

De plus, l'énoncé nous dit que $f'(1) = -\frac{2}{3}$; or, en remplaçant x par 1 dans l'expression de $f'(x)$, on a :

$$f'(1) = \frac{-2 \times 1}{a - b \times 1^2} = \frac{-2}{a - b}$$

donc :

$$\frac{-2}{a - b} = -\frac{2}{3}$$

et en multipliant chaque membre de cette dernière égalité, on a :

$$\frac{b}{a - b} = \frac{1}{3}$$

3 En déduire que $b = 0,5$, puis que $a = 2$.

Comme $a - b = \frac{3}{2}$, on peut écrire :

$$\frac{b}{a - b} = \frac{b}{\frac{3}{2}} = \frac{2b}{3}$$

Or, $\frac{b}{a - b} = \frac{1}{3}$ donc :

$$\frac{2b}{3} = \frac{1}{3} \quad \text{soit} \quad 2b = 1 \quad \text{c'est-à-dire} \quad b = \frac{1}{2} = 0,5.$$

On déduit alors de l'égalité $a - b = \frac{3}{2}$ que :

$$a = \frac{3}{2} + b = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = \frac{4}{2} = 2.$$

Finalement, $f(x) = \ln(2 - 0,5x^2)$.

- 4 Trouver les coordonnées des deux points d'intersection de la courbe $\mathcal{C}$ avec l'axe des abscisses.
Il faut ici résoudre l'équation $f(x) = 0$.

$$\begin{aligned}f(x) = 0 &\iff \ln(2 - 0,5x^2) = \ln 1 \\&\iff 2 - 0,5x^2 = 1 \\&\iff 1 = 0,5x^2 \\&\iff x^2 = 2 \\&\iff x = -\sqrt{2} \text{ ou } x = \sqrt{2}\end{aligned}$$

Ainsi, les deux points d'intersection de $\mathcal{C}$ avec l'axe des abscisses ont pour coordonnées $(-\sqrt{2}; 0)$ et $(\sqrt{2}; 0)$.

Partie B

Pour chacune des questions suivantes, une seule réponse est exacte. Laquelle ?

- 1 L'ordonnée de A est :

☐ $3 \ln 2$

☒ $\ln 3 - \ln 2$

☐ $\ln 6$

En effet, $f(-1) = f(1) = \ln(2 - 0,5 \times 1^2) = \ln 1,5 = \ln \frac{3}{2} = \ln 3 - \ln 2$.

- 2 Le coefficient directeur de T est :

☒ $\frac{2}{3}$

☐ $\ln 2 - \ln 3$

☐ $3 \ln 2$

En effet, le coefficient directeur de la tangente en A a pour coefficient directeur :

$$f'(-1) = \frac{-(-1)}{2 - 0,5 \times (-1)^2} = \frac{1}{1,5} = \frac{2}{3}.$$

- 3 La fonction dérivée f' de f est telle que :

☒ $f'(x) \geq 0$ sur $[-1, 8; 0]$

☐ $f'(x) \geq 0$ sur $[-1, 4; 1, 4]$

En effet, on voit sur le graphique que la courbe croît sur $[-1, 8; 0]$, ce qui signifie que la dérivée est positive sur cet intervalle.