

## Les interrogos d'Hugo

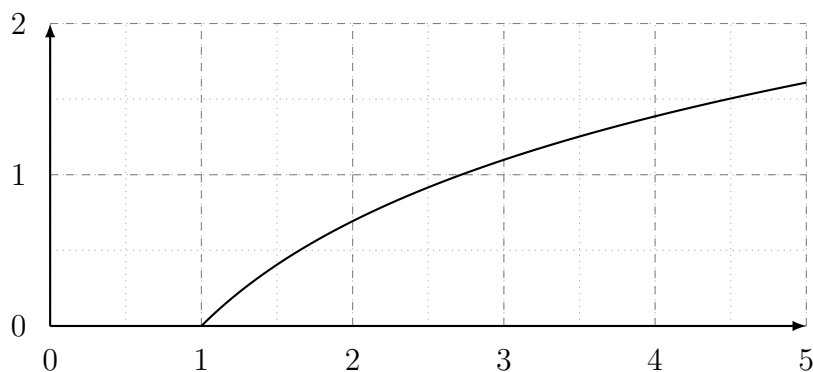
*Thème : primitives & intégration*

## ◆ Questions de cours

Complète les propositions suivantes :

- 1 Une primitive de la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \frac{1}{x}$  est la fonction  $F$  définie par  $F(x) = \ln x$
- 2 Une primitive de la fonction  $f$  définie par  $f(x) = e^x$  est la fonction  $F$  définie par  $F(x) = e^x$
- 3 Une primitive de la fonction  $f$  définie par  $f(x) = x^n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) est la fonction  $F$  définie par  $F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$
- 4 Une primitive de la fonction  $f$  définie par  $f(x) = -\frac{1}{x^2}$  est la fonction  $F$  définie par  $F(x) = \frac{1}{x}$
- 5 Si  $f$  est une fonction de primitive  $F$  sur un intervalle  $[a; b]$  de  $\mathbb{R}$  alors  $\int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a)$
- 6 La valeur moyenne d'une fonction  $f$  sur un intervalle  $[a; b]$  de  $\mathbb{R}$  est  $\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \, dx$

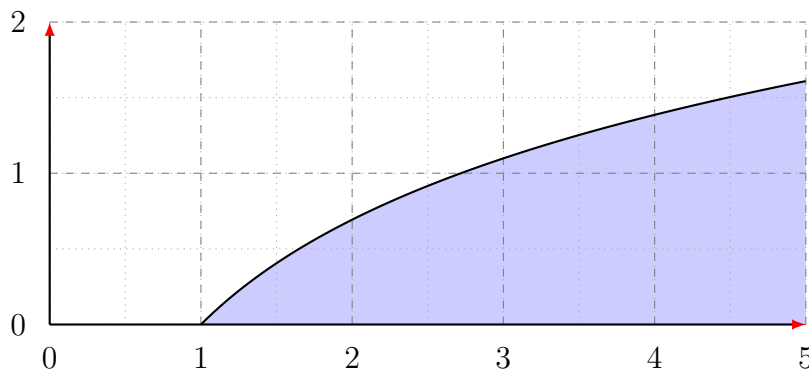
## ◆ Lecture graphique



On a représenté ci-contre la courbe représentative de la fonction  $\ln$  sur  $[1; 5]$ .

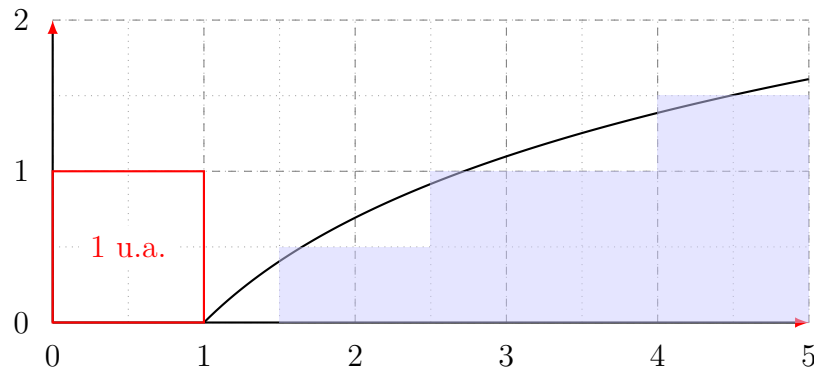
- 1** Donner une méthode pour avoir une valeur approchée de  $\int_1^5 \ln x \, dx$ .

Sur  $[1; 5]$ ,  $\ln x \geqslant 0$  donc  $\int_1^5 \ln x \, dx$  correspond à l'aire entre l'axe des abscisses et la courbe sur cet intervalle :

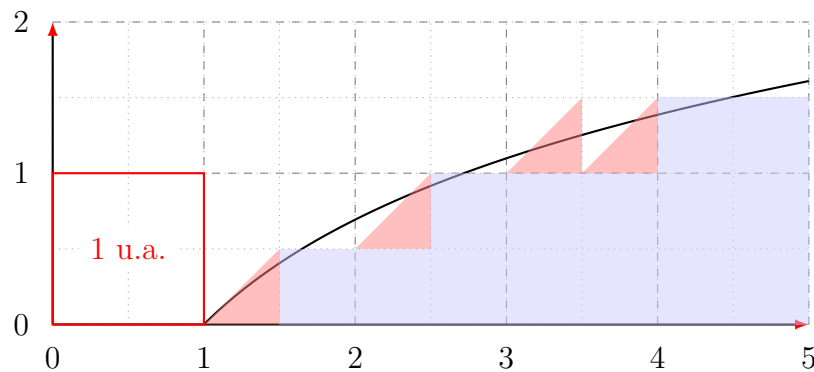


Ainsi, pour avoir une valeur approchée de  $\int_1^5 \ln x \, dx$  sur  $[1; 5]$ , on peut compter les carrés de côtés 0,5 (attention aux unités) sous la courbe (quitte à prendre aussi ceux qui « débordent » un peu de la courbe) :

2 Donner alors une valeur approchée à 0,5 unité d'aire près.



puis on considère les moitiés de carrés qui restent sous la courbe :



Il y a en tout :

- 14 petits carrés bleus
- 4 moitiés de petits carrés, donc 2 carrés bleus

donc 16 carrés bleus. Or, un carré bleu représente un quart d'unité d'aire (un quart d'un carré de côté 1).

L'aire sous la courbe est donc à peu près égale à  $\frac{16}{4} = 4$  unités d'aire.

## ◆ Une primitive de la fonction $\ln$

On pose  $f(x) = \ln x$  et  $F(x) = x \ln x - x$  pour tout  $x > 0$ .

1 Vérifier que  $F$  est une primitive de  $f$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

$F$  est une primitive de  $f$  si  $F'(x) = f(x)$ .

$x \ln x$  est un produit, donc de la forme  $u \times v$  avec  $u(x) = x$  et  $v(x) = \ln x$ . Donc  $u'(x) = 1$  et  $v'(x) = \frac{1}{x}$ .

$$\begin{aligned} \text{Ainsi, } F'(x) &= (x \ln x)' - (x)' \\ &= 1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x} - 1 \\ &= \ln x + 1 - 1 \\ &= \ln x \\ &= f(x). \end{aligned}$$

$F$  est donc une primitive de  $f$ .

- 2 Donner alors une valeur approchée à 0,01 près de  $\int_1^5 f(x) \, dx$ .

$$\begin{aligned}\int_1^5 f(x) \, dx &= F(5) - F(1) \\ &= (5 \ln 5 - 5) - (1 \ln 1 - 1) \\ &= 5 \ln 5 - 5 + 1 \\ &= 5 \ln 5 - 4 \\ &\approx 4,05.\end{aligned}$$

On n'est pas loin du tout de ce que l'on a obtenu dans l'exercice précédent !

### ◆ Bénéfice moyen d'une entreprise

Une entreprise fabrique  $x$  milliers d'objets où  $x$  est compris entre 0 et 5.

Le bénéfice de cette entreprise est donné, en euros, pour  $x \in [0; 5]$ , par la fonction :

$$B(x) = xe^x - e^x - 8.$$

- 1 Étudier la fonction  $B$  sur  $[0; 5]$ .

$$\begin{aligned}B'(x) &= 1 \times e^x + x \times e^x - e^x \\ &= xe^x > 0 \text{ sur } [0; 5]\end{aligned}$$

Donc  $B$  est strictement croissante sur  $[0; 5]$ .

- 2 Montrer que la fonction  $P$  définie par  $P(x) = xe^x - 2e^x - 8x$  est une primitive de  $B$ .

$$\begin{aligned}P'(x) &= 1 \times e^x + x \times e^x - 2e^x - 8 \\ &= e^x + xe^x - 2e^x - 8 \\ &= xe^x - e^x - 8 \\ &= B(x).\end{aligned}$$

Donc  $P$  est bien une primitive de  $B$ .

- 3 En déduire le bénéfice moyen de l'entreprise sur  $[0; 5]$ .

Le bénéfice moyen de l'entreprise sur  $[0; 5]$  est la valeur moyenne de la fonction  $B$  sur  $[0; 5]$ .

$$\begin{aligned}\mu &= \int_0^5 B(x) \, dx \\ &= P(5) - P(0) \\ &= (5e^5 - 2e^5 - 8 \times 5) - (0e^0 - 2e^0 - 8 \times 0) \\ &= 3e^5 - 40 + 2 \\ &= 3e^5 - 38 \\ &\approx 407,24\end{aligned}$$

Le bénéfice moyen est donc d'à peu près 407 € pour 5 000 objets fabriqués.

- 4 On appelle  $\mu(x)$  la fonction qui donne le bénéfice moyen de l'entreprise pour  $x$  milliers d'objets fabriqués,  $x > 0$ .

(a) Exprimer  $\mu(x)$  en fonction de  $P(x)$ .

$$\text{Par définition, } \mu(x) = \int_0^x B(t) \, dt = P(x) - P(0) = P(x) + 2.$$

- (b) Le bénéfice moyen admet-il un maximum ? Un minimum ? Si oui, pour quelle valeur de  $x$  ? Quel est alors le bénéfice moyen ?

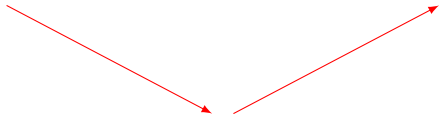
Pour savoir si  $\mu$  admet un maximum ou un minimum, il faut étudier son sens de variation, donc calculer  $\mu'(x)$ .

Or,  $\mu(x) = P(x) + 2$  donc  $\mu'(x) = P'(x) = B(x)$ . Il faut donc trouver le signe de  $B(x)$ .

Nous savons que  $B$  est strictement croissante (d'après la question 1).

De plus,  $B(0) = -9 < 0$  et  $B(5) \approx 586 > 0$ .  $B$  étant continue sur  $[0; 5]$ , d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe une valeur  $\alpha$  dans  $[0; 5]$  telle que  $B(\alpha) = 0$ .

On a alors le tableau suivant :

| $x$              | 0                                                                                  | $\alpha$ | $+\infty$ |
|------------------|------------------------------------------------------------------------------------|----------|-----------|
| $B(x) = \mu'(x)$ | -                                                                                  | 0        | +         |
| $\mu(x)$         |  |          |           |

À l'aide de la calculatrice, on trouve que  $\alpha \approx 2,04$  et  $\mu(\alpha) \approx -14$ .

- (c) Pour quelles valeurs de  $x$  le bénéfice moyen est-il positif ?

La fonction  $\mu$  est continue et strictement croissante sur  $[\alpha; +\infty[$ . De plus,  $\mu(\alpha) < 0$  et  $\mu(5) \approx 407$  (d'après la question 3). Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe une valeur de  $x$  sur  $[\alpha; 5]$  pour laquelle  $\mu(x) = 0$ .

À la calculatrice, on trouve  $x \approx 3,0564$ .

Donc pour au moins 3 057 objets fabriqués, la valeur moyenne du bénéfice est positive.