♦ Questions de cours

Complète les propositions suivantes :

1. Soient A un événement de probabilité $\mathrm{P}(\mathrm{A})$ et $\overline{\mathrm{A}}$ son événement contraire.
Alors, $\mathrm{P}\left(\overline{\mathrm{A}}\right) = 1 - \mathrm{P}(\mathrm{A})$.

2. Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n\,;p)$.
Alors, pour un certain entier k compris entre 0 et n, $\mathrm{P}(\mathrm{X}=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

3. Soient A et B deux événements d'un même univers.
La probabilité que B se réalise sachant que A est réalisé est : $\mathrm{P}_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) = \dfrac{\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})}{\mathrm{P}(\mathrm{A})}$

♦ Application du cours

On dispose d'un lot de 320 livres, dont 75 sont des romans de science-fiction. On choisit au hasard un livre et on note :

- A l'événement : « le livre choisi a plus de 300 pages » ;
- S l'événement : « le livre choisi est un roman de science-fiction ».

On sait que $\mathrm{P}(\mathrm{A}) = 0,321$ et qu'il y a 30 romans de science-fiction ayant plus de 300 pages.

1. Calculer la probabilité que le livre choisi ait au plus 300 pages.
« Le livre a au plus 300 pages » signifie que le livre a moins de 300 pages, ou 300 pages.
C'est donc l'événement contraire de l'événement A. Ainsi,

$$\mathrm{P}\left(\overline{\mathrm{A}}\right) = 1 - \mathrm{P}(\mathrm{A}) = 1 - 0,321 = 0,679.$$

<u>Le probabilité que le livre choisi ait au plus 300 pages est donc égale à 0,679.</u>

2. Calculer la probabilité que le livre choisi soit un roman de science-fiction sachant qu'il a plus de 300 pages.
On cherche à calculer $\mathrm{P}_{\mathrm{A}}(\mathrm{S})$:

$$\mathrm{P}_{\mathrm{A}}(\mathrm{S}) = \frac{\mathrm{P}(\mathrm{S}\cap\mathrm{A})}{\mathrm{P}(\mathrm{A})} = \frac{\frac{30}{320}}{0,321} \approx 0,292.$$

<u>La probabilité que le livre choisi soit un roman de science-fiction sachant qu'il a plus de 300 pages est égale à 0,292.</u>

♦ Formalisation

Pour rencontrer des filles, Thomas Le Goujat utilise depuis 12 mois une application sur son smartphone. Il a remarqué que sur les 85 filles rencontrées,

- 3 étaient rousses, dont 2 avaient les yeux clairs ;
- 23 étaient blondes, dont 18 avaient les yeux clairs ;
- les autres avaient les cheveux noirs, dont 18 avaient les yeux clairs.

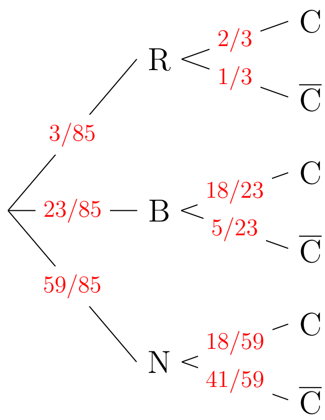
Thomas souhaite reprendre contact avec l'une de ces filles en la choisissant au hasard. On note :

- R l'événement : « la fille choisie est rousse » ;
- B l'événement : « la fille choisir est blonde » ;

— N l'événement : « la fille choisir a les cheveux noirs » ;

— C l'événement : « la fille choisie a les yeux clairs ».

1 Compléter l'arbre de probabilités suivant :



2 Montrer que $P(R \cap C) \approx 0,024$.

$$\begin{aligned} P(R \cap C) &= P(R) \times P_R(C) \\ &= \frac{3}{85} \times \frac{2}{3} \\ &= \frac{2}{85} \\ \end{aligned}$$

$$\boxed{P(R \cap C) \approx 0,024}$$

3 Montrer que $P(C) \approx 0,447$.

D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} P(C) &= P(C \cap R) + P(C \cap B) + P(C \cap N) \\ &= \frac{2}{85} + \frac{23}{85} \times \frac{18}{23} + \frac{59}{85} \times \frac{18}{59} \\ &= \frac{2}{85} + \frac{18}{85} + \frac{18}{85} \\ &= \frac{38}{85} \end{aligned}$$

$$\boxed{P(C) \approx 0,447}$$

4 La fille choisie a les yeux clairs. Calculer la probabilité que ce soit une fille aux cheveux noirs.

On souhaite calculer $P_C(N)$:

$$\begin{aligned} P_C(N) &= \frac{P(N \cap C)}{P(C)} \\ &= \frac{\frac{18}{85}}{\frac{38}{85}} \\ &= \frac{18}{85} \times \frac{85}{38} \\ &= \frac{18}{38} \end{aligned}$$

$$\boxed{P_C(N) \approx 0,474}$$

5 Thomas décide de choisir 10 filles. On assimile ces choix à un tirage sans remise.

Notons X la variable aléatoire représentant le nombre de filles aux yeux clairs choisies par Thomas.

X suit la loi binomiale de paramètres $n = 10$ (car on répète indépendamment le choix 10 fois) et $p = 0,447$ (la probabilité que la fille choisie ait les yeux clairs).

À l'aide de la calculatrice, calculer la probabilité qu'il choisisse :

(a) exactement 8 filles aux yeux clairs.

On doit calculer $\mathrm{P}(\mathrm{X} = 8) = \binom{10}{8} \times 0,447^{8} \times (1 - 0,447)^{10-8}$.

On trouve 0,022 à la calculatrice.

(b) au plus 5 filles aux yeux clairs.

On cherche $\mathrm{P}(\mathrm{X} \leqslant 5)$.

On trouve à la calculatrice 0,745.

(c) au moins 3 filles aux yeux clairs.

On cherche $\mathrm{P}(\mathrm{X} \geqslant 3) = 1 - \mathrm{P}(\mathrm{X} \leqslant 2)$.

On trouve à la calculatrice 0,897.

(d) Combien, en moyenne, pourra-t-il espérer choisir de filles aux yeux clairs ?

L'espérance mathématique de X est : $\mathbb{E}(\mathrm{X}) = np = 10 \times 0,447 = 4,47$.

Ainsi, Thomas peut espérer choisir entre 4 et 5 filles aux yeux clairs.