

Les interrogos d'Hugo

Thème : les suites

◆ Questions de cours

Complète les propositions suivantes :

- 1 Si $(u_n)_{n \geq 0}$ est une suite arithmétique de raison r alors $u_{n+1} = u_n + r$.
- 2 Si $(u_n)_{n \geq 0}$ est une suite géométrique de raison q alors $u_{n+1} = q \times u_n$.
- 3 Le terme général de la suite géométrique (u_n) de premier terme u_0 et de raison q est $u_n = u_0 \times q^n$.
- 4 Si $q \neq 1$, la somme $1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^n$ est égale à $\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$ ou $\frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$.
- 5 Si (u_n) est une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 alors :

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

- 6 La limite de la suite géométrique (u_n) de raison $q > 0$ est égale à 0 si $0 < q < 1$.

◆ Application du cours

- 1 La suite (u_n) telle que $u_2 = 7$, $u_3 = 14$ et $u_4 = 28$ peut-elle être arithmétique ? Justifier.
 $u_3 - u_2 = 14 - 7 = 7$ et $u_4 - u_3 = 28 - 14 = 14$ donc la suite ne peut pas être arithmétique car il faudrait pour cela que $u_{n+1} - u_n$ soit constant, quelle que soit la valeur de n .
- 2 La suite (u_n) telle que $u_2 = 7$, $u_3 = 14$ et $u_4 = 28$ peut-elle être géométrique ? Justifier.
 $\frac{u_3}{u_2} = \frac{14}{7} = 2$ et $\frac{u_4}{u_3} = \frac{28}{14} = 2$ donc la suite peut être géométrique. Mais attention : elle ne l'est pas nécessairement car nous n'avons aucune information sur les autres termes.
- 3 La suite (v_n) est géométrique. On sait que sa raison est $q = 0,7$ et que son premier terme est $u_1 = 5$.
 (a) Écrire le terme général de cette suite en fonction de n .
 $v_n = u_1 \times q^{n-1}$ donc $u_n = 5 \times 0,7^{n-1}$.
 (b) Quelle est la limite de (v_n) ?
 La raison est comprise entre 0 et 1 donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

◆ Formalisation

Une ville « test » est composée de 100 000 habitants. Chaque mois, 5 % des habitants la quittent. On considère la suite (u_n) où u_n , exprimé en milliers, représente le nombre d'habitants dans cette ville au n -ième mois. On a donc $u_0 = 100$.

- Calculer u_1 puis u_2 .
Si 5 % des habitants quittent la ville, il en reste 95 %.
Ainsi, $u_1 = 0,95 \times u_0 = 0,95 \times 100$. Donc $u_1 = 95$.
De même, $u_2 = 0,95 \times 95 = 90,25$.
- Montrer que (u_n) est géométrique ; préciser alors sa raison.
Une réduction de 5 % revient à multiplier par 0,95 donc $u_{n+1} = 0,95u_n$.
Ainsi, (u_n) est géométrique de raison $q = 0,95$.

3 Exprimer u_n en fonction de n .

D'après la formule du cours, $u_n = u_0 \times q^n$ donc $u_n = 100 \times 0,95^n$.

4 À partir de quel mois le nombre d'habitants sera inférieur ou égal à 50 000 ?

On cherche n tel que $u_n \leq 50$.

1^{re} méthode : avec le logarithme népérien.

$$\begin{aligned}u_n \leq 50 &\iff 100 \times 0,95^n \leq 50 \\&\iff 0,95^n \leq \frac{50}{100} = 0,5 \\&\iff \ln(0,95^n) \leq \ln(0,5) \\&\iff n \times \ln(0,95) \leq \ln(0,5) \\&\iff n \geq \frac{\ln(0,5)}{\ln(0,95)} \quad \text{car } \ln(0,95) < 0 \\&\iff n \geq 13,51\end{aligned}$$

n étant un entier, nous en déduisons que c'est à partir du 14^e mois que le nombre d'habitants de cette ville sera inférieur à 50 000.

2^e méthode : avec la calculatrice.

CASIO

- [MENU] → RECUR [8] (mode « suites »)
- $a_{n+1} = 0.95a_n$
(pour écrire « a_n » appuyer sur [F2])
- Appuyer sur [EXE]
- Appuyer sur [F5] (SET)
- Entrer les valeurs suivantes :
Start : 0
End : 50 (une valeur assez grande mais pas trop)
 a_0 : 100
- Appuyer sur la touche [EXIT]
- Appuyer sur [F6] (Table)
- Descendre jusqu'à ce que a_{n+1} soit plus petit que 50 ; on voit que :
pour $n + 1 = 13$, $a_{n+1} = 51.334$ et
pour $n + 1 = 14$, $a_{n+1} = 48.767$ donc c'est pour un indice égal à 14 que le terme de la suite est plus petit que 50.

TI

- Appuyer sur [MODE]
- Ligne 4 : sélectionner « Seq »
- Appuyer sur [Y=] puis entrer :
 $nMin = 0$ [ENTER]
 $u(n) = 0.95 * u(n - 1)$ [ENTER]
(pour écrire u , faites [2nd][7] et pour écrire n , appuyer sur la touche [X,T,θ,n])
 $u(nMin) = 100$ [ENTER]
- [2nd] [WINDOW] (TBLSET)
TblStart : 0
 $\Delta Tbl = 1$
- [2nd] [GRAPH] (TABLE)
- Descendre jusqu'à ce que $u(n)$ soit plus petit que 50 ; on voit que :
pour $n = 13$, $u(n) = 51.334$ et
pour $n = 14$, $u(n) = 48.767$ donc c'est pour un indice égal à 14 que le terme de la suite est plus petit que 50.

5 Compléter l'algorithme suivant afin qu'il affiche le résultat trouvé à la question 4 :

Initialisation :	n prend la valeur 0 u prend la valeur 100 000
Traitement :	Tant que $u > 50$ u prend la valeur $0.95 \times u$ n prend la valeur $n + 1$ Fin du Tant que
Sortie :	Afficher n

Après un « Tant que », on met toujours la condition contraire de ce que l'on veut : ici, on veut que $u_n \leq 50$ donc on met : « Tant que $u > 50$ »

Dans la boucle, on met toujours la formule de récurrence ; comme $u_{n+1} = 0,95 \times u_n$, on met « u prend la valeur $0.95 \times u$ ».

◆ Formalisation (bis)

En janvier 2016, une personne se décide à acheter un scooter coûtant 5 700 euros sans apport personnel. Le vendeur lui propose un crédit à la consommation d'un montant de 5 700 euros, au taux mensuel de 1,5 %. Par ailleurs, la mensualité fixée à 300 euros est versée par l'emprunteur à l'organisme de crédit le 25 de chaque mois. Ainsi, le capital restant dû augmente de 1,5 % puis baisse de 300 euros.

Le premier versement a lieu le 25 février 2016.

On note u_n le capital restant dû en euros juste après la n -ième mensualité (n entier naturel non nul).

On convient que $u_0 = 5\,700$.

Les résultats seront donnés sous forme approchée à 0,01 près si nécessaire.

- 1 (a) Démontrer que u_1 , capital restant dû au 26 février 2016 juste après la première mensualité, est de 5 485,50 euros.

$$u_1 = u_0 \times 1,015 - 300 \text{ (car } u_0 \text{ augmente de 1,5 \% puis baisse de 300 €).}$$

$$\text{Ainsi, } u_1 = 5\,700 \times 1,015 - 300 = 5\,485,5.$$

- (b) Calculer u_2 .

De la même façon on a :

$$\begin{aligned} u_2 &= u_1 \times 1,015 - 300 \\ &= 5\,485,5 \times 1,015 - 300 \end{aligned}$$

$$u_2 = 5\,267,78$$

- 2 On admet que la suite (u_n) est définie pour tout entier naturel n par :

$$u_{n+1} = 1,015u_n - 300$$

On considère l'algorithme suivant :

Variables :	n est un entier naturel u est un nombre réel
Traitement :	Affecter à u la valeur 5 700 Affecter à n la valeur 0 Tant que $u > 4\,500$ faire u prend la valeur $1,015 \times u - 300$ n prend la valeur $n + 1$ Fin Tant que
Sortie :	Afficher n

- (a) Recopier et compléter le tableau ci-dessous en ajoutant autant de colonnes que nécessaires entre la deuxième et la dernière colonne.

Valeur de u	5700	5485,5	5267,78	5046,80	4822,50	4594,84	4363,76
Valeur de n	0	1	2	3	4	5	6
$u > 4500$	vrai	vrai	vrai	vrai	vrai	vrai	faux

- (b) Quelle valeur est affichée à la fin de l'exécution de cet algorithme ?

Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

L'algorithme affiche la première valeur de n pour laquelle $u < 4500$ donc $n = 6$.

Cela signifie qu'à partir de la 6^e mensualité, le montant à rembourser sera inférieur à 4 500 €.

3 Soit la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 20\,000$.

(a) Montrer que pour tout entier naturel n , on a : $v_{n+1} = 1,015 \times v_n$.

$$\begin{aligned}v_{n+1} &= u_{n+1} - 20\,000 \\&= 1,015u_n - 300 - 20\,000 \\&= 1,015u_n - 20\,300 \\&= 1,015 \left(u_n - \frac{20\,300}{1,015} \right) \quad (\text{on a ici factorisé par } 1,015) \\&= 1,015(u_n - 20\,000) \\&\boxed{v_{n+1} = 1,015 \times v_n}\end{aligned}$$

(b) En déduire que pour tout entier naturel n , on a :

$$u_n = 20\,000 - 14\,300 \times 1,015^n.$$

D'après la question précédente, on déduit que la suite (v_n) est géométrique de raison $q = 1,015$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 20\,000 = 5\,700 - 20\,000 = -14\,300$. Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = v_0 \times q^n = -14\,300 \times 1,015^n,$$

et donc, à partir de l'égalité : $v_n = u_n - 20\,000$, on en déduit :

$$u_n = v_n + 20\,000$$

soit :

$$\boxed{u_n = 20\,000 - 14\,300 \times 1,015^n}$$

4 À l'aide de la réponse précédente, répondre aux questions suivantes :

(a) Démontrer qu'une valeur approchée du capital restant dû par l'emprunteur au 26 avril 2017 est 2 121,68 euros.

Au 26 avril 2017, $n = 15$ et $u_{15} = 20\,000 - 14\,300 \times 1,015^{15} \approx 2\,121,68$.

(b) Déterminer le nombre de mensualités nécessaires pour rembourser intégralement le prêt. On cherche n pour que $u_n \leq 0$ à l'aide du logarithme :

$$\begin{aligned}u_n &\leq 0 \\&\iff 20\,000 - 14\,300 \times 1,015^n \leq 0 \\&\iff -14\,300 \times 1,015^n \leq -20\,000 \\&\iff 14\,300 \times 1,015^n \geq 20\,000 \\&\iff 1,015^n \geq \frac{20\,000}{14\,300} \\&\iff 1,015^n \geq 1,4 \\&\iff \ln(1,015^n) \geq \ln(1,4) \\&\iff n \ln(1,015) \geq \ln(1,4) \\&\iff n \geq \frac{\ln(1,4)}{\ln(1,015)} \\&\iff n \geq 22,56\end{aligned}$$

Il faudra donc 23 mois pour rembourser la totalité du crédit.

N.B. si le logarithme népérien n'a pas encore été vu en classe, utiliser la méthode par calculatrice (voir corrigé de l'exercice précédent).

(c) Quel sera le montant de la dernière mensualité ?

$u_{22} \approx 157,84$ donc la dernière mensualité sera de $157,84 \times 1,015 = 160,21$ €.

- (d) Lorsque la personne aura terminé de rembourser son crédit à la consommation, quel sera le coût total de son achat ?

L'acheteur verse 300 € pendant 22 mois, puis 160,21 €.

Le coût total est donc :

$$300 \times 22 + 160,21 = \underline{6\,760,21 \text{ €}}.$$