

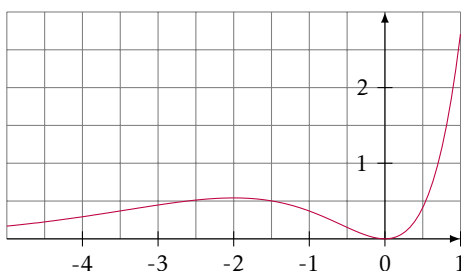
Pour réviser son bac ES

Disponible sur <http://www.mathweb.fr>

14 juin 2016

Fonctions

1. Trouver la dérivée de la fonction f définie par $f(x) = \ln(x^2 + 3)$.
2. Trouver la dérivée de la fonction g définie par $g(x) = x \ln x - x$.
3. Trouver la dérivée de la fonction h définie par $h(x) = xe^{2x-1}$.
4. Résoudre l'équation $\ln(2x + 3) + \ln(x) = 0$.
5. Résoudre l'inéquation $3 \times 0,8^n < 0,5$.
6. Résoudre l'inéquation $(3x - 4)e^{2x+3} \geq 0$.
7. Écrire le nombre $\frac{e^2 \times e^8}{e^3}$ sous la forme d'une unique exponentielle.
8. Écrire le nombre $\ln 4 - \ln \sqrt{2}$ sous la forme d'un unique logarithme.
9. Calculer $\int_0^1 (x + e^x) dx$.
10. Calculer $\int_0^1 \frac{3e^x}{e^x + 2} dx$.
11. Calculer $\int_0^1 e^{-3x+7} dx$.
12. Montrer que la fonction $F(x) = x \ln x - x$ est une primitive de la fonction $f(x) = \ln x$.
13. « La courbe représentative de la fonction définie par $f(x) = x^2 e^x$ admet un unique point d'inflexion. »
Cette affirmation est-elle exacte ?
14. On donne la courbe représentative d'une fonction f . Les affirmations sont-elles exactes ?



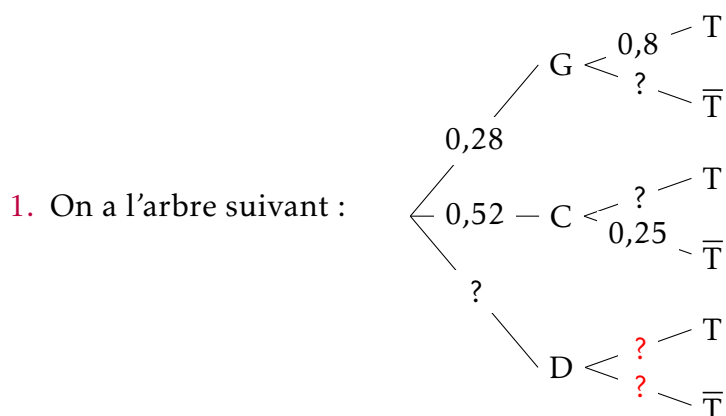
- a. $6 \leq \int_{-4}^1 f(x) dx \leq 10$
- b. F (primitive de f) est croissante sur $[-4; 1]$.
- c. $f''(x) < 0$ sur $[-1; 0]$.
- d. $f'(x) = 0$ admet une unique solution sur $[-4; 1]$.
- e. $f'(x) > 0$ sur $[-4; 1]$.

Suites

- (u_n) est une suite géométrique de premier terme $u_0 = 3$ et de raison $q = 4$.
Exprimer u_n en fonction de n .
- (v_n) est une suite géométrique de premier terme $v_1 = 9$ et de raison $q = \frac{1}{3}$.
Exprimer v_n en fonction de n .
- La suite (a_n) est définie par $a_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n , $a_{n+1} = 0,5a_n + 5$.
On pose $v_n = a_n - 10$.
 - Montrer que (v_n) est géométrique.
 - En déduire v_n en fonction de n , puis a_n en fonction de n .
 - Compléter l'algorithme suivant afin qu'il affiche le premier entier n tel que $a_n > 9$.

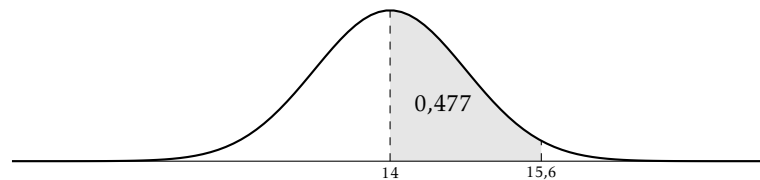
Variables :	n entier naturel a réel
Initialisation :	n prend la valeur 0 a prend la valeur 1
Traitement :	Tant que ... faire a prend la valeur ... n prend la valeur $n + 1$ Fin du Tant que
Sortie :	Afficher ...

Probabilités



- Que vaut $P(D)$?
 - Que vaut $P_G(\bar{T})$ et $P_C(T)$?
 - On sait que $P(T) = 0,674$. Que vaut alors $P_D(T)$ et $P_D(\bar{T})$?
 - Calculer alors $P_T(C)$.
- Un sac contient 100 000 billes ; 47 % sont bleues et les autres sont rouges. On tire au hasard avec remise 40 billes de ce sac. On note X la variable aléatoire représentant le nombre de billes bleues tirées à l'issue de ce tirage.
 - Calculer $P(X = 20)$.
 - Calculer $P(X \geq 1)$.

- c. Sur les 40 billes tirées, 17 sont bleues. Peut-on considérer que ce lot est représentatif de ce qu'il y a dans le sac de billes ?
3. Louis-Mokthar attend son ami. Il sait qu'il arrivera au plus tard dans 30 minutes. On appelle X la variable aléatoire représentant sa durée d'attente en minutes. Quelle est la probabilité qu'il attende plus de 10 minutes ?
4. Une variable aléatoire X suit la loi normale de moyenne $\mu = 14$ et d'écart-type σ tel que $P(20 \leq X \leq 15,6) = 0,477$.
La représentation de sa fonction de densité est la suivante :



- a. Calculer σ .
- b. Calculer $P(X \geq 17)$.
5. Soit un échantillon de population de taille n sur lequel 48 % des personnes ont l'intention de voter pour le candidat A. Donner le plus petit entier n tel que l'amplitude de l'intervalle de confiance soit inférieur ou égale à 0,1.

Corrigé

Les corrections sont sommaires car il est plus important de retenir l'idée que la forme.

Fonctions

1. $f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 3}$.
2. $g'(x) = 1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x} - 1 = \ln x$.
3. $h(x) = e^{2x-1} + x \times 2e^{2x-1} = (1 + 2x)e^{2x-1}$.
4. $\ln(2x + 3) + \ln x = \ln[x(2x + 3)] = \ln(2x^2 + 3x)$ donc l'équation est équivalente à :
 $\ln(2x^2 + 3x) = \ln 1$, soit $2x^2 + 3x - 1 = 0$. $x = 1$ est une solution évidente, d'où $x = -\frac{1}{2}$ est l'autre solution.
5. $3 \times 0,8^n < 0,5 \iff 0,8^n < \frac{0,5}{3}$
 $\iff \ln 0,8^n < \ln \frac{1}{6}$
 $\iff n \ln 0,8 < -\ln 6$
 $\iff n > -\frac{\ln 6}{\ln 0,8}$ car $\ln 0,8 < 0$
6. $3x - 4 \geq 0 \iff x \geq \frac{4}{3}$ et $e^{2x+3} > 0$ pour tout x donc l'ensemble solution est l'ensemble des x tels que $x \geq \frac{4}{3}$.
7. $\frac{e^2 \times e^8}{e^3} = \frac{e^{2+8}}{e^3} = \frac{e^{10}}{e^3} = e^{10-3} = e^7$.
8. $\ln 4 - \ln \sqrt{2} = \ln(2^2) - \frac{1}{2} \ln 2 = 2 \ln 2 - \frac{1}{2} \ln 2 = \left(2 - \frac{1}{2}\right) \ln 2 = \frac{3}{2} \ln 2$.
9. $I = \int_0^1 (x + e^x) dx$. Une primitive de $x + e^x$ est $F(x) = \frac{x^2}{2} + e^x$ donc :
 $I = F(1) - F(0) = \frac{1}{2} + e - 1 = e - \frac{1}{2}$.
10. $I = \int_0^1 \frac{3e^x}{e^x + 2} dx$. Une primitive de $f(x) = \frac{3e^x}{e^x + 2}$ est $F(x) = 3 \ln(e^x + 2)$ car f est de la forme $3 \times \frac{u'}{u}$ avec $u(x) = e^x + 2$.
Donc $I = F(1) - F(0) = 3 \ln(e^1 + 2) - 3 \ln(e^0 + 2) = 3 \ln(e + 2) - 3 \ln 3 = 3 \ln\left(\frac{e + 2}{3}\right)$.
11. Une primitive de e^{ax+b} est $\frac{1}{a} e^{ax+b}$ donc $I = \int_0^1 e^{-3x+7} dx = F(1) - F(0)$ où $F(x) = -\frac{1}{3} e^{-3x+7}$.
Donc $I = -\frac{1}{3} e^{-3+7} + \frac{1}{3} e^7 = \frac{1}{3} (e^7 - e^4)$.
12. $F'(x) = 1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x} - 1 = \ln x$ donc F est une primitive de $\ln x$.

13. Il y a un point d'inflexion si la dérivée seconde s'annule en changeant de signe.

$$f'(x) = 2xe^x + x^2e^x = (2x + x^2)e^x \text{ donc :}$$

$$f''(x) = (2 + 2x)e^x + (2x + x^2)e^x = (2 + 2x + 2x + x^2)e^x = (x^2 + 4x + 2)e^x.$$

$$e^x > 0 \text{ donc } f''(x) > 0 \text{ si et seulement si } x^2 + 4x + 2 > 0.$$

$$\Delta = 4^2 - 4 \times 1 \times 2 = 16 - 8 = 8 > 0 \text{ donc } x^2 + 4x + 2 \text{ admet deux racines, et donc deux points d'inflexion car le polynôme change de signe en chaque racine.}$$

L'affirmation est donc fausse.

14. a. On compte le nombre de carreaux compris entre l'axe des abscisses et la courbe sur $[-4; 1]$: on en compte entre 6 et 10 à coups sûrs, mais 1 unité d'aire est représentée par 4 carreaux donc $\frac{6}{4} \leq \int_{-4}^1 f(x) dx \leq \frac{10}{4}$.

L'affirmation est donc fausse.

- b. $F' = f$ donc le signe de f donne les variations de F . Sur $[-4; 1]$, $f(x) \geq 0$ donc F est croissante.

L'affirmation est donc vraie.

- c. $f''(x) < 0$ si f est concave sur cet intervalle. Or, elle est convexe (ses tangentes sont toujours sous la courbe sur cet intervalle) donc l'affirmation est fausse.

- d. En $x = 0$ et $x = -2$, les tangentes à la courbe sont horizontales donc $f'(2) = 0$ et $f'(-2) = 0$. L'équation $f'(x) = 0$ admet donc deux solutions sur $[-4; 1]$.

L'affirmation est donc fausse.

- e. $f'(x) > 0$ si f est croissante. Or, sur $[-4; 1]$, elle n'est pas monotone donc $f'(x)$ change de signe.

L'affirmation est fausse.

Suites

1. $u_n = u_0 \times q^n = 3 \times 4^n$ (cours).

$$2. v_n = v_1 \times q^{n-1} = 9 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = 3^2 \times \frac{1}{3^{n-1}} = 3^2 \times 3^{-(n-1)} = 3^{2-n+1} = 3^{3-n}.$$

3. a. $v_{n+1} = a_{n+1} - 10 = 0,5a_n + 5 - 10 = 0,5a_n - 5 = 0,5(a_n - 10) = 0,5v_n$.

Donc (v_n) est géométrique de raison 0,5 et de premier terme :

$$v_0 = u_0 - 10 = 1 - 10 = -9.$$

- b. Donc $v_n = v_0 \times 0,5^n = -9 \times 0,5^n$.

$$\text{Alors, comme } v_n = a_n - 10, a_n = v_n + 10 = 10 - 9 \times 0,5^n.$$

- c.

Variables :	n entier naturel a réel	
Initialisation :	n prend la valeur 0 a prend la valeur 1	
Traitement :	Tant que $n \leq 9$ faire a prend la valeur $0,5a + 5$ n prend la valeur $n + 1$ Fin du Tant que	on met le contraire de la condition que l'on veut car $a_{n+1} = 0,5a_n + 5$
Sortie :	Afficher n	on affiche le premier n qui ne satisfait pas la condition « $n \leq 9$ »

Probabilités

1.
 - a. $P(D) = 1 - 0,28 - 0,52 = 0,2$.
 - b. $P_G(\bar{T}) = 1 - 0,8 = 0,2$ et $P_C(T) = 1 - 0,25 = 0,75$.
 - c. $0,28 \times 0,8 + 0,52 \times 0,75 + 0,2 \times P_D(T) = 0,674$ (formule des probabilités totales) donc $P_C(T) = 0,3$.
 - d. $P_T(C) = \frac{P(C \cap T)}{P(T)} = \frac{0,52 \times 0,75}{0,674} \approx 0,579$.
2. X suit la loi binomiale de paramètres $n = 40$ et $p = 0,47$.
 - a. $P(X = 20) \approx 0,1166$.
 - b. $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - (1 - 0,47)^{40} \approx 0,999999999991$.
 - c. $f = \frac{17}{40} = 0,425$ est la fréquence observée des billes bleues. L'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence de billes bleues est :

$$I = \left[0,47 - 1,96 \sqrt{\frac{0,47 \times 0,53}{100\,000}}; 0,47 + 1,96 \sqrt{\frac{0,47 \times 0,53}{100\,000}} \right] \approx [0,467; 0,473]$$

$f \notin I$ donc cet échantillon de 40 billes n'est pas représentatif du sac de billes.

3. X suit la loi uniforme sur $[0; 30]$.
$$P(X \geq 10) = \frac{30 - 10}{30 - 0} = \frac{2}{3}.$$
4.
 - a. $0,477 = \frac{0,954}{5}$. Or $P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) = 0,954$ donc $2\sigma = 15,6 - 14 = 1,6$, soit $\sigma = 0,8$.
 - b. $P(X \geq 17) \approx 9 \times 10^{-5}$.
5. L'amplitude de l'intervalle de confiance est $\frac{2}{\sqrt{n}}$ donc on cherche n tel que $\frac{2}{\sqrt{n}} \geq 0,1$, soit $\frac{\sqrt{n}}{2} \geq 10$, soit $\sqrt{n} \geq 20$ et donc $n > 20^2$, soit $n \geq 400$.