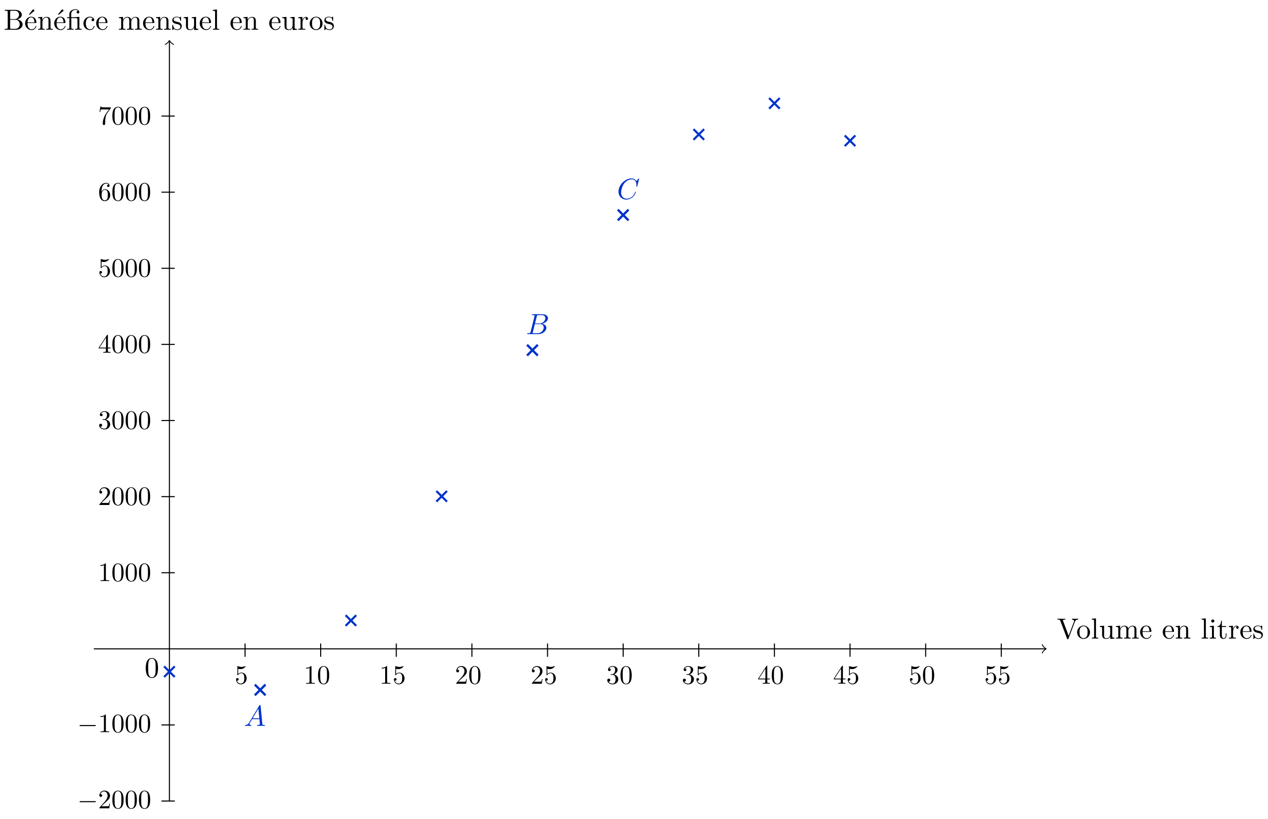
Devoirs et corrigés de Spécialité Mathématiques en Terminale ES

O. Lader

Table des matières

Devoir maison : Utilisation des matrices

Exercice 1.
Un laboratoire pharmaceutique fabrique et commercialise un médicament pour injection. Ce laboratoire peut produire entre 0 et 50 litres de ce médicament par mois. Le bénéfice mensuel (en euros) réalisé par le laboratoire en fonction du volume x (en litres) de médicament produit est connu pour différents niveaux de productions :



Les coordonnées des points A, B et C sont $A(6; -540)$, $B(24; 3924)$ et $C(30; 5700)$.
On peut donc penser à modéliser par une fonction du 3^{e} degré $f : [0; 50] \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

où x est exprimé en litres et $f(x)$ le bénéfice mensuel en euros. On suppose de plus que la fonction f change de sens de variation au point d'abscisse 40.

Partie A : Le modèle théorique

1. a) Calculer la dérivée de la fonction f.
   b) En déduire que l'hypothèse, f change de sens de variation au point d'abscisse 40, implique l'équation suivante :

$$4800a + 80b + c = 0$$

2. Traduire en trois équations les trois bénéfices connus en fonction du nombre de litres produits.

3. Compléter l'équation matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} 4800 & 80 & 1 & 0 \\ 216 & \dots & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -540 \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix}$$

4. Déterminer les coefficients a, b, c et d de la fonction f.

Partie B : Lectures graphiques

Par lecture graphique sur votre calculatrice, déterminer :

1. à partir de quel volume mensuel produit, le laboratoire va être bénéficiaire ;
2. pour quel volume mensuel produit, le bénéfice mensuel est supérieur ou égal à 6000 euros.

Partie C : Étude du bénéfice mensuel

1. Étudier le sens de variation de la fonction f.
2. Estimer le bénéfice mensuel si le laboratoire produit 50 litres pas mois.
3. Combien de litres par mois doit produire le laboratoire pour que le bénéfice soit maximal ?

Devoir maison : Utilisation des matrices

corrigé

Exercice 1.
Un laboratoire pharmaceutique fabrique et commercialise un médicament pour injection. Ce laboratoire peut produire entre 0 et 50 litres de ce médicament par mois. Le bénéfice mensuel (en euros) réalisé par le laboratoire en fonction du volume x (en litres) de médicament produit est connu pour différents niveaux de productions : Les coordonnées des points A, B et C sont $A(6;\,-540)$, $B(24;\,3924)$ et $C(30;\,5700)$.
On peut donc penser à modéliser par un fonction du 3^{e} degré $f : [0;\,50] \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

où x est exprimé en litres et $f(x)$ le bénéfice mensuel en euros. On suppose de plus que la fonction f change de sens de variation au point d'abscisse 40.

Partie A : Le modèle théorique

1. a) La dérivée de la fonction f est $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.

   b) De l'hypothèse, f change de sens de variation au point d'abscisse 40, on déduit que $f'(40) = 0$, c'est-à-dire :

$$3 \times 40^2 a + 2 \times 40 b + c = O \qquad \Longleftrightarrow \qquad 4800a + 80b + c = 0$$

2. Des trois bénéfices connus en fonction du nombre de litres produits, on déduit que

$$\begin{cases} f(6) & = -540 \\ f(24) & = 3924 \\ f(30) & = 5700 \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} 216a + 36b + 6c + d & = -540 \\ 13824a + 576b + 24c + d & = 3924 \\ 27000a + 900b + 30c + d & = 5700 \end{cases}$$

3. Compléter l'équation matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} 4800 & 80 & 1 & 0 \\ 216 & 36 & 6 & 1 \\ 13824 & 576 & 24 & 1 \\ 27000 & 900 & 30 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -540 \\ 3924 \\ 5700 \end{pmatrix}$$

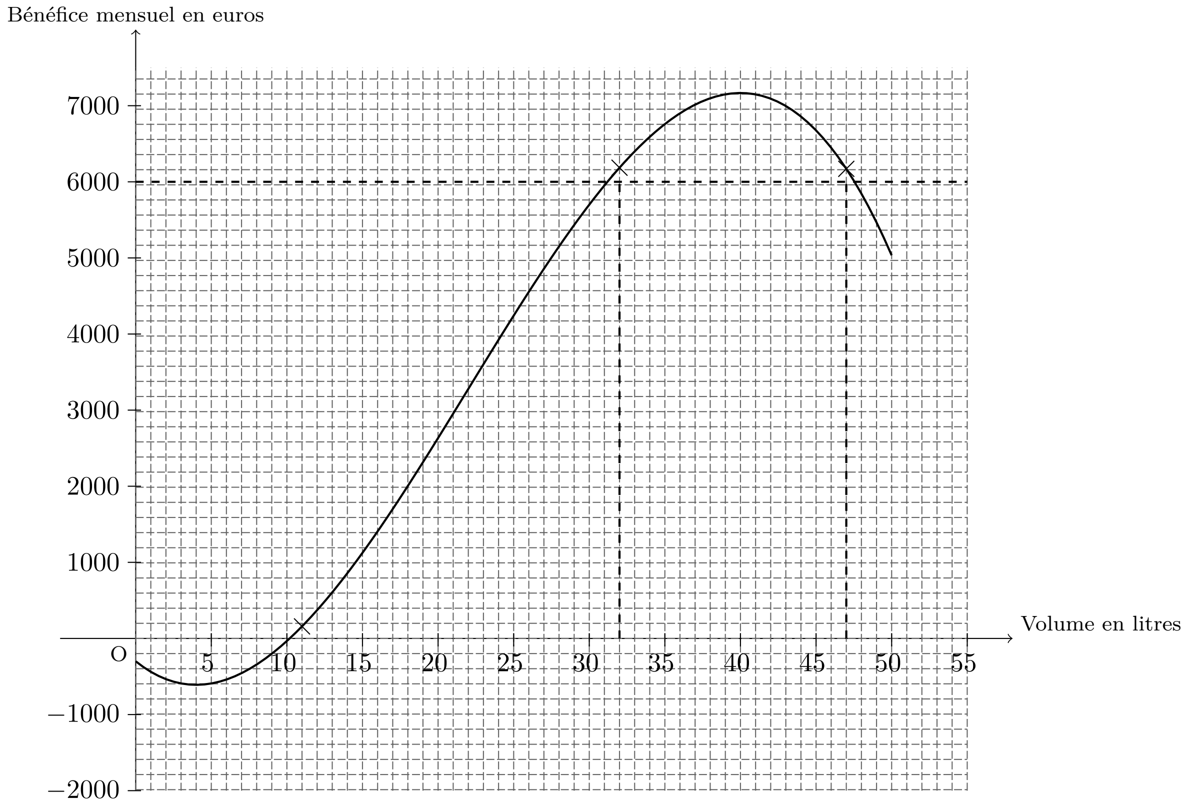
4. Ainsi,

$$\begin{pmatrix} 4800 & 80 & 1 & 0 \\ 216 & 36 & 6 & 1 \\ 13824 & 576 & 24 & 1 \\ 27000 & 900 & 30 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -540 \\ 3924 \\ 5700 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{3} \\ 22 \\ -160 \\ -300 \end{pmatrix}$$

   D'où, la fonction f est définie par

$$f(x) = \frac{-1}{3}x^3 + 22x^2 - 160x - 300$$

Partie B : Lectures graphiques



Par lecture graphique, on note :

1. qu'à partir de 10l mensuel produit, le laboratoire va être bénéficiaire ;
2. et le bénéfice mensuel est supérieur ou égal à 6000 euros pour une production comprise entre 32 et 47 litres.

Partie C : Étude du bénéfice mensuel

1. La dérivée de la fonction f est $f'(x) = -x^2 + 44x - 160$. C'est une fonction polynôme du second degré, déterminons sa forme factorisée. Le discriminant est $\Delta = 44^2 - 4 \times (-1) \times (-160) = 1296 = 36^2$ et ses deux racines sont $x_1 = \frac{-44-36}{-2} = 40$ et $x_2 = \frac{-44+36}{-2} = \frac{-8}{-2} = 4$. D'où $f'(x) = -(x-40)(x-4) = (40-x)(x-4)$.
   Le tableau de variation de la fonction f :

x	0		4		40		50
$x-4$		$-$	0	$+$		$+$	
$40-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	-300	↘	-609	↗	7167	↘	5033

2. Le bénéfice mensuel si le laboratoire produit 50 litres pas mois est $f(50) = 5033$.
3. Pour obtenir un bénéfice maximal de 7167 euros, il faut produire $40l$.

Devoir sur table 1 : Utilisation des matrices

Exercice 1. Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} -3x + 2y & = 1 \\ 5x - 3y & = -1 \end{cases}$$

Exercice 2 (Dette publique de la France)**.** Le tableau ci-dessus indique l'évolution de la dette publique de la France en pour cent du PIB entre 2005 et 2010.

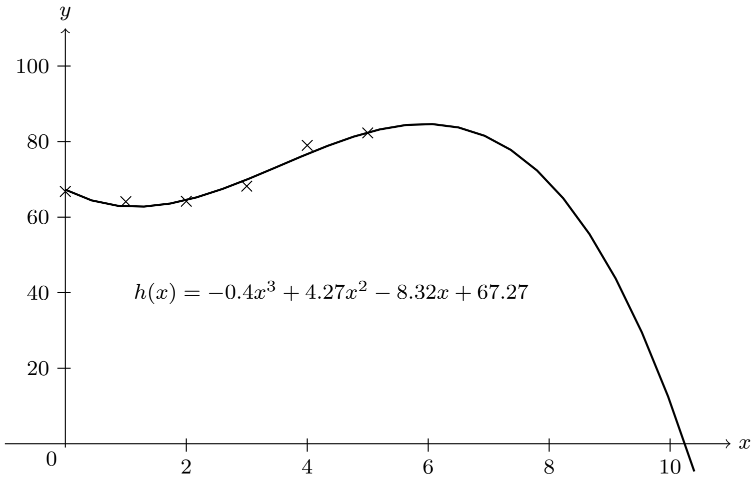
Année	2005	2006	2007	2008	2009	2010
Rang x_i	0	1	2	3	4	5
Dette y_i en % du PIB	66.8	64.1	64.2	68.2	79	82.3

On cherche à déterminer, puis à comparer différents modèles afin de les confronter aux prévisions du gouvernement.
Tous les calculs seront arrondis au millième.

1. Dans un repère orthogonal, représenter les six points $M(x_i; y_i)$.
2. *Premier modèle : une fonction polynôme de degré 2*
   a) On décide de modéliser la situation à l'aide d'une fonction quadratique f d'expression $f(x) = ax^2 + bx + c$ où x est le rang de l'année, $f(x)$ la dette publique en pour cent du PIB et a, b et c des nombres réels.
   À l'aide des trois points du graphique d'abscisses 0, 2 et 5, déterminez un système d'équations d'inconnues a, b et c.
   b) Justifier que le système précédent est équivalent à l'équation matricielle $A \times X = B$ où
   $$X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 66.8 \\ 64.2 \\ 82.3 \end{pmatrix}$$
   et A est une matrice qu'on déterminera.
   c) Résoudre le système à l'aide d'une calculatrice. En déduire une équation de la courbe de ce premier modèle.

3. *Deuxième modèle : une fonction cubique*
   L'allure du graphique évoque également une fonction cubique. On décide donc de déterminer un nouveau modèle sous la forme d'une fonction cubique g d'expression $g(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$.
   Reprendre les questions du 1) avec les quatres points d'abscisses 0,2,4 et 5 afin d'obtenir une équation de la courbe de ce deuxième modèle.

4. *Troisième modèle et comparaison*
   Souhaitant approcher au plus près les points de la courbe, un élève a obtenu le graphique suivant avec Géogebra :



Dans une présentation datant de 2011, le gouvernement estimait que la dette allait continuer à s'élever en 2011 et atteindre 85.4% du PIB ; culminer en 2012 à 86.9% ; enfin décroitre en 2013 pour atteindre 85.6%.
Comparer les trois modèles et déterminer celui qui s'approche le plus des prévisions du gouvernement.

Exercice 3. Trois voyageurs ont pris, le même jour, à Cherbourg, un billet de bateau transatlantique pour New-York. Le premier donne 900 dollars et 700 livres sterlings, sur lesquels on lui rend 16.79 euros ; le second donne 500 dollars et 1000 livres sterlings, sur lesquels on lui rend 81.48 euros ; le troisième donne 100 dollars et 1100 livres sterlings et 107 euros.
Exprimer en euros les prix auquels on compte la livre, le dollar arrondis à 10^{-4} et le prix de la traversée au cent près.

Devoir sur table 1 : Utilisation des matrices

corrigé

Exercice 1. Le système suivant :

$$\begin{cases} -3x + 2y &= 1 \\ 5x - 3y &= -1 \end{cases}$$

équivaut à l'équation matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}^{-1} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

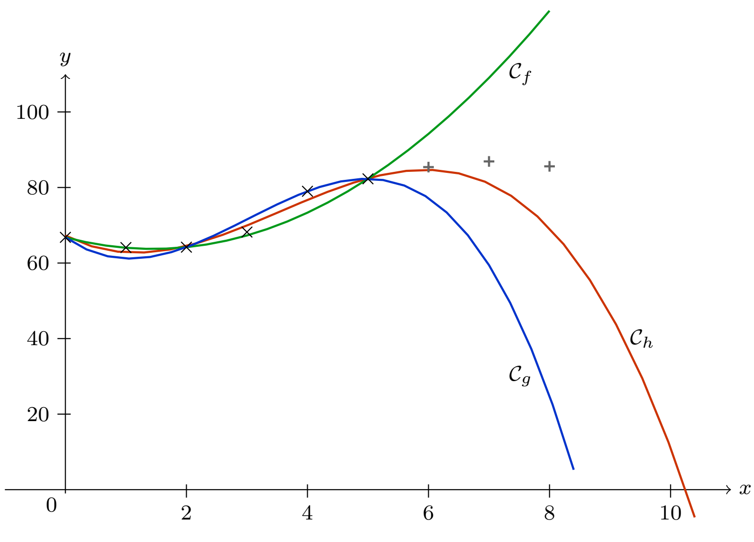
C'est-à-dire $x = 1$ et $y = 2$.

Exercice 2 (Dette publique de la France)**.** Le tableau ci-dessus indique l'évolution de la dette publique de la France en pour cent du PIB entre 2005 et 2010.

Année	2005	2006	2007	2008	2009	2010
Rang x_i	0	1	2	3	4	5
Dette y_i en % du PIB	66.8	64.1	64.2	68.2	79	82.3

On cherche à déterminer, puis à comparer différents modèles afin de les confronter aux prévisions du gouvernement.
Tous les calculs seront arrondis au millième.

1. Le nuage de points associé :



2. *Premier modèle : une fonction polynôme de degré 2*

a) On décide de modéliser la situation à l'aide d'une fonction quadratique f d'expression $f(x) = ax^2 + bx + c$ où x est le rang de l'année, $f(x)$ la dette publique en pour cent du PIB et a, b et c des nombres réels.
À l'aide des trois points du graphique d'abscisses 0, 2 et 5, on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} f(0) &= 66.8 \\ f(2) &= 64.2 \\ f(5) &= 82.3 \end{cases} \iff \begin{cases} c &= 66.8 \\ 4a + 2b + c &= 64.2 \\ 25a + 5b + c &= 82.3 \end{cases}$$

b) Le système précédent est équivalent à l'équation matricielle

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 25 & 5 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 66.8 \\ 64.2 \\ 82.3 \end{pmatrix}$$

c) On en déduit que

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 25 & 5 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \times \begin{pmatrix} 66.8 \\ 64.2 \\ 82.3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{22}{15} \\ \frac{-127}{30} \\ \frac{334}{5} \end{pmatrix}$$

et donc la fonction f est définie par

$$f(x) = \frac{22}{15}x^2 - \frac{127}{30}x + \frac{334}{5}$$

3. *Deuxième modèle : une fonction cubique*
L'allure du graphique évoque également une fonction cubique. On décide donc de déterminer un nouveau modèle sous la forme d'une fonction cubique g d'expression $g(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$.
Reprennons les questions du 1) avec les quatres points d'abscisses 0,2,4 et 5 afin d'obtenir une équation de la courbe de ce deuxième modèle :

$$\begin{cases} g(0) &= 66.8 \\ g(2) &= 64.2 \\ g(4) &= 79 \\ g(5) &= 82.3 \end{cases} \iff \begin{cases} \delta &= 66.8 \\ 8\alpha + 4\beta + 2\gamma + \delta &= 64.2 \\ 64\alpha + 16\beta + 4\gamma + \delta &= 79 \\ 125\alpha + 25\beta + 5\gamma + \delta &= 82.3 \end{cases}$$

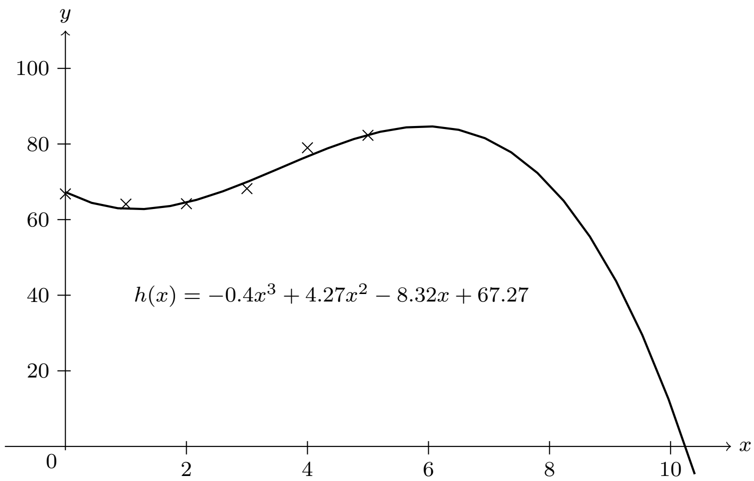
d'où

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 8 & 4 & 2 & 1 \\ 64 & 16 & 4 & 1 \\ 125 & 25 & 5 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \times \begin{pmatrix} 66.8 \\ 64.2 \\ 79 \\ 82.3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-17}{24} \\ \frac{257}{40} \\ \frac{-679}{60} \\ \frac{334}{5} \end{pmatrix}$$

D'où la fonction g est définie par

$$g(x) = -\frac{17}{24}x^3 + \frac{257}{40}x^2 - \frac{679}{60}x + \frac{334}{5}$$

4. *Troisième modèle et comparaison*
Souhaitant approcher au plus près les points de la courbe, un élève a obtenu le graphique suivant avec Géogebra :



Dans une présentation datant de 2011, le gouvernement estimait que la dette allait continuer à s'élever en 2011 et atteindre 85.4% du PIB ; culminer en 2012 à 86.9% ; enfin décroitre en 2013 pour atteindre 85.6%.
D'après le graphe de la question 1., on déduit que le modèle le plus proche de ses prévisions est le modèle h obtenue avec Géogébra.

Exercice 3. Trois voyageurs ont pris, le même jour, à Cherbourg, un billet de bateau transatlantique pour New-York. Le premier donne 900 dollars et 700 livres sterlings, sur lesquels on lui rend 16.79 euros ; le second donne 500 dollars et 1000 livres sterlings, sur lesquels on lui rend 81.48 euros ; le troisième donne 100 dollars et 1100 livres sterlings et 107 euros.
Soit d la valeur en euros d'un dollar, l la valeur en euros d'une livre sterling et p le prix du billet en euros. Alors, on a

$$\begin{cases} 900d + 700l - 16.79 & = p \\ 500d + 1000l - 81.48 & = p \\ 100d + 1100l + 107 & = p \end{cases} \iff \begin{cases} 900d + 700l - p & = 16.79 \\ 500d + 1000l - p & = 81.48 \\ 100d + 1100l - p & = -107 \end{cases}$$

C'est-à-dire

$$\begin{pmatrix} 900 & 700 & -1 \\ 500 & 1000 & -1 \\ 100 & 1100 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} d \\ l \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16.79 \\ 81.48 \\ -107 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} d \\ l \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 900 & 700 & -1 \\ 500 & 1000 & -1 \\ 100 & 1100 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \times \begin{pmatrix} 16.79 \\ 81.48 \\ -107 \end{pmatrix}$$

D'où, 1 dollar vaut environ 0.7877 euros, 1 livre vaut environ 1.2659 euros et le billet coûte 1578.20 euros.

Devoir maison 1 : Matrice de Léontief

pour le mardi 15 décembre 2015

Exercice 1. Dans un pays sans échanges extérieurs, l'économie se décompose en trois branches : l'agriculture (A), l'industrie hors énergie (I) et l'énergie (E).
On donne le tableau d'échanges interbranches (en millier d'euros) ci-dessous :

	Consommation de l'agriculture	Consommation de l'industrie hors énergie	Consommation de l'énergie	Consommation finale (pour la population)	Production totale
Produit agricole	400	400	150		2 000
Produit industriel hors énergie	600	900	210		3 000
Produit de l'énergie	100	810	210		4 000

Exemple de lecture : Pour l'agriculture, la production totale pour une valeur de 2 millions d'euros se répartit en consommation finale (pour la population) et consommations intermédiaires : 400 milliers d'euros consommés par l'industrie, 150 milliers d'euros consommés par l'énergie et 400 milliers d'euros consommés par l'agriculture elle-même.

1. Lire dans le tableau la production de l'énergie consommée par l'agriculture.
2. a) À partir de l'exemple de lecture, justifier que la consommation finale (la part consommée par la population) des produits agricoles est d'une valeur de 1 050 milliers d'euros.
   On remarquera que finalement, la production totale est égale à la somme des consommations des 4 types (agricole, industrie, énergie et population). C'est une particularité du modèle, qui provient de l'hypothèse que ce pays ne procède pas aux échanges extérieurs (en particulier, pas d'exportation).

   b) Compléter la colonne "Consommation finale" du tableau. On note C_f la matrice colonne des consommations finales (par la population) :

$$C_f = \begin{pmatrix} 1\,050 \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix}$$

3. On appelle **matrice des coefficients techniques**, la matrice M carrée de taille 3 constituées des 9 coefficients sur les trois premières colonnes du précédent tableau où l'on divise la première colonne par la production totale agricole, la deuxième colonne par la production totale industrielle et la troisième colonne par la production totale d'énergie.
   Plus précisément, si on note a_{ij} le coefficient sur la i-ème ligne et la j-ème colonne de la matrice M, alors

$$a_{ij} = \frac{\text{consommation du produit i par la branche j}}{\text{production totale de la branche j}}$$

   où les branches sont numérotées ainsi : 1 : agriculture, 2 : industrie, 3 : énergie.

a) Déterminer la matrice des coefficients techniques avec les coefficients sous forme de fractions simplifiées :

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{15} & \frac{3}{80} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

b) On note P la matrice colonne des productions totales. Calculer le produit $M \times P$. On note C_i le résultat et on l'appelle matrice des consommations intermédiaires.

Justifier que le premier coefficient de la matrice C_i correspond à la valeur en euros des produits agricoles consommés par les trois branches.

c) On note I la matrice identité de taille 3. Rappeler ses coefficients.

d) Vérifier que $(I - M) \times P = C_f$.
En effectuant le calcul sur feuille et sans la calculatrice de $(I - M) \times P$, justifier pourquoi on tombe sur la matrice C_f.
La matrice $L = I - M$ est appelée **matrice de Léontief**.

4. On suppose que la matrice M des coefficients techniques reste stable et que la consommation finale (par la population) :
   - en produit agricole baisse de 10% ;
   - de la production industrielle augmente de 10% ;
   - de l'énergie augmente de 20%.

a) Déterminer la nouvelle matrice C_f des consommations finales (par la population).

b) On pose $P = \begin{pmatrix} a \\ i \\ e \end{pmatrix}$ la matrice des productions totales nécessaires dans cette nouvelle configuration.
À l'aide de l'équation $(I - M) \times P = C_f$, déterminer la matrice P.

Devoir maison 1 : Matrice de Léontief

corrigé

Exercice 1. Dans un pays sans échanges extérieurs, l'économie se décompose en trois branches : l'agriculture (A), l'industrie hors énergie (I) et l'énergie (E).
On donne le tableau d'échanges interbranches (en millier d'euros) ci-dessous :

	Consommation de l'agriculture	Consommation de l'industrie hors énergie	Consommation de l'énergie	Consommation finale (pour la population)	Production totale
Produit agricole	400	400	150	1 050	2 000
Produit industriel hors énergie	600	900	210	1 290	3 000
Produit de l'énergie	100	810	210	2 880	4 000

Exemple de lecture : Pour l'agriculture, la production totale pour une valeur de 2 millions d'euros se répartit en consommation finale (pour la population) et consommations intermédiaires : 400 milliers d'euros consommés par l'industrie, 150 milliers d'euros consommés par l'énergie et 400 milliers d'euros consommés par l'agriculture elle-même.

1. La production de l'énergie consommée par l'agriculture est d'une valeur de 100 milliers d'euros.
2. a) À partir de l'exemple de lecture, on déduit que la consommation finale (la part consommée par la population) des produits agricoles est d'une valeur de $2\,000 - 400 - 400 - 150 = 1\,050$ milliers d'euros.
   On remarquera que finalement, la production totale est égale à la somme des consommations des 4 types (agricole, industrie, énergie et population). C'est une particularité du modèle, qui provient de l'hypothèse que ce pays ne procède pas aux échanges extérieurs (en particulier, pas d'exportation).

   b) (Compléter la colonne "Consommation finale" du tableau.) On note C_f la matrice colonne des consommations finales (par la population) :
   $$C_f = \begin{pmatrix} 1\,050 \\ 1\,290 \\ 2\,880 \end{pmatrix}$$
3. On appelle **matrice des coefficients techniques**, la matrice M carrée de taille 3 constituées des 9 coefficients sur les trois premières colonnes du précédent tableau où chaque colonne est divisée par la production totale des trois branches dans l'ordre.
   Plus précisément, si on note a_{ij} le coefficient sur la i-ème ligne et la j-ème colonne de la matrice M, alors
   $$a_{ij} = \frac{\text{consommation du produit i par la branche j}}{\text{production totale de la branche j}}$$
   où les branches sont numérotées ainsi : 1 : agriculture, 2 : industrie, 3 : énergie.

a) Ainsi, la matrice des coefficients techniques avec les coefficients sous forme de fractions simplifiées :

$$M = \begin{pmatrix} \frac{400}{2000} & \frac{400}{3000} & \frac{150}{4000} \\ \frac{600}{2000} & \frac{900}{3000} & \frac{210}{4000} \\ \frac{100}{2000} & \frac{810}{3000} & \frac{210}{4000} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{15} & \frac{3}{80} \\ \frac{3}{10} & \frac{3}{10} & \frac{21}{400} \\ \frac{1}{20} & \frac{27}{100} & \frac{21}{400} \end{pmatrix}$$

b) La matrice des consommations intermédiaires est

$$C_i = M \times P = \begin{pmatrix} \frac{400}{2000} & \frac{400}{3000} & \frac{150}{4000} \\ \frac{600}{2000} & \frac{900}{3000} & \frac{210}{4000} \\ \frac{100}{2000} & \frac{810}{3000} & \frac{210}{4000} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2000 \\ 3000 \\ 4000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 400 + 400 + 150 \\ 600 + 900 + 210 \\ 100 + 810 + 210 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 950 \\ 1710 \\ 1120 \end{pmatrix}$$

Le calcul montre que le premier coefficient de la matrice C_i correspond à la valeur en euros des produits agricoles consommés par les trois branches.

c) On note I la matrice identité de taille 3 :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

d) On note que

$$\begin{aligned} (I - M) \times P &= I \times P - M \times P = P - M \times P = P - C_i \\ &= \begin{pmatrix} 2000 \\ 3000 \\ 4000 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 950 \\ 1710 \\ 1120 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2000 - 950 \\ 3000 - 1710 \\ 4000 - 1120 \end{pmatrix} \\ &= C_f \end{aligned}$$

D'après la première ligne de calculs et les questions précédentes, on note qu'effectivement en soustrayant les consommations intermédiaires à la production totale, on obtient le consommation finale (pour la population).

4. On suppose que la matrice M des coefficients techniques reste stable et que la consommation finale (par la population) :
   - en produit agricole baisse de 10% ;
   - de la production industrielle augmente de 10% ;
   - de l'énergie augmente de 20%.

   a) La nouvelle matrice C_f des consommations finales (par la population) est

   $$C_f = \begin{pmatrix} 1050 \times (1 - 0.10) \\ 1290 \times (1 + 0.10) \\ 2880 \times (1 + 0.20) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 945 \\ 1419 \\ 3456 \end{pmatrix}$$

   b) On pose $P = \begin{pmatrix} a \\ i \\ e \end{pmatrix}$ la matrice des productions totales nécessaires dans cette nouvelle configuration.

De l'équation $(I-M)\times P = C_f$, on déduit que

$$
\begin{aligned}
\left(\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\frac{1}{5}&\frac{2}{15}&\frac{3}{80}\\\frac{3}{10}&\frac{3}{10}&\frac{21}{400}\\\frac{1}{20}&\frac{27}{100}&\frac{21}{400}\end{pmatrix}\right)\times\begin{pmatrix}a\\i\\e\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}945\\1419\\3456\end{pmatrix}\\
\begin{pmatrix}1-\frac{1}{5}&-\frac{2}{15}&-\frac{3}{80}\\-\frac{3}{10}&1-\frac{3}{10}&-\frac{21}{400}\\-\frac{1}{20}&-\frac{27}{100}&1-\frac{21}{400}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}a\\i\\e\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}945\\1419\\3456\end{pmatrix}\\
\begin{pmatrix}\frac{4}{5}&-\frac{2}{15}&-\frac{3}{80}\\-\frac{3}{10}&\frac{7}{10}&-\frac{21}{400}\\-\frac{1}{20}&-\frac{27}{100}&\frac{379}{400}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}a\\i\\e\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}945\\1419\\3456\end{pmatrix}\\
\begin{pmatrix}a\\i\\e\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}\frac{4}{5}&-\frac{2}{15}&-\frac{3}{80}\\-\frac{3}{10}&\frac{7}{10}&-\frac{21}{400}\\-\frac{1}{20}&-\frac{27}{100}&\frac{379}{400}\end{pmatrix}^{-1}\times\begin{pmatrix}945\\1419\\3456\end{pmatrix}\\
\begin{pmatrix}a\\i\\e\end{pmatrix} &\simeq \begin{pmatrix}1934\\3206\\4663\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

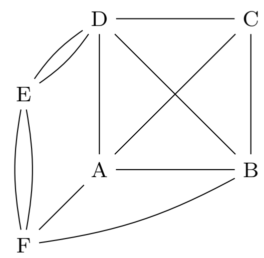
arrondi à l'unité. Ainsi, la production totale agricole serait d'une valeur de 1 934 milliers d'euros, la production totale de l'industrie serait d'une valeur de 3 206 milliers d'euros et la production totale d'énergie serait d'une valeur de 4 663 milliers d'euros environ.

Devoir sur table 1 : Les graphes

Mardi 12 janvier 2016

On prendra soin de justifier toutes les réponses.

Exercice 1. On considère le graphe suivant :



1. Détermiener l'ordre du graphe.
2. Déterminer le degré des sommets A et F.
3. Est-ce que le graphe est complet ? Est-il connexe ?
4. Est-ce que le graphe admet une chaîne Eulérienne ? un cycle Eulérien ? Si oui, en donner une ou un.
5. Déterminer la matrice d'adjacence M associée au graphe (on ordonnera les sommets dans l'ordre alphabétique).
6. Combien y-a-t'il de chaînes de longueur 3 de E à B ? Les déterminer.

Exercice 2. On se propose d'étudier la préparation d'un gâteau afin d'en minimiser la durée. Les différentes tâches à réaliser sont présentées dans le tableau ci-dessous, ainsi que leur durée en minutes. On suppose que deux personnes préparent ce gâteau.

Tâche	Durée	Désignation	Tâche(s) précédente(s)
A	2	Sortir les plats des placards	
B	3	Sortir les ingrédients des placards	
C	1	Verser un yaourt dans le saladier	A,B
D	1	Verser 3 pots de farine	C
E	1	Verser 2 pots de sucre	D
F	2	Mettre la levure, remuer	E
G	1	Mettre 2 œufs et 1 pot d'huile	F
H	2	Mélanger	G
I	1	Beurrer le moule	A,B
J	1	Fariner le moule	I
K	3	Faire fondre le chocolat	A,B
L	1	Placer le tout dans le moule	H, K, J
M	25	Faire cuire à 180 $^\circ C$	L

1. Construire un graphe orienté dont les sommets représentent les tâches à effectuer et où les arêtes orientées $X \longmapsto Y$ indiquent que la tâche Y ne peut être réalisée que lorsque X l'a été.
2. Quelles sont les tâches qui peuvent être entreprises simultanément ? En déduire le temps minimum de préparation de ce gâteau.

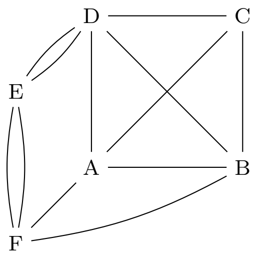
Exercice 3.

1. Représenter un graphe dont les sommets sont notés A, B, C et D et tels que $\deg(A) = 2$, $\deg(B) = 3$, $\deg(C) = 2$ et $\deg(D) = 3$.
2. Est-il possible de représenter un graphe dont les sommets sont notés A, B, C et D et tels que $\deg(A) = 2$, $\deg(B) = 3$, $\deg(C) = 2$ et $\deg(D) = 2$? Justifier.

Devoir sur table 1 : Les graphes

corrigé

Exercice 1. On considère le graphe suivant :



1. Le graphe est d'ordre 6.
2. Le sommet A est de degré 4 et le sommet F de degré 4.
3. Comme il n'y a pas d'arête de A à E, on en déduit que le graphe n'est pas complet.

   Par contre, quel que soit le couple de sommets du graphe, il existe une chaine entre les deux. D'où, le graphe est connexe.

1. Le graphe est connexe et seul deux sommets D et C sont de degré impair, ainsi, d'après le théorème d'Euler, il existe une chaîne Eulérienne qui n'est pas un cycle. En voici une : D-E-F-E-D-A-F-B-A-C-B-D-C.
2. La matrice d'adjacence du graphe est

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

3. À l'aide de la calculatrice,

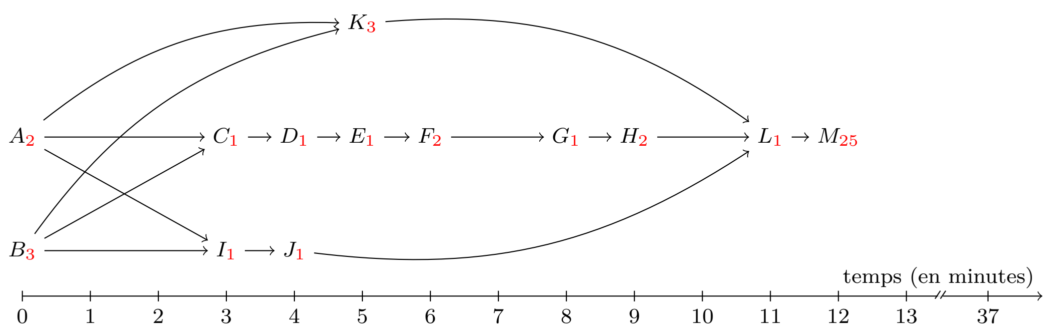
$$M^3 = \begin{pmatrix} 8 & 9 & 9 & 17 & 6 & 15 \\ 9 & 8 & 9 & 17 & 6 & 15 \\ 9 & 9 & 6 & 11 & 8 & 8 \\ 17 & 17 & 11 & 6 & 26 & 4 \\ 6 & 6 & 8 & 26 & 0 & 24 \\ 15 & 15 & 8 & 4 & 24 & 2 \end{pmatrix}$$

   D'après le coefficient sur la 5e ligne et 2e colonne, on déduit qu'il y a 6 chaînes de longueur 3 de E à B. En voici trois :
   E-D-C-B
   E-D-A-B
   E-F-A-B
   Les trois autres sont obtenues en empruntant l'autre arête de E à D ou de E à F.

Exercice 2. On se propose d'étudier la préparation d'un gâteau afin d'en minimiser la durée. Les différentes tâches à réaliser sont présentées dans le tableau ci-dessous, ainsi que leur durée en minutes. On suppose que deux personnes préparent ce gâteau.

Tâche	Durée	Désignation	Tâche(s) précédente(s)
A	2	Sortir les plats des placards	
B	3	Sortir les ingrédients des placards	
C	1	Verser un yaourt dans le saladier	A,B
D	1	Verser 3 pots de farine	C
E	1	Verser 2 pots de sucre	D
F	2	Mettre la levure, remuer	E
G	1	Mettre 2 œufs et 1 pot d'huile	F
H	2	Mélanger	G
I	1	Beurrer le moule	A,B
J	1	Fariner le moule	I
K	3	Faire fondre le chocolat	A,B
L	1	Placer le tout dans le moule	H, K, J
M	25	Faire cuire à 180 ° C	L

1. Voici un graphe orienté dont les sommets représentent les tâches à effectuer et où les arêtes orientées $X \longmapsto Y$ indiquent que la tâche Y ne peut être réalisée que lorsque X l'a été :



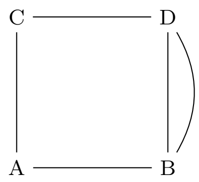
En rouge, on est noté les temps (en minutes) des différentes tâches.

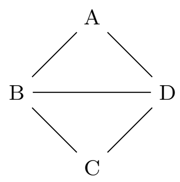
2. On observe sur la figure précédente qu'on peut effectuer les tâches A et B ainsi que C, I en même temps, tout comme E en F en même temps que K.

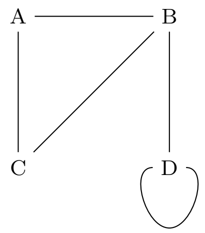
   On en déduit qu'au minimum les deux personnes mettront 37 minutes pour préparer le gâteau.

Exercice 3.

1. Voici des graphes dont les sommets sont notés A, B, C et D et tels que $\deg(A) = 2$, $\deg(B) = 3$, $\deg(C) = 2$ et $\deg(D) = 3$:







2. Par contre, il n'est pas possible de représenter un graphe dont les sommets sont notés A, B, C et D et tels que $\deg(A) = 2$, $\deg(B) = 3$, $\deg(C) = 2$ et $\deg(D) = 2$. Car la somme des degrés est égale à 9, ce qui impliquerai qu'il y ait $\frac{9}{2} = 4.5$ arêtes. Ce qui est impossible.

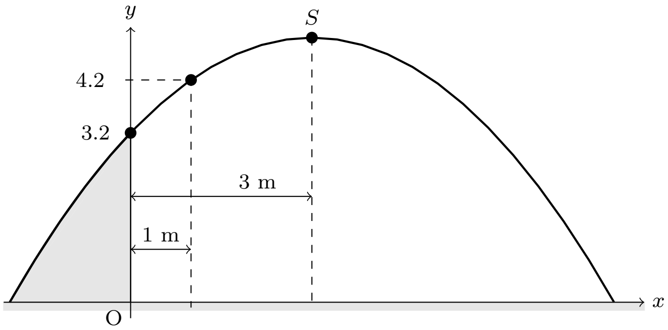
Devoir maison 2 : Matrices et graphes

pour le mardi 2 février 2016

On prendra soin de justifier toutes les réponses.

Exercice 1. Les deux parties de l'exercice sont indépendantes.

Partie A La trajectoire de saut d'un BMX est modélisée par la parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$ où x et y sont exprimés en mètres et où a, b et c désignent des nombres réels.



- Au point S, la tangente à la trajectoire était parallèle au sol.
- Lorsque le photographe l'a pris en photo, le pilote se trouvait à 4,20m du sol.
- Le tremplin de saut mesure 3,20m de haut.

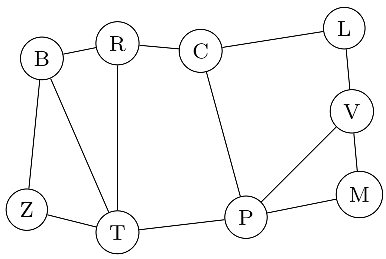
On se propose de calculer la hauteur et la longueur du saut du pilote.

1. Justifier que a, b et c sont solutions du système **(S)** suivant :

$$\begin{cases} c & = 3.2 \\ a+b+c & = 4.2 \\ 6a+b & = 0 \end{cases}$$

2. Résoudre le système **(S)**.
3. Quelle a été la hauteur du saut du pilote par rapport au sol ?
4. Quelle a été la longueur du saut ?

Partie B Le graphe ci-dessous représente les autoroutes entre les principales villes du Sud de la France : Bordeaux (B), Clermont-Ferrand (C), Lyon (L), Marseille (M), Montpellier (P), Brive (R), Toulouse (T), Valence (V) et Biarritz (Z).



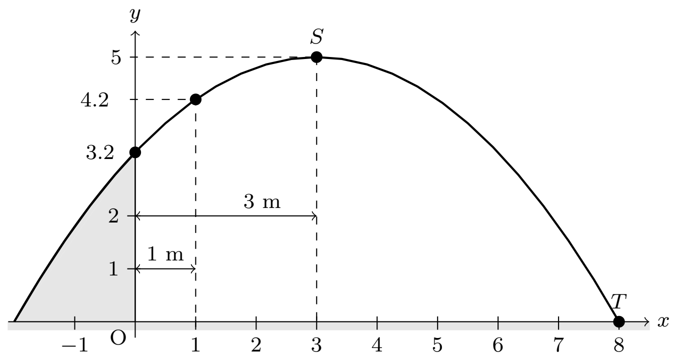
1. Pour cette question, on justifiera chaque réponse.
   a) Déterminer l'ordre du graphe.
   b) Déterminer si le graphe est connexe.
   c) Déterminer si le graphe est complet.
2. Un touriste atterrit à l'aéroport de Lyon et loue une voiture.
   Déterminer, en justifiant, s'il pourra visiter toutes les villes en empruntant une et une seule fois chaque autoroute.

Devoir maison 2 : Matrices et graphes

corrigé

Exercice 1. Les deux parties de l'exercice sont indépendantes.

Partie A La trajectoire de saut d'un BMX est modélisée par la parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$ où x et y sont exprimés en mètres et où a, b et c désignent des nombres réels.



- Au point S, la tangente à la trajectoire était parallèle au sol.
- Lorsque le photographe l'a pris en photo, le pilote se trouvait à 4,20m du sol.
- Le tremplin de saut mesure 3,20m de haut.

On se propose de calculer la hauteur et la longueur du saut du pilote.

1 pt 1. Le fait qu'au point S, la tangente à la trajectoire était parallèle au sol signifie que le nombre dérivé de la fonction polynôme $x \mapsto ax^2 + bx + c$ en 3 est nul. C'est-à-dire $2a \times 3 + b \times 3 = 6a + 3b = 0$. Ensuite, de la seconde information on déduit que $a \times 1^2 + b \times 1 + c = a + b + c = 4.2$. Enfin, la hauteur du tremple induit la condition $a \times 0^2 + b \times 0 + c = c = 3.2$. D'où les paramètres a, b et c sont solutions du système **(S)** suivant :

$$\begin{cases} c &= 3.2 \\ a + b + c &= 4.2 \\ 6a + b &= 0 \end{cases}$$

1 pt 2. Le système **(S)** est équivalent à l'équation matricielle :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 6 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.2 \\ 4.2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La matrice carrée de taille 3 dans l'équation précédente est inversible, d'où :

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 6 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3.2 \\ 4.2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.2 \\ 1.2 \\ 3.2 \end{pmatrix}$$

et la trajectoire du saut est représentée par la parabole d'équation $y = -0.2x^2 + 1.2x + 3.2$.

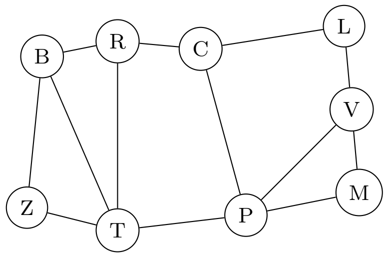
0.5 pt 3. La hauteur du saut du pilote par rapport au sol est égale à $-0.2\times 3^2+1.2\times 3+3.2 = 5$ mètres.

0.5 pt 4. Pour déterminer la longueur du saut, il nous faut déterminer l'abscisse du point T d'impact au sol (voir la figure précédente). Cela équivaut à déterminer la racine positive du précédent polynôme du second degré. On a $\Delta = 1.2^2-4\times(-0.2)\times 3.2 = 4$ et

$$x_1 = \frac{-1.2-\sqrt{4}}{2\times(-0.2)} = 8 \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-1.2+2}{2\times(-0.2)} = -2$$

D'où, l'abscisse de T est 8 et le saut fait 8 mètres de long.

Partie B Le graphe ci-dessous représente les autoroutes entre les principales villes du Sud de la France : Bordeaux (B), Clermont-Ferrand (C), Lyon (L), Marseille (M), Montpellier (P), Brive (R), Toulouse (T), Valence (V) et Biarritz (Z).



1. Pour cette question, on justifiera chaque réponse.

0.5 pt a) L'ordre du graphe est 9 car il y a 9 sommets.

0.5 pt b) On voit que pour tous couples de sommets, il existe un chemin les reliant. Ainsi, par définition, le graphe est connexe.

0.5 pt c) Il n'existe pas d'arête de C à T et donc le graphe n'est pas complet.

0.5 pt 2. Un touriste atterrit à l'aéroport de Lyon et loue une voiture. Les sommets B, R, C sont de degré impair, ainsi, d'après le théorème d'Euler, il n'existe pas de cycle ni de chaîne Eulérienne. C'est-à-dire, le touriste ne pourra pas visiter toutes les villes en empruntant une et une seule fois chaque autoroute.

Devoir maison 3 : Système linéaire et graphes

pour le mardi 23 février 2016

Exercice 1. On considère une entreprise U qui produit des fontaines d'eau à bonbonnes. Elle fournit ses clients en recharges pour les fontaines à eau et dispose des résultats antérieurs suivants :

Nombre de recharges en milliers	1	3	5
Coût total annuel de production en centaines d'euros	11	27,4	83

Le coût total de production est modélisé par une fonction C définie pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0\,;\,10]$ par :

$$C(x) = ax^3 + bx^2 + cx + 10 \qquad a, b \text{ et } c \text{ sont des nombres réels.}$$

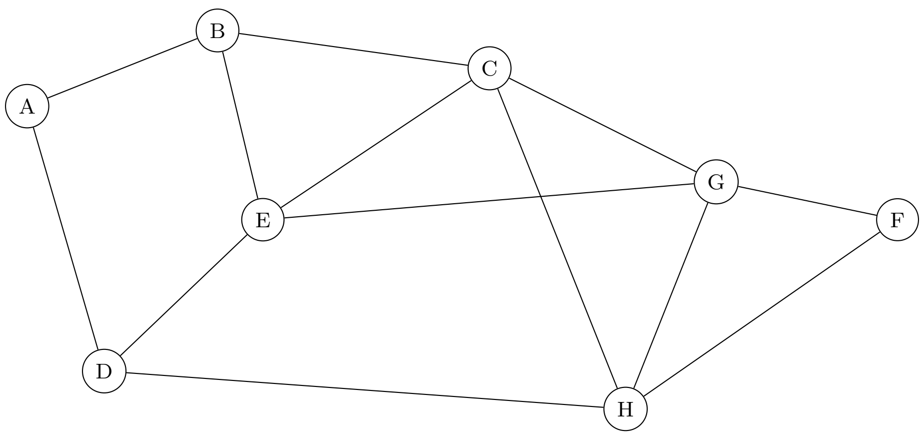
Lorsque le nombre x désigne le nombre de milliers de recharges produites, $C(x)$ est le coût total de production en centaines d'euros.

1. Justifier que le triplet (a, b, c) est solution du système (S).

$$(S) \quad \begin{cases} a+b+c & = \quad 1 \\ 27a+9b+3c & = \quad 17,4 \\ 125a+25b+5c & = \quad 73 \end{cases} \text{ et on pose } X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

2. a) Écrire ce système sous la forme $MX = Y$ où M et Y sont des matrices que l'on précisera.
   b) On admet que la matrice M est inversible. Déterminer, à l'aide de la calculatrice, le triplet (a, b, c) solution du système (S).
3. En utilisant cette modélisation, quel serait le coût total annuel de production pour 8000 recharges d'eau produites ?

Exercice 2. Lors d'une campagne électorale, un homme politique doit effectuer une tournée dans les villes A, B, C, D, E, F, G et H, en utilisant le réseau autoroutier. Le graphe $\mathcal{G}$ ci-dessous, représente les différentes villes de la tournée et les tronçons d'autoroute reliant ces villes (une ville est représentée par un sommet, un tronçon d'autoroute par une arête) :



Partie A

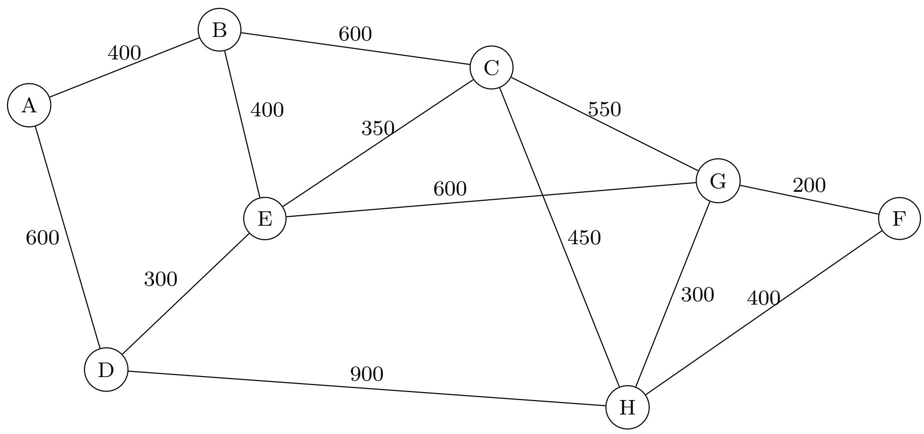
1. Déterminer, en justifiant, si le graphe $\mathcal{G}$ est :
   a) complet ;
   b) connexe.
2. a) Justifier qu'il est possible d'organiser la tournée en passant au moins une fois par chaque ville, tout en empruntant une fois et une seule chaque tronçon d'autoroute.
   b) Citer un trajet de ce type.
3. On appelle M la matrice d'adjacence associée au graphe $\mathcal{G}$ (les sommets étant pris dans l'ordre alphabétique).
   a) Déterminer la matrice M.
   b) On donne la matrice

$$M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 3 & 5 & 1 & 1 & 4 & 1 \\ 5 & 2 & 7 & 2 & 8 & 3 & 3 & 5 \\ 3 & 7 & 6 & 4 & 9 & 3 & 9 & 10 \\ 5 & 2 & 4 & 0 & 9 & 2 & 3 & 8 \\ 1 & 8 & 9 & 9 & 4 & 4 & 10 & 4 \\ 1 & 3 & 3 & 2 & 4 & 2 & 6 & 6 \\ 4 & 3 & 9 & 3 & 10 & 6 & 6 & 9 \\ 1 & 5 & 10 & 8 & 4 & 6 & 9 & 4 \end{pmatrix}$$

   Déterminer, en justifiant, le nombre de chemins de longueur 3 reliant E à H.
   Préciser ces chemins.

Partie B

Des contraintes d'organisation obligent cet homme politique à se rendre dans la ville F après la ville A.
Le graphe $\mathcal{G}$ est complété ci-dessous par les longueurs en kilomètre de chaque tronçon d'autoroute.



Déterminer, en utilisant l'algorithme de Dijkstra, le trajet autoroutier le plus court pour aller de A à F.
Préciser la longueur en kilomètre de ce trajet.

Devoir maison 3 : Système linéaire et graphes

corrigé

Exercice 1. On considère une entreprise U qui produit des fontaines d'eau à bonbonnes. Elle fournit ses clients en recharges pour les fontaines à eau et dispose des résultats antérieurs suivants :

Nombre de recharges en milliers	1	3	5
Coût total annuel de production en centaines d'euros	11	27,4	83

Le coût total de production est modélisé par une fonction C définie pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0\,;\,10]$ par :

$$C(x) = ax^3 + bx^2 + cx + 10 \qquad a, b \text{ et } c \text{ sont des nombres réels.}$$

Lorsque le nombre x désigne le nombre de milliers de recharges produites, $C(x)$ est le coût total de production en centaines d'euros.

1. D'après le précédent tableau, on a $f(1) = a+b+c+10 = 11$, $f(3) = 27a+9b+3c+10 = 27.4$ et $f(5) = 125a + 25b + c + 10 = 83$. Ainsi, le triplet (a, b, c) est solution du système (S).

$$(S) \quad \begin{cases} a+b+c & = & 1 \\ 27a+9b+3c & = & 17,4 \\ 125a+25b+5c & = & 73 \end{cases} \text{ et on pose } X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

2. a) On pose

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 27 & 9 & 3 \\ 125 & 25 & 5 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 17.4 \\ 73 \end{pmatrix}$$

Alors le système (S) est équivalent à l'équation matricielle $MX = Y$.

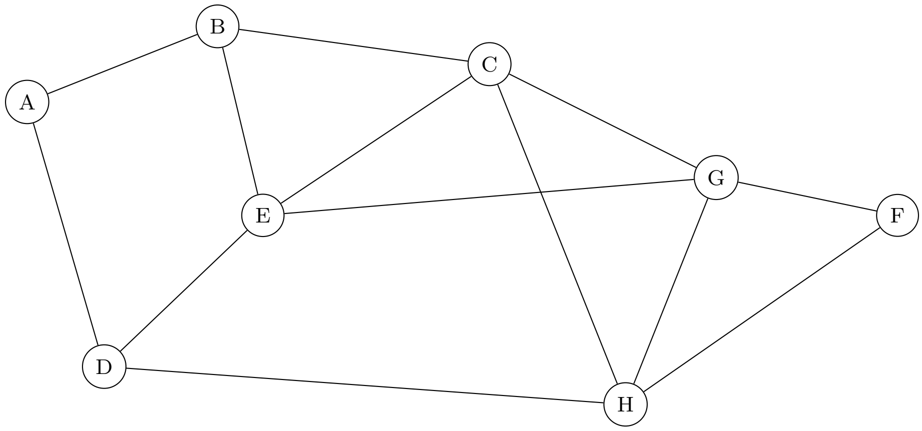
b) On admet que la matrice M est inversible. À l'aide de la calculatrice, le triplet (a, b, c) solution du système (S) est

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = M^{-1} \times Y = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.4 \\ 0.1 \end{pmatrix}$$

Ainsi, le coût total de la production est modélisé par la fonction C définie par $C(x) = 0.5x^3 + 0.4x^2 + 0.1x + 10$.

3. En utilisant cette modélisation, on note que $C(8) = 292.4$. Ainsi, le coût total annuel de production pour 8000 recharges d'eau produites serait de 29 240 euros.

Exercice 2. Lors d'une campagne électorale, un homme politique doit effectuer une tournée dans les villes A, B, C, D, E, F, G et H, en utilisant le réseau autoroutier. Le graphe $\mathcal{G}$ ci-dessous, représente les différentes villes de la tournée et les tronçons d'autoroute reliant ces villes (une ville est représentée par un sommet, un tronçon d'autoroute par une arête) :



Partie A

1. Le graphe $\mathcal{G}$:
   a) n'est pas complet, car il n'y a pas d'arête de A à E par exemple ;
   b) est connexe, car entre deux sommets il y au moins une chaîne.
2. a) Le graphe est connexe et seul les sommets C et D sont de degré impair, ainsi d'après le théorème d'Euler, il est possible d'organiser la tournée en passant au moins une fois par chaque ville, tout en empruntant une fois et une seule fois chaque tronçon d'autoroute.
   b) Par exemple le circuit : B-A-D-H-F-G-H-C-G-E-B-C-E-D amène à passer une et une seule par chaque tronçon.
3. On appelle M la matrice d'adjacence associée au graphe $\mathcal{G}$ (les sommets étant pris dans l'ordre alphabétique).
   a) La matrice M :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   b) On donne la matrice

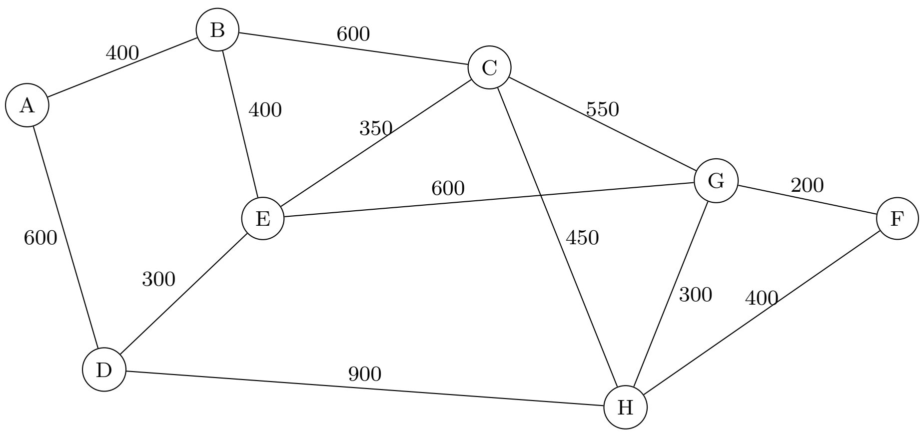
$$M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 3 & 5 & 1 & 1 & 4 & 1 \\ 5 & 2 & 7 & 2 & 8 & 3 & 3 & 5 \\ 3 & 7 & 6 & 4 & 9 & 3 & 9 & 10 \\ 5 & 2 & 4 & 0 & 9 & 2 & 3 & 8 \\ 1 & 8 & 9 & 9 & 4 & 4 & 10 & 4 \\ 1 & 3 & 3 & 2 & 4 & 2 & 6 & 6 \\ 4 & 3 & 9 & 3 & 10 & 6 & 6 & 9 \\ 1 & 5 & 10 & 8 & 4 & 6 & 9 & 4 \end{pmatrix}$$

Il y a 4 chemins de longueur 3 allant de E à H :

- E - B - C - H
- E - C - G - H
- E - G - C - H
- E - G - F - H

Partie B

Des contraintes d'organisation obligent cet homme politique à se rendre dans la ville F après la ville A.
Le graphe $\mathcal{G}$ est complété ci-dessous par les longueurs en kilomètre de chaque tronçon d'autoroute.



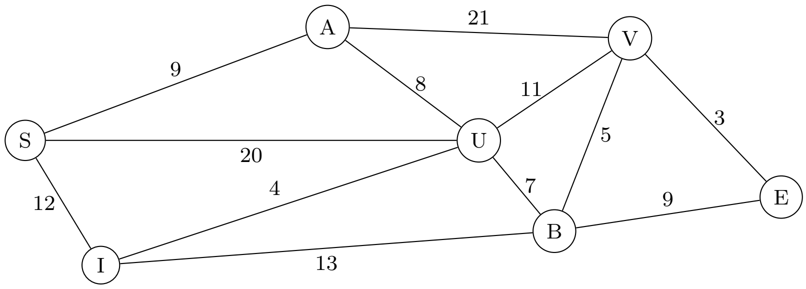
Appliquons l'algorithme de Dijkstra :

	A	B	C	D	E	F	G	H
A	|	(400,A)	∞	(600,A)	∞	∞	∞	∞
B	|	|	(1000,B)	(600,A)	(800,B)	∞	∞	∞
D	|	|	(1000,B)	|	(900,D) > (800,B)	∞	∞	(1500,D)
E	|	|	(1150,E) > (1000,B)	|	(800,B)	∞	(1400,E)	(1500,D)
C	|	|	|	|	|	∞	(1550,C) > (1400,E)	(1450,C) < (1500,D)
G	|	|	|	|	|	(1600,G)	(1400,E)	(1700,G) > (1450,C)
H	|	|	|	|	|	(1850,H) > (1600,G)	|	(1450,C)
F	|	|	|	|	|	(1600,G)	|	|

Donc, le chemin le plus court de la ville A à la ville F est $A-B-E-G-F$ d'une distance de 1600km.

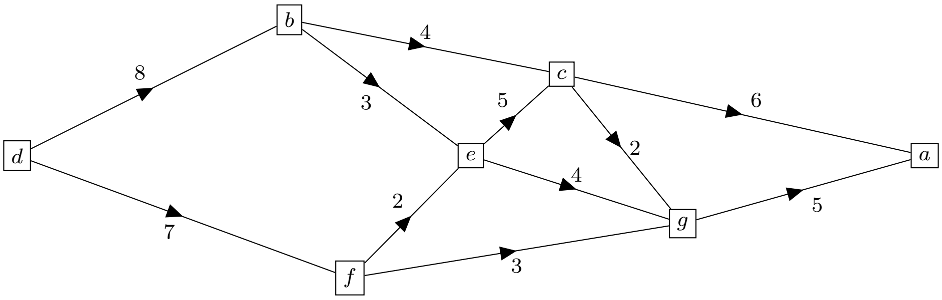
Algorithme de Dijkstra : Exercices supplémentaires

Exercice 1. On considère le graphe pondéré suivant :



Déterminer la plus courte chaîne menant de S à E avec l'algorithme de Dijkstra.

Exercice 2. le réseau ci-dessous représente un réseau de rivières, la durée moyenne des promenades entre deux jonctions et le sens d'écoulement de l'eau.



1. deux groupes d'amis font du kayak.
   le premier groupe suit le chemin d b e g a, le second groupe suit le chemin d f e b c a.
   indiquer le poids de ces deux chaînes.
   qui arrivera le premier ?
2. déterminer le chemin le plus court. Justifier la réponse.

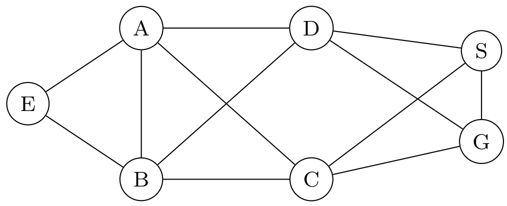
Devoir sur table 2 : Graphes

mardi 15 mars 2016

On prendra soin de justifier toutes les réponses !

Exercice 1.

Partie A Le graphe représente les chemins entre les différentes stations du réseau des égouts d'une ville.

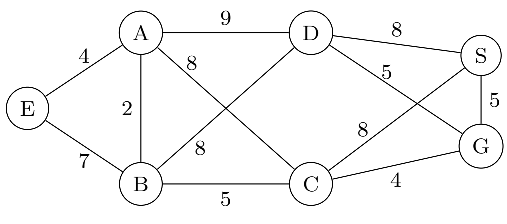


1. Un ouvrier se demande s'il peut passer par toutes les stations au moins une fois en empruntant tous les chemins exactement une fois.
   a) Est-ce possible en partant de la station E ? Si oui donner un tel chemin.
   b) Est-ce possible en partant de la station S ? Si oui donner un tel chemin.
2. On ordonne les sommets du graphe de la manière suivante : E, A, B, C, D, G, S.
   a) Déterminer la matrice d'adjacence M associée au graphe précédent.
   b) Quelle est la nature de la matrice M ?
   c) Avec l'ordinateur, on a obtenu le résultat suivant :

$$M^3 = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 7 & 2 & 2 & 4 & 4 \\ 7 & 6 & 7 & 11 & 11 & 4 & 4 \\ 7 & 7 & 6 & 11 & 11 & 4 & 4 \\ 2 & 11 & 11 & 4 & 4 & 9 & 9 \\ 2 & 11 & 11 & 4 & 4 & 9 & 9 \\ 4 & 4 & 4 & 9 & 9 & 4 & 5 \\ 4 & 4 & 4 & 9 & 9 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

   Déterminer le nombre de chemins de longueur 3 de la station E à la station S et préciser ces chemins.

Partie B Le graphe pondéré ci-dessous donne, en minutes, les durées des trajets existant entre les différentes stations du réseau des égouts d'une ville.



1. Un ouvrier doit se rendre par ce réseau de la station E à S. Déterminer, en utilsant un algorithme, le trajet le plus rapide pour aller de E à S et préciser sa durée.

2. Ayant choisi le trajet le plus rapide, l'ouvrier arrivant en C, apprend que les canalisations CG et CS sont fermées pour cause de travaux et qu'il ne peut les utiliser.
   a) Combien de temps le trajet entre E et S prendra-t-il dans ce cas ?
   b) S'il avait su dès le départ que les canalisations CG et CS étaient impraticables, quel trajet aurait choisi l'ouvrier pour se rendre, au plus vite de E à S ?
   Combien de temps ce trajet aurait-il pris ?

Exercice 2.

Soit

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice M est la matrice d'adjacence d'un graphe G non orienté.

Est-ce que le graphe G possède une chaine Eulérienne ?

Facultatif **Exercice 3.** Soit G un graphe simple non orienté fini ayant n sommets ($n > 1$).

1. Justifier que le degré d'un sommet est toujours strictement inférieur à n.
2. Justifier qu'il ne peut pas y avoir simultanément un sommet de degré 0 et un sommet de degré $n - 1$.
3. En déduire qu'il y a au moins deux sommets de même degré.

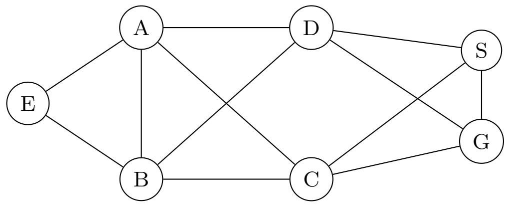
Devoir sur table 2 : Graphes

corrigé

On prendra soin de justifier toutes les réponses !

Exercice 1.

Partie A Le graphe représente les chemins entre les différentes stations du réseau des égouts d'une ville.



1. Un ouvrier se demande s'il peut passer par toutes les stations au moins une fois en empruntant tous les chemins exactement une fois.
   a) Ce n'est pas possible en partant de la station E. En effet, comme le grpahe est connexe et il y a exactement deux sommets de degré impair, les sommets S et G, on déduit d'après le théorème d'Euler qu'il existe une chaîne Eulérienne qui n'est pas un cycle est qui commence nécessairement en un des sommets de degré impair donc différent de E.
   b) De la question précédente, on déduit qu'il possible d'emprunter un tel chemin en partant de la station S. Par exemple : $S - D - A - E - B - C - A - B - D - G - C - S - G$.
2. On ordonne les sommets du graphe de la manière suivante : E, A, B, C, D, G, S.
   a) La matrice d'adjacence M associée au graphe précédent est :

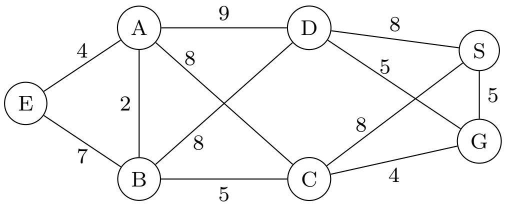
$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   b) La matrice M est symétrique.
   c) Avec l'ordinateur, on a obtenu le résultat suivant :

$$M^3 = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 7 & 2 & 2 & 4 & 4 \\ 7 & 6 & 7 & 11 & 11 & 4 & 4 \\ 7 & 7 & 6 & 11 & 11 & 4 & 4 \\ 2 & 11 & 11 & 4 & 4 & 9 & 9 \\ 2 & 11 & 11 & 4 & 4 & 9 & 9 \\ 4 & 4 & 4 & 9 & 9 & 4 & 5 \\ 4 & 4 & 4 & 9 & 9 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

Le coefficient sur la 1ère ligne et 7ème colonne de M^3 est 4, ainsi le nombre de chemins de longueur 3 de la station E à la station S est 4, voici les différents chemins possibles : E - A - C - S, E - A - D - S, E - B - C - S et E - B - D - S.

Partie B Le graphe pondéré ci-dessous donne, en minutes, les durées des trajets existant entre les différentes stations du réseau des égouts d'une ville.



1. Appliquons l'algorithme de Dijkstra :

	E	A	B	C	D	G	S
E	0	$(4, E)$	$(7, E)$	∞	∞	∞	∞
A,4	0	|	$(6, A)$	$(12, A)$	$(13, A)$	∞	∞
B,6	0	|	|	$(11, B)$	$(13, A)$	∞	∞
C,11	0	|	|	|	$(13, A)$	$(15, C)$	$(19, C)$
D,13	0	|	|	|	|	$(15, C)$	$(19, C)$
G,15	0	|	|	|	|	|	$(19, C)$
S,19	0	|	|	|	|	|	|

   Ainsi, le trajet le plus rapide est $E - A - B - C - S$ et il faudra 19 minutes à l'ouvrier.

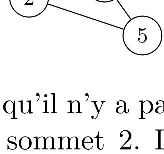
2. Ayant choisi le trajet le plus rapide, l'ouvrier arrivant en C, apprend que les canalisations CG et CS sont fermées pour cause de travaux et qu'il ne peut les utiliser.
   a) Dans ce cas, le trajet entre E et S sera le suivant $E - A - B - C - B - D - S$ et durera 32 minutes.
   b) En appliquant une seconde fois l'algorithme de Dijkstra, on note que s'il avait su dès le départ que les canalisations CG et CS étaient impraticables, l'ouvrier aurait du choisir le trajet $E - A - D - S$ pour se rendre, au plus vite de E à S. Il aurait alors mis 21 minutes.

Exercice 2.

Soit

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Voici un graphe non orienté dont M est la matrice d'adjacence :



Ainsi, on voit qu'il n'y a pas de chaîne du sommet 1 au sommet 2. D'où le graphe G n'est pas connexe et ne possède pas de chaine Eulérienne.

Devoir maison 4 : Matrices, graphes, probabilités

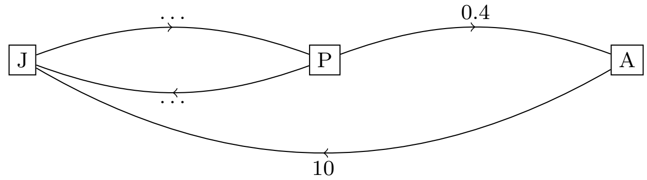
pour le mardi 19 avril 2016

Exercice 1 (Modèle de Leslie)**.** On s'intéresse à une population de rongeurs ayant un cycle de reproduction de 3 ans, répartie en trois catégories : juvéniles (J), pré-adultes (P) (rongeurs de 1 an) et adultes (A) (rongeurs de 2 ans).
On ne considère ici que la sous-population formée des individus femelles. On suppose que chaque femelle donne naissance en moyenne à 6 femelles durant sa deuxième année (lorsqu'elle est pré-adulte) et à 10 femelles durant sa troisième année (lorsqu'elle est adulte). Cependant, une femelle sur deux survit au-delà de sa première année et 40% de celles qui survivent la deuxième année survivront jusqu'à la troisième année. On suppose donc qu'aucun rongeur ne vit plus de 3 années.
En 2012, cette population de rongeurs comportait 30 juvéniles, 50 pré-adultes et 50 adultes.
On se propose d'étudier l'évolution de cette population de rongeurs.

1. Avec un tableau :
   On souhaite prédire l'évolution de cette population à l'aide d'un tableur.
   a) Réaliser cette feuille de calcul. Saisir la formule adéquate dans la cellule F2 ; puis les formules adéquates dans la plage B3 :E3, puis recopier vers le bas.

	A	B	C	D	E	F	G
1	Année	Rang de l'année	Juvéniles	Pré-adultes	Adultes	Total des femelles	Rapport
2	2012	0	30	50	50	130	
3	2013	1	800	15	20	835	6,42
4	2014	2					

   Vous écrirez toutes les formules entrées sur votre copie.
   b) Déterminer le nombre de rougeurs dans chaque catégorie en 2027.
   c) Pour avoir une idée de l'évolution de cette population, représenter dans une même fenêtre graphique l'allure du nuage de points correspondant aux trois catégories ainsi qu'à la population totale. De quel type d'évolution s'agit-il ?
   d) Dans la colonne G, on décide de faire apparaître les rapports entre le nombre total de rongeurs femelles et celui de l'année précédente.
      - Saisir en G3 la formule adéquate afin d'obtenir, par recopie vers le bas, ce rapport au cours des années suivantes.
      - Quelle conjecture peut-on émettre sur l'évolution de ce rapport ? La réprésenter dans une nouvelle fenêtre graphique.
      - Émettre alors une conjecture sur l'évolution de cette population de rongeurs.
2. Avec un graphe pondéré :
   a) Recopier et compléter le graphe pondéré ci-contre traduisant la situation.



   b) Donner la matrice de transition M associée construite de manière analogue à celle d'un graphe probabiliste en choississant comme ordre des sommets : J, P, A.
   La matrice M est appelée la matrice de Leslie du modèle.

c) Si l'on désigne respectivement par j_n, p_n et a_n le nombre de femelles juvéniles, pré-adultes et adultes en $2012+n$, justifier que la situation peut se traduire par le système suivant :

$$\begin{cases} j_{n+1} &= 6\,p_n + 10\,a_n \\ p_{n+1} &= 0.5\,j_n \\ a_{n+1} &= 0.4\,p_n \end{cases}$$

d) En notant X_n la matrice ligne $\begin{bmatrix} j_n & p_n & a_n \end{bmatrix}$ donnant la répartition de la population en $2012+n$, vérifier que $X_{n+1} = X_n \times M$.

e) Montrer que $X_2 = X_0 \times M^2$.

f) On admet que pour tout nombre entier naturel n, $X_n = X_0 \times M^n$.
Donner avec la calculatrice le nombre de rongeurs dans chaque catégorie en 2027.

Remarque. Le statisticien anglais Partick Leslie a développé en 1945 un modèle pour décrire l'évolution du nombre de femmelles chez les rongeurs qui provoquent de gros dégâts dans les réserves alimentaires. De nos jours, ce modèle est adopté par de nombreux biologistes et son usage est facilité par l'emploi d'ordinateurs comme nous l'avons vu.

Exercice 2. Deux camarades Théophile et Joséphine étudient une suite numérique (u_n). Théophile observe que

$$\frac{u_1}{u_0} = \frac{u_2}{u_1} = \frac{u_3}{u_2} = 2$$

et il en déduit que (u_n) est géométrique de raison 2.
Joséphine sait que pour montrer qu'une suite (u_n) est géométrique, il faut montrer qu'il existe un nombre réel q tel que **pour tout entier naturel** n, on a la relation $u_{n+1} = q \times u_n$ et que le test fait par Théophile ne suffit pas. Elle aimerait bien convaincre Théophile à l'aide d'un contre exemple et pense qu'une suite définie à l'aide d'un polynôme fera un bon exemple. Elle cherche donc des nombres réels a, b et c tels que la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par

$$u_n = a\,n^3 + b\,n^2 + c\,n + 1$$

vérifie la propriété suivante :

$$\frac{u_1}{u_0} = \frac{u_2}{u_1} = \frac{u_3}{u_2} = 2$$

1. Déterminer les nombres a, b et c.
2. A-t-elle trouvé un contre exemple ? Justifier.

Devoir maison 4 : Matrices, graphes, probabilités

corrigé

Exercice 1 (Modèle de Leslie)**.** On s'intéresse à une population de rongeurs ayant un cycle de reproduction de 3 ans, répartie en trois catégories : juvéniles (J), pré-adultes (P) (rongeurs de 1 an) et adultes (A) (rongeurs de 2 ans).
On ne considère ici que la sous-population formée des individus femelles. On suppose que chaque femelle donne naissance en moyenne à 6 femelles durant sa deuxième année (lorsqu'elle est pré-adulte) et à 10 femelles durant sa troisième année (lorsqu'elle est adulte). Cependant, une femelle sur deux survit au-delà de sa première année et 40% de celles qui survivent la deuxième année survivront jusqu'à la troisième année. On suppose donc qu'aucun rongeur ne vit plus de 3 années.
En 2012, cette population de rongeurs comportait 30 juvéniles, 50 pré-adultes et 50 adultes.
On se propose d'étudier l'évolution de cette population de rongeurs.

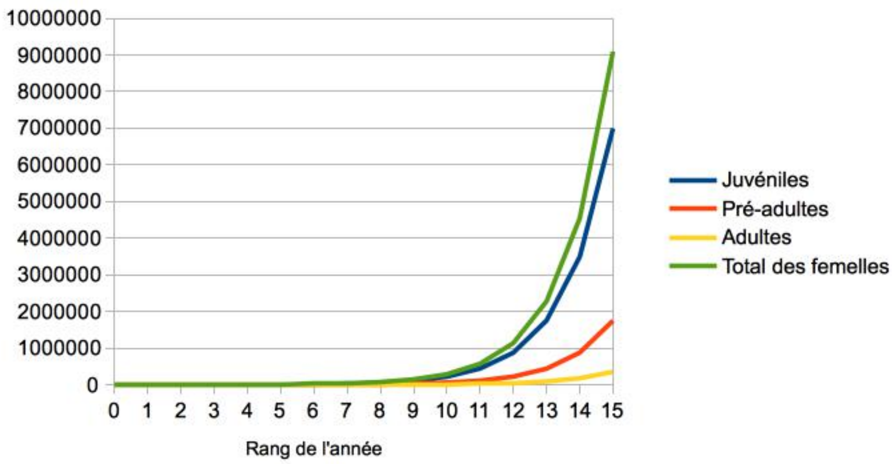
1. Avec un tableau :
   On souhaite prédire l'évolution de cette population à l'aide d'un tableur.
   a) (Réaliser cette feuille de calcul. Saisir la formule adéquate dans la cellule F2 ; puis les formules adéquates dans la plage A3 :F3, puis recopier vers le bas.)

	A	B	C	D	E	F	G
1	Année	Rang de l'année	Juvéniles	Pré-adultes	Adultes	Total des femelles	Rapport
2	2012	0	30	50	50	130	
3	2013	1	800	15	20	835	6,42
4	2014	2	290	400	6	696	0,83
5	2015	3	2460	145	160	2765	3,97
6	2016	4	2470	1230	58	3758	1,36
7	2017	5	7960	1235	492	9687	2,58
8	2018	6	12330	3980	494	16804	1,73
9	2019	7	28820	6165	1592	36577	2,18
10	2020	8	52910	14410	2466	69786	1,91
11	2021	9	111120	26455	5764	143339	2,05
12	2022	10	216370	55560	10582	282512	1,97
13	2023	11	439180	108185	22224	569589	2,02
14	2024	12	871350	219590	43274	1134214	1,99
15	2025	13	1750280	435675	87836	2273791	2,00
16	2026	14	3492410	875140	174270	4541820	2,00
17	2027	15	6993540	1746205	350056	9089801	2,00

   Précisons certaines formules :

```
F2 = SOMME(C2:E2)      A3 = A2 + 1      B3 = B2 + 1
C3 = 6*D2 + 10*E2      D3 = 0,5*C2      E3 = 0,4*D2
F3 = SOMME(C3:E3)
```

   b) En 2027, il y aura 6 993 540 rongeurs juvéniles, 1 746 205 pré-adultes, 340 056 rongeurs adultes.
   c) Pour avoir une idée de l'évolution de cette population, représenter dans une même fenêtre graphique l'allure du nuage de points correspondant aux trois catégories ainsi qu'à la population totale.



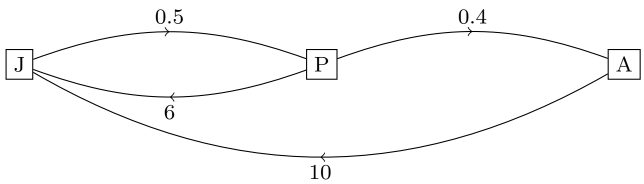
D'après les courbes précédentes, le croissance des populations de rongeurs est exponentielle.

d) Dans la colonne G, on décide de faire apparaître les rapports entre le nombre total de rongeurs femelles et celui de l'année précédente.

- Dans la cellule G3, on tape `= F3/F2`. Puis, on recopie vers le bas, pour obtenir les rapports au cours des années suivantes.
- D'après le tableau, il semblerait qu'à partir de 2025, le rapport est environ égal à 2. (La représenter dans une nouvelle fenêtre graphique.)
- À partir de 2025, on peut estimer que la population totale double tous les ans. Elle s'identifie donc à une suite géométrique de raison 2 et la croissance est bien exponentielle.

2. Avec un graphe pondéré :

a) Recopier et compléter le graphe pondéré ci-contre traduisant la situation.



b) La matrice de transition M associée construite de manière analogue à celle d'un graphe probabiliste en choisissant comme ordre des sommets : J, P, A est

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 0 \\ 6 & 0 & 0.4 \\ 10 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La matrice M est appelée la matrice de Leslie du modèle.

c) Posons respectivement par j_n, p_n et a_n le nombre de femelles juvéniles, pré-adultes et adultes en $2012 + n$. Par hypothèse, chaque femelle pré-adulte donne naissance à 6 femelles en moyenne et chaque femelle adulte donne naissance à 10 femelles en moyenne, d'où le nombre de juvéniles l'année suivante est $j_{n+1} = 6\,p_n + 10\,a_n$. De même, avec les deux données suivantes de l'énoncé, on déduit que $p_{n+1} = 0.5\,j_n$ et

$a_{n+1} = 0.4\,p_n$. En résumé, on a donc le sytème suivant :

$$\begin{cases} j_{n+1} &= 6\,p_n + 10\,a_n \\ p_{n+1} &= 0.5\,j_n \\ a_{n+1} &= 0.4\,p_n \end{cases}$$

d) En notant X_n la matrice ligne $\begin{bmatrix} j_n & p_n & a_n \end{bmatrix}$ donnant la répartition de la population en $2012 + n$. On note que

$$\begin{aligned} X_n \times M &= \begin{bmatrix} j_n & p_n & a_n \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 0 \\ 6 & 0 & 0.4 \\ 10 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 6p_n + 10a_n & 0.5j_n & 0.4p_n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} j_{n+1} & p_{n+1} & a_{n+1} \end{bmatrix} \\ &= X_{n+1} \end{aligned}$$

D'où $X_{n+1} = X_n \times M$.

e) On en déduit que $X_2 = X_1 \times M = (X_0 \times M) \times M = X_0 \times (M \times M) = X_0 \times M^2$.

f) On admet que pour tout nombre entier naturel n, $X_n = X_0 \times M^n$. Ainsi, en $2027 = 2012 + 15$, on a

$$X_{15} = X_0 \times M^{15} = \begin{bmatrix} 30 & 50 & 50 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 0 \\ 6 & 0 & 0.4 \\ 10 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{15}$$

D'où, en 2027, il y aura 6 993 540 rongeurs juvéniles, 1 746 205 pré-adultes, 340 056 rongeurs adultes.

Exercice 2. Soit (u_n) définie pour tout entier naturel n par

$$u_n = a\,n^3 + b\,n^2 + c\,n + 1$$

vérifiant

$$\frac{u_1}{u_0} = \frac{u_2}{u_1} = \frac{u_3}{u_2} = 2$$

1. On note que par définition $u_0 = 1$ et comme $\frac{u_1}{u_0} = 2$, on déduit que $u_1 = 2 \times u_0 = 2$. De même

$$\begin{aligned} &u_0 = 1 \\ &u_1 = 2 \\ &u_2 = u_1 \times 2 = 2 \times 2 = 4 \\ &u_3 = u_2 \times 2 = 4 \times 2 = 8 \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{cases} u_1 &= a+b+c+1 = 1 \\ u_2 &= 8a+4b+2c+1 = 2 \\ u_3 &= 27a+9b+3c+1 = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a+b+c &= 0 \\ 8a+4b+2c &= 1 \\ 27a+9b+3c &= 3 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 8 & 4 & 2 \\ 27 & 9 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

or la matrice de gauche est inversible, d'où

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 8 & 4 & 2 \\ 27 & 9 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ 0 \\ \frac{5}{6} \end{pmatrix}$$

C'est-à dire la suite (u_n) est définie par

$$u_n = \frac{1}{6}n^3 + \frac{5}{6}n + 1$$

pour tout entier n.
On peut vérifier que

n	0	1	2	3
u_n	1	2	4	8

et donc $\frac{u_1}{u_0} = \frac{u_2}{u_1} = \frac{u_3}{u_2} = 2$.

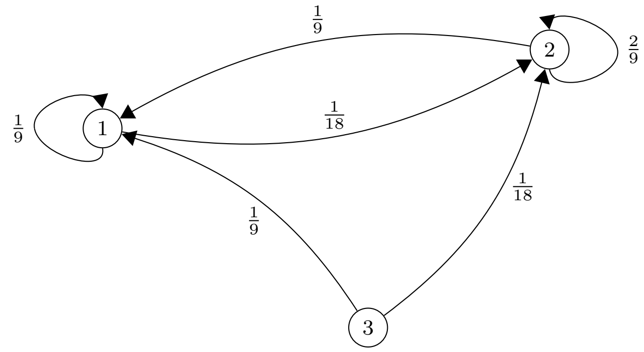
2. Mais, la suite (u_n) **n'est pas géométrique**. En effet, comme $u_4 = 15$,

$$\frac{u_4}{u_3} = \frac{15}{8} = 1.875 \neq 2$$

Exercices : état stable d'un graphe probabiliste

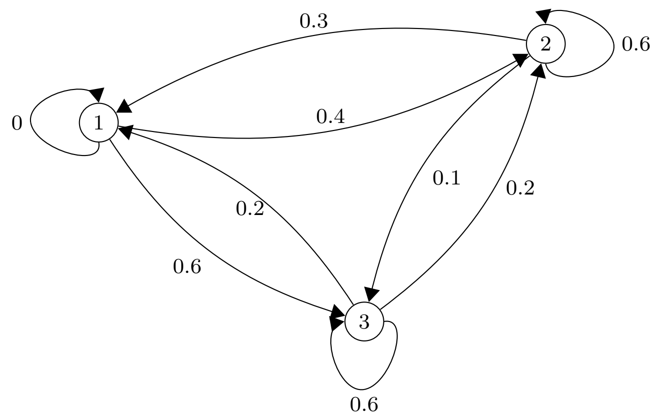
mercredi 11 mai 2016

Exercice 1. On considère le graphe probabiliste suivant :



1. Compléter le graphe.
2. Déterminer l'état stable $P = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}$ associé à ce graphe probabiliste.

Exercice 2. On considère le graphe probabiliste suivant :



Montrer que l'état stable associé à ce graphe probabiliste est $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$.

Exercice 3. Vérifier que l'état stable associé à la matrice de transition :

1. $M = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.7 \\ 0.7 & 0.3 \end{pmatrix}$ est $P = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$.
2. $M = \begin{pmatrix} 0.15 & 0.85 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}$ est $P = \begin{pmatrix} \frac{8}{25} & \frac{17}{25} \end{pmatrix}$.
3. $M = \begin{pmatrix} 0.55 & 0.15 & 0.3 \\ 0.4 & 0.1 & 0.5 \\ 0.3 & 0.4 & 0.3 \end{pmatrix}$ est $P = \begin{pmatrix} 0.43 & 0.225 & 0.345 \end{pmatrix}$.

Exercices et sujets de Baccalauréat

Exercice 1. On considère une grande population d'acheteurs de yaourts. On suppose que l'effectif de cette population est stable.
Une entreprise commercialise des yaourts sous la marque Y et 30 % des acheteurs de yaourts achètent la marque Y. L'entreprise décide de faire une campagne publicitaire pour améliorer ses ventes.
Au bout d'une semaine, une enquête indique que :

- 20% des acheteurs de yaourts qui achetaient la semaine précédente des yaourts des autres marques achètent maintenant des yaourts Y ;
- 10% des acheteurs de yaourts qui achetaient la semaine précédente des yaourts Y achètent maintenant des yaourts des autres marques.

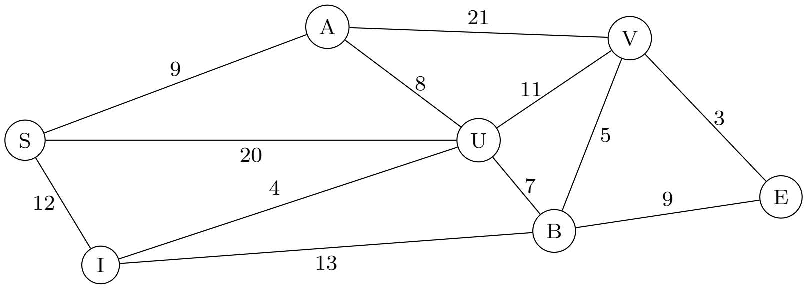
L'entreprise continue sa campagne publicitaire. On fait l'hypothèse que l'évolution des résultats obtenus à l'issue de la première semaine de campagne publicitaire est la même les semaines suivantes.

1. Dessiner le graphe probabiliste correspondant à cette situation (les sommets seront appelés Y et Z).
2. Soit $X_0 = [0.3\ 0.7]$ la matrice ligne décrivant l'état probabiliste initial de la population.
   a) Donner la matrice de transition A associée au graphe précédent (on prend les sommets dans l'ordre Y , Z).
   b) Déterminer la probabilité qu'un acheteur de yaourts choisi au hasard, après deux semaines de campagne publicitaire, achète des yaourts de la marque Y.
   c) Déterminer la probabilité qu'un acheteur de yaourts choisi au hasard, après 20 semaines de campagne publicitaire, achète des yaourts de la marque Y.
3. *Une première méthode :* On note $P_n = [y_n\ z_n]$ l'état probabiliste de la population au bout de n semaines.
   a) Déterminer l'état stable $P = [y\ z]$ associé.
   b) Déterminer les limites des suites (y_n) et (z_n).
   c) Est-ce qu'avec cette stratégie commerciale l'entreprise qui produit les yaourts Y peut espérer avoir le monopole ?
4. *Une autre méthode :* On admet que, pour tout entier naturel n, la matrice de transition A à la puissance n s'écrit ainsi

$$A^n = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} + \left(\frac{1}{3}\right) 0.7^n & \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{3}\right) 0.7^n \\ \frac{2}{3} - \left(\frac{2}{3}\right) 0.7^n & \frac{1}{3} + \left(\frac{2}{3}\right) 0.7^n \end{bmatrix}$$

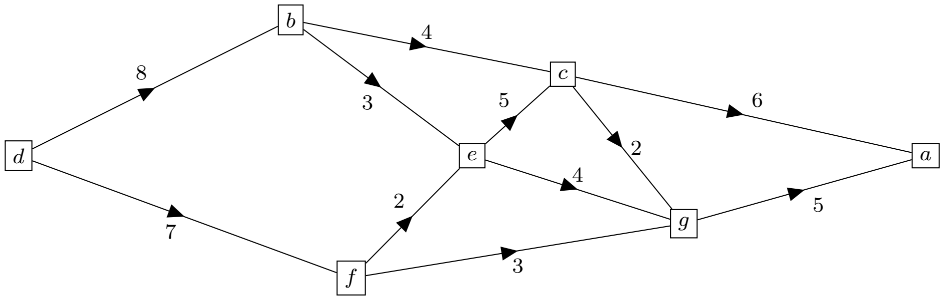
   Soit $P_n = [y_n\ z_n]$, la matrice ligne décrivant l'état probabiliste de la population après n semaines de campagne publicitaire.
   a) Calculer le produit $P_0 \times A^n$.
   b) Exprimer y_n en fonction de n.
   c) En déduire la limite de la suite (y_n).
   d) Avec l'hypothèse ci-dessus, l'entreprise peut-elle espérer atteindre une part de marché de 70 % ? Justifier.

Exercice 2. On considère le graphe pondéré suivant :



Déterminer la plus courte chaîne menant de S à E avec l'algorithme de Dijkstra.

Exercice 3. le réseau ci-dessous représente un réseau de rivières, la durée moyenne des promenades entre deux jonctions et le sens d'écoulement de l'eau.



1. deux groupes d'amis font du kayak.
   le premier groupe suit le chemin d b e g a, le second groupe suit le chemin d f e b c a.
   indiquer le poids de ces deux chaînes.
   qui arrivera le premier ?
2. déterminer le chemin le plus court. Justifier la réponse.

Exercice 4 (Métropole,20 juin 2014)**.** Alice participe à une compétition de tir à l'arc ; elle effectue plusieurs lancers de flèches.
Lorsqu'elle atteint la cible à un lancer, la probabilité qu'elle atteigne la cible au lancer suivant est égale à $0,9$.
Lorsqu'elle a manqué la cible à un lancer, Alice se déconcentre et la probabilité qu'elle atteigne la cible au lancer suivant est égale à $0,4$.
On suppose qu'au premier lancer, elle a autant de chances d'atteindre la cible que de la manquer.
Pour tout nombre entier naturel n strictement positif, on note :

a_n la probabilité qu'Alice atteigne la cible au n-ième lancer ;

b_n la probabilité qu'Alice manque la cible au n-ième lancer ;

$P_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$ la matrice ligne traduisant l'état probabiliste au n-ième lancer.

1. a) Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets A et B (A représentant l'état “Alice atteint la cible" et B l'état “Alice manque sa cible").
   b) Indiquer la matrice de transition M associée à ce graphe. On prendra les sommets A et B dans l'ordre (A, B).
   c) Justifier que $P_1 = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$ et $P_2 = \begin{pmatrix} 0,65 & 0,35 \end{pmatrix}$.
2. a) Montrer que, pour tout nombre entier n strictement positif, $a_{n+1} = 0,9a_n + 0,4b_n$.
   b) En déduire que, pour tout nombre entier n strictement positif, $a_{n+1} = 0,5a_n + 0,4$.
3. a) Compléter l'algorithme fourni en annexe 1 de façon à ce qu'il affiche l'état probabiliste au n-ième lancer.
   b) Déterminer l'affichage de cet algorithme pour $n = 5$.
4. a) On considère la suite (u_n) définie pour tout nombre entier naturel n strictement positif par : $u_n = a_n - 0,8$.
   Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
   b) Donner l'expression de u_n en fonction de n, puis en déduire que pour tout nombre entier naturel n strictement positif, $a_n = 0,8 - 0,3 \times 0,5^{n-1}$.
   c) À long terme, que peut-on penser de la probabilité qu'Alice atteigne la cible ?
   d) Par quelle autre méthode aurait-on pu trouver le résultat précédent ?

Annexe à rendre avec la copie

Entrées
  Saisir n
Traitement
  a prend la valeur 0,5
  b prend la valeur 0,5
  Pour i allant de 2 à n
    a prend la valeur $\ldots\ldots \times a + \ldots$
    b prend la valeur $1 - a$
  Fin Pour
Sortie
  Afficher a, b

Exercice 5 (Pondichéry, 7 avril 2014). *Les parties A et B sont indépendantes*

Deux sociétés, Ultra-eau (U) et Vital-eau (V), se partagent le marché des fontaines d'eau à bonbonnes dans les entreprises d'une grande ville.

Partie A

En 2013, l'entreprise U avait 45 % du marché et l'entreprise V le reste. Chaque année, l'entreprise U conserve 90 % de ses clients, les autres choisissent l'entreprise V. Quant à l'entreprise V, elle conserve 85 % de ses clients, les autres choisissent l'entreprise U.
On choisit un client au hasard tous les ans et on note pour tout entier naturel n :

u_n la probabilité qu'il soit un client de l'entreprise U l'année $2013+n$, ainsi $u_0 = 0,45$;

v_n la probabilité qu'il soit un client de l'entreprise V l'année $2013+n$.

1. Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets U et V.
2. Donner v_0, calculer u_1 et v_1·
3. On considère l'algorithme (incomplet) donné en annexe. Celui-ci doit donner en sortie les valeurs de u_n et v_n pour un entier naturel n saisi en entrée.
   Compléter les lignes (L5) et (L8) de l'algorithme pour obtenir le résultat attendu.
4. On admet que, pour tout nombre entier naturel $n, u_{n+1} = 0,75u_n + 0,15$. On note, pour tout nombre entier naturel $n, w_n = u_n - 0,6$.
   a) Montrer que la suite (w_n) est une suite géométrique de raison $0,75$.
   b) Quelle est la limite de la suite (w_n) ? En déduire la limite de la suite (u_n). Interpréter le résultat dans le contexte de cet exercice.

Partie B

L'entreprise U fournit ses clients en recharges pour les fontaines à eau et dispose des résultats antérieurs suivants :

Nombre de recharges en milliers	1	3	5
Coût total annuel de production en centaines d'euros	11	27,4	83

Le coût total de production est modélisé par une fonction C définie pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0\,;\,10]$ par :

$$C(x) = ax^3 + bx^2 + cx + 10 \qquad a, b \text{ et } c \text{ sont des nombres réels.}$$

Lorsque le nombre x désigne le nombre de milliers de recharges produites, $C(x)$ est le coût total de production en centaines d'euros.
On admet que le triplet (a, b, c) est solution du système (S).

$$(S) \quad \begin{cases} a+b+c &= 1 \\ 27a+9b+3c &= 17,4 \\ 125a+25b+5c &= 73 \end{cases} \text{ et on pose } X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

1. a) Écrire ce système sous la forme $MX = Y$ où M et Y sont des matrices que l'on précisera.
   b) On admet que la matrice M est inversible. Déterminer, à l'aide de la calculatrice, le triplet (a, b, c) solution du système (S).

2. En utilisant cette modélisation, quel serait le coût total annuel de production pour 8000 recharges d'eau produites ?

Annexe à l'exercice 2

Recopier sur la copie la partie "traitement" (lignes L3 à L9) en complétant les lignes L5 et L8.

Variables :	N est un nombre entier naturel non nul	L1
	U et V sont des nombres réels	L2
Traitement :	Saisir une valeur pour N	L3
	Affecter à U la valeur 0,45	L4
	Affecter à V la valeur	L5
	Pour i allant de 1 jusqu'à N	L6
	Affecter à U la valeur $0,9 \times U + 0,15 \times V$	L7
	Affecter à V la valeur	L8
	Fin Pour	L9
Sortie :	Afficher U et Afficher V	L10

Exercice 6 (Pondichéry, 2015)**.** Les sites internet A, B, C ont des liens entre eux. Un internaute connecté sur un de ces trois sites peut, à toutes les minutes, soit y rester soit utiliser un lien vers un des deux autres sites.

- Pour un internaute connecté sur le site A, la probabilité d'utiliser le lien vers B est de 0,2 et celle d'utiliser le lien vers C est de 0,2.
- Pour un internaute connecté sur le site B, la probabilité d'utiliser le lien vers A est de 0,1 et celle d'utiliser le lien vers C est de 0,4.
- Pour un internaute connecté sur le site C, la probabilité d'utiliser le lien vers A est de 0,2 mais il n'y a pas de lien direct avec B.

L'unité de temps est la minute, et à un instant $t = 0$, le nombre de visiteurs est, respectivement sur les sites A, B et C : 100, 0 et 0.
On représente la distribution des internautes sur les trois sites après t minutes par une matrice N_t ; ainsi $N_0 = \begin{pmatrix} 100 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
On suppose qu'il n'y a ni déconnexion pendant l'heure (de $t = 0$ à $t = 60$) ni nouveaux internautes visiteurs.

1. Représenter le graphe probabiliste de sommets A, B et C correspondant à la situation décrite.
2. Écrire la matrice M de transition associée à ce graphe (dans l'ordre A, B, C).
3. On donne

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0,42 & 0,22 & 0,36 \\ 0,19 & 0,27 & 0,54 \\ 0,28 & 0,04 & 0,68 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M^{20} \approx \begin{pmatrix} 0,3125 & 0,125 & 0,5625 \\ 0,3125 & 0,125 & 0,5625 \\ 0,3125 & 0,125 & 0,5625 \end{pmatrix}.$$

   Calculer N_2. Interpréter le résultat obtenu.
4. Calculer $N_0 \times M^{20}$. Conjecturer la valeur de l'état stable et interpréter la réponse.
5. Un des internautes transmet un virus à tout site qu'il visitera.
   Il se connecte initialement sur le site C et commence sa navigation.
   À l'instant $t = 0$, le site C est donc infecté.
   a) Quelle est la probabilité qu'à l'instant $t = 1$ le site A soit infecté ?
   b) Quelle est la probabilité qu'à l'instant $t = 2$ les trois sites soient infectés ?

Exercice 7 (Liban 2015)**.** Dans un pays, seulement deux opérateurs de téléphonie mobile SAFIR et TECIM proposent la 4G (standard de transmission de données).
Une étude a montré que d'une année à l'autre :

- 41 % des clients de l'opérateur SAFIR le quittent pour l'opérateur TECIM ;
- 9 % des clients de l'opérateur TECIM le quittent pour l'opérateur SAFIR ;
- Aucun client ne renonce à l'utilisation de la 4G.

Cette situation peut être modélisée par un graphe probabiliste $\mathcal{G}$ de sommets S et T où :

- S est l'évènement « l'utilisateur de la 4G est un client de l'opérateur SAFIR » ;
- T est l'évènement « l'utilisateur de la 4G est un client de l'opérateur TECIM ».

Chaque année on choisit au hasard un utilisateur de la 4G et on note pour tout entier naturel n :

- s_n la probabilité que cet utilisateur soit un client de l'opérateur SAFIR en $2014 + n$;
- t_n la probabilité que cet utilisateur soit un client de l'opérateur TECIM en $2014 + n$.

On note $P_n = (s_n \quad t_n)$ la matrice ligne de l'état probabiliste pour l'année $2014 + n$.
Dans cet exercice, on se propose de savoir si l'opérateur TECIM atteindra l'objectif d'avoir comme clients au moins 80 % de la population utilisatrice de la 4G.

Partie A

1. Dessiner le graphe probabiliste $\mathcal{G}$.
2. On admet que la matrice de transition du graphe $\mathcal{G}$ en considérant les sommets dans l'ordre S et T est $M = \begin{pmatrix} 0,59 & 0,41 \\ 0,09 & 0,91 \end{pmatrix}$.
   On note $P = (a \quad b)$ la matrice ligne correspondant à l'état stable de ce graphe $\mathcal{G}$.
   a) Montrer que les nombres a et b sont solutions du système $\begin{cases} 0,41a - 0,09b & = & 0 \\ a + b & = & 1 \end{cases}$.
   b) Résoudre le système précédent.
3. On admet que $a = 0,18$ et $b = 0,82$. Déterminer, en justifiant, si l'opérateur TECIM peut espérer atteindre son objectif.

Partie B

En 2014, on sait que 35 % des utilisateurs de la 4G sont des clients de l'opérateur SAFIR et que 65 % sont des clients de l'opérateur TECIM. Ainsi $P_0 = (0,35 \quad 0,65)$.

1. Déterminer la répartition des clients de la 4G au bout de 2 ans.
2. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $t_{n+1} = 0,5t_n + 0,41$.
3. Pour déterminer au bout de combien d'années l'opérateur TECIM atteindra son objectif, on a commencé par élaborer l'algorithme ci-dessous. Recopier et compléter les lignes L6, L7 et L9 de cet algorithme pour qu'il donne le résultat attendu.

L1	**Variables :**	T est un nombre
L2		N est un nombre entier
L3	**Traitement :**	Affecter à T la valeur 0,65
L4		Affecter à N la valeur 0
L5		Tant que $T < 0,80$
L6		Affecter à T la valeur ...
L7		Affecter à N la valeur ...
L8		Fin Tant que
L9	**Sortie :**	Afficher ...

4. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = t_n - 0,82$.

a) Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison $0,5$. Préciser son premier terme.

b) En déduire que : $t_n = -0,17 \times 0,5^n + 0,82$.

c) Résoudre dans l'ensemble des entiers naturels l'inéquation : $-0,17 \times 0,5^n + 0,82 \geqslant 0,80$.

d) Interpréter ce résultat dans le contexte de l'énoncé.