

On considère la suite (u_n) définie par son premier terme $u_0 = 3$ et par la relation de récurrence:

$$u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 3}{4}.$$

1. Montrer que pour tout entier naturel n , $1 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 2$.

2. On pose $v_n = u_n - 1$ pour tout entier naturel n .

Montrer que $v_{n+1} = v_n \times \frac{v_n + 2}{4}$.

3. Donner un encadrement de $\frac{v_n + 2}{4}$.

4. Montrer que pour tout entier naturel n , $0 \leq v_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n$.

5. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$, puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.