

Exercice 1 (probabilités)

L'entreprise *Fructidoux* fabrique des compotes qu'elle conditionne en petits pots de 50 grammes. Elle souhaite leur attribuer la dénomination « compote allégée ».

La législation impose alors que la teneur en sucre, c'est-à-dire la proportion de sucre dans la compote, soit comprise entre 0,16 et 0,18. On dit dans ce cas que le petit pot de compote est conforme.

L'entreprise possède deux chaînes de fabrication F_1 et F_2 .

La chaîne de production F_2 semble plus fiable que la chaîne de production F_1 . Elle est cependant moins rapide.

Ainsi, dans la production totale, 70 % des petits pots proviennent de la chaîne F_1 et 30 % de la chaîne F_2 .

La chaîne F_1 produit 5 % de compotes non conformes et la chaîne F_2 en produit 1 %.

On prélève au hasard un petit pot dans la production totale. On considère les événements :

E : « Le petit pot provient de la chaîne F_2 »

C : « Le petit pot est conforme. »

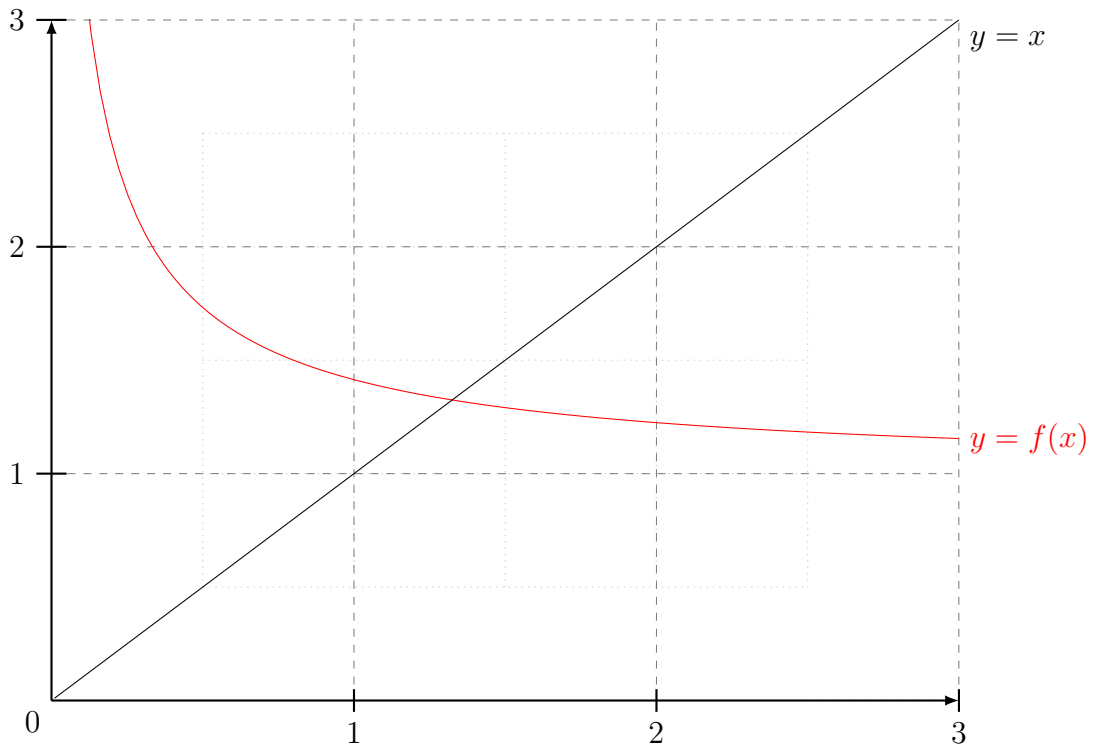
1. Construire un arbre pondéré sur lequel on indiquera les données qui précèdent.
2. Calculer la probabilité de l'événement : « Le petit pot est conforme et provient de la chaîne de production F_1 . »
3. Montrer que la probabilité de l'événement C . est égale à 0,962.
4. Déterminer, à 10^{-3} près, la probabilité de l'événement E sachant que l'événement C est réalisé.
5. On prélève 20 pots au hasard à la sortie des chaînes de fabrication.
 - (a) Quelle est la probabilité qu'il y ait exactement 15 pots conformes ?
 - (b) Quelle est la probabilité qu'il y ait au moins un pot non conforme ?
 - (c) Quelle est la probabilité qu'il y ait au plus 3 pots non conformes ?

Exercice 2 (suites)

On considère la suite (u_n) définie par son premier terme $u_0 = 1$ et par la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \sqrt{1 + \frac{1}{u_n}} = f(u_n) \text{ avec } f(x) = \sqrt{1 + \frac{1}{x}}.$$

1. Placez sur le schéma ci-dessous u_0 , u_1 et u_2 sur l'axe des abscisses. Vous laisserez les traits de construction apparents.



2. Donnez une valeur approchée de u_1 , u_2 et u_3 à 10^{-4} près. Quelle conjecture peut-on faire sur les variations de la suite (u_n) ?

On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = u_{2n}.$$

3. Montrer que $v_{n+1} = g(v_n)$ avec $g(x) = \sqrt{1 + \sqrt{\frac{x}{x+1}}}$.

On admet que g est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

4. Démontrez par récurrence que pour tout entier naturel n , $1 \leq v_n \leq v_{n+1} \leq 2$.
5. En déduire que (v_n) converge. On notera ℓ sa limite.
6. Complétez l'algorithme suivant afin qu'il affiche une valeur approchée de ℓ à 10^{-6} près.

```
v ← 1
n ← 0
w ← 10
Tant que ... :
    w ← v
    v ← sqrt(1+sqrt(v/(v+1)))
Fin du Tant que
Afficher ...
```