

**Terminale**

Edition 2026 - 2027

# Mathématiques

Enseignement de spécialité

Stéphane Pasquet

Uniquement sur [mathweb.fr](https://mathweb.fr)





# Table des matières

|                        |     |
|------------------------|-----|
| AVANT—PROPOS . . . . . | iii |
| Bac blanc 02 . . . . . | 1   |

 4 exercices entièrement corrigés



# AVANT—PROPOS

Ce livre s'adresse aux élèves de Terminale qui suivent l'enseignement de spécialité « Mathématiques ». Les parents et les enseignants y trouveront également matière à accompagner ou approfondir les notions abordées. Il est conforme au programme officiel de l'Éducation Nationale française en vigueur.

Cette édition est une version revue, corrigée et enrichie de la précédente. Pour chaque chapitre, vous trouverez :

- un cours complet réunissant les outils mathématiques nécessaires à la compréhension de la notion abordée ;
- des exercices types, destinés à illustrer les notions fondamentales à maîtriser ;
- les énoncés des exercices ;
- leurs corrigés détaillés.

Chaque exercice est accompagné d'une indication de difficulté :

- ★ exercice accessible ;
- ★★ exercice de niveau intermédiaire ;
- ★★★ exercice nécessitant un raisonnement plus approfondi.

Un pictogramme  cliquable accompagne chaque énoncé : il vous redirige vers une page de mon site internet où vous pouvez signaler une erreur ou laisser un commentaire.

À la fin de chaque énoncé figure le numéro de la page du corrigé correspondant, sur lequel vous pouvez cliquer pour y accéder directement.

Chaque chapitre se clôt par une section « **Objectif bac** » composée d'extraits de sujets d'examens des années précédentes. Ces exercices permettront aux élèves de s'évaluer sur les notions du chapitre, à un niveau représentatif de celui attendu lors de l'épreuve finale.

En fin de volume, vous trouverez un sujet de bac entièrement inédit, de ma composition. Son niveau est volontairement légèrement supérieur à celui de l'examen, à l'image d'un bac blanc tel qu'on peut en proposer en cours d'année.

Je vous remercie de la confiance que vous accordez à ce livre. Il est le fruit d'un travail long et minutieux ; aussi je vous serais reconnaissant de le partager avec respect : ce livre est à usage strictement personnel et sa reproduction ou sa revente, sous quelque forme que ce soit, est formellement interdite.

L'auteur,  
Stéphane Pasquet





## Exercice 1.1 (5 points)

Une population de bactéries évolue de la manière suivante : à chaque génération, chaque bactérie se divise, mais une partie meurt à cause d'un antibiotique.



On désigne par  $u_n$  le nombre de bactéries (en millier) dans la population au bout de  $n$  heures, et on modélise cette suite à l'aide de la relation de récurrence suivante :

$$u_{n+1} = \frac{4u_n - 1}{2u_n + 1}.$$

On considère qu'au début, il y a 2 000 bactéries. Donc,  $u_0 = 2$ .

- 1 Calculer  $u_1$  et  $u_2$ .
- 2 Montrer que pour tout entier naturel  $n$ ,

$$u_{n+1} = 2 - \frac{3}{2u_n + 1}.$$

- 3 À l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer que pour tout entier naturel  $n$ ,

$$1 \leq u_{n+1} < u_n \leq 2.$$

- 4 En déduire que la suite  $(u_n)$  converge.

- 5 Pour tout entier naturel  $n$ , on pose :

$$v_n = \frac{u_n - 1}{u_n - 0,5}.$$

- a. Montrer que  $(v_n)$  est une suite géométrique. On précisera alors sa raison et son premier terme.
- b. En déduire une expression de  $v_n$ , puis de  $u_n$ , en fonction de  $n$ .
- c. Déterminer alors la limite de la suite  $(u_n)$ .  
Interpréter dans le contexte de l'exercice.

*Solution page 5*

## Exercice 1.2 (5 points)

Une serre agricole est hermétiquement fermée pendant la nuit. Le matin, à  $t = 0$ , on active le système de ventilation. Un capteur mesure la concentration en  $\text{CO}_2$  dans l'air brassé.

On modélise la concentration en  $\text{CO}_2$  (en grammes par mètre cube) au bout de  $t$  heures par la fonction  $f$  définie sur  $[0; 5]$  par :

$$f(t) = 6te^{-t}.$$



1 Calculer  $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)$  et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

2 Montrer que, pour tout réel  $t \in [0; 5]$  :

$$f'(t) = 6(1 - t)e^{-t}.$$

3 Dresser alors le tableau de variations de  $f$  sur  $[0; 5]$ .

4 Déterminer la concentration maximale en  $\text{CO}_2$  atteinte dans la serre.

On donnera une valeur exacte puis une valeur approchée à  $10^{-2}$  près.

5 On admet que la dérivée seconde de  $f(t)$  est  $f''(t) = 6(t - 2)e^{-t}$ .

Étudier la convexité de  $f$  sur  $[0; 5]$ .

On précisera, s'il y a lieu, les coordonnées du point d'inflexion de la courbe représentative de  $f$ , en interprétant ce point d'inflexion dans le contexte de l'exercice.

6 a. En utilisant une intégration par parties, calculer :

$$\int_0^5 f(x) \, dx.$$

b. En déduire la concentration moyenne  $\mu$  en  $\text{CO}_2$  à laquelle les plantes sont exposées durant les 5 heures de ventilation.

On donnera une valeur approchée à  $10^{-2}$  près.

7 a. Compléter le programme (écrit en Python) suivant afin qu'il retourne le temps qui s'est écoulé avant que la concentration de  $\text{CO}_2$  redevienne inférieure à 50 % de la concentration maximale.

### Code Python 1-1

```
1 # on importe la fonction exponentielle
2 from math import exp
3
4 Cmax = 6 * exp(-1)
5 t = 1
6 C = ...
7
8 while C ...:
9     t = t + 0.01
10    C = ...
11
12 print(t)
```

b. Ce programme affiche la valeur : « 2.68 ».

Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

*Solution page 7*

## Exercice 1.3 (5 points)

Une entreprise de cybersécurité étudie la robustesse des mots de passe utilisés par ses employés.  
Les mots de passe sont composés à partir des dix chiffres  $\{0, 1, 2, \dots, 9\}$ .  
Un mot de passe est dit **fort** s'il contient au moins un chiffre parmi  $\{8, 9\}$ .



### Partie A : dénombrement

Dans cette partie, on s'intéresse aux différentes façons de constituer des codes d'accès ou des mots de passe.

- 1 Un mot de passe est une suite ordonnée de 6 chiffres, les répétitions étant autorisées.  
Combien de mots de passe différents peut-on former ?
- 2 Un code d'accès temporaire est une suite ordonnée de 6 chiffres tous distincts.  
Combien de codes d'accès différents peut-on former ?
- 3 Un administrateur doit créer un code de validation en plaçant dans un ordre aléatoire les chiffres 1, 2, 3 et 4, chacun utilisé exactement une fois.  
Combien de codes de validation différents sont possibles ?
- 4 Pour tester le nouveau système de sécurité, l'entreprise demande à 10 de ses 50 salariés de l'utiliser afin de voir leurs réactions.  
Combien de groupes différents peut-on former ?

### Partie B : probabilités

Dans cette partie, on arrondira les probabilités à  $10^{-4}$  près si besoin.

Un employé crée un mot de passe en choisissant aléatoirement et de façon indépendante 8 chiffres parmi  $\{0, 1, \dots, 9\}$ , les répétitions étant autorisées.

On note  $X$  la variable aléatoire égale au nombre de chiffres parmi  $\{8, 9\}$  dans ce mot de passe.

- 1 Justifier que  $X$  suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
- 2 Calculer  $P(X = 0)$  et interpréter ce résultat.
- 3 Donner la formule qui permet de calculer  $P(X = 1)$ , puis en déterminer sa valeur.
- 4 En déduire  $P(X \geq 2)$  et interpréter dans le contexte de l'exercice.
- 5 Calculer l'espérance  $\mathbb{E}(X)$  et la variance  $\mathbb{V}(X)$ . Interpréter  $\mathbb{E}(X)$ .

### Partie C : concentration

Un auditeur en sécurité analyse  $n$  mots de passe d'employés, choisis indépendamment.

On suppose que chaque mot de passe a une probabilité  $p = 0,2$  d'être fort.

On note :

- $X_i$  la variable aléatoire qui vaut 1 si le  $i$ -ème mot de passe est fort, et 0 sinon, pour tout entier  $i$  tel que  $1 \leq i \leq n$  ;
- $F_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$  la proportion de mots de passe forts parmi les  $n$  analysés.

- 1 Exprimer  $\mathbb{E}(F_n)$  en fonction de  $n$  et justifier que  $\mathbb{V}(F_n) = \frac{0,16}{n}$ .
- 2 En déduire, à l'aide du théorème de Bienaymé-Tchebychev, une majoration de  $P(|F_n - 0,2| \geq 0,1)$  en fonction de  $n$ .
- 3 Déterminer le nombre minimal de mots de passe  $n$  que l'auditeur doit analyser pour garantir que :

$$P(|F_n - 0,2| \geq 0,1) \leq 0,01.$$

Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Solution page 8

## Exercice 1.4 (5 points)

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse.  
Justifier chaque réponse. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.



L'espace est rapporté à un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

On considère le tétraèdre  $ABCD$  de sommets :

$$A(0; 0; 0), \quad B(6; 0; 0), \quad C(0; 6; 0), \quad D(0; 0; 6).$$

On considère de plus le point  $H(8; 8; 8)$ .

**1 Affirmation 1 :** le plan  $(BCD)$  a pour équation cartésienne  $x + y + z = 3$ .

**2 Affirmation 2 :** une représentation paramétrique de la droite  $(AD)$  est :

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 6t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

**3 Affirmation 3 :** la droite  $(AH)$  coupe le plan  $(BCD)$  au point  $G(2; 2; 2)$ .

**4 Affirmation 4 :** les droites  $(AB)$  et  $(CD)$  sont sécantes.

**5 Affirmation 5 :** la distance du point  $A$  au plan  $(BCD)$  est égale à  $2\sqrt{3}$ .

*Solution page 10*



# Corrigés

## Corrigé de l'exercice 1.1 page 1

1 Calcul de  $u_1$  et  $u_2$ .

$$\begin{aligned} \bullet u_1 &= \frac{4 \times 2 - 1}{2 \times 2 + 1} = \frac{7}{5}. \\ \bullet u_2 &= \frac{4 \times \frac{7}{5} - 1}{2 \times \frac{7}{5} + 1} = \frac{\frac{28}{5} - 1}{\frac{14}{5} + 1} = \frac{\frac{23}{5}}{\frac{19}{5}} = \frac{23}{19}. \end{aligned}$$

2 Pour tout entier naturel  $n$ ,

$$4u_n - 1 = 2(2u_n + 1) - 3,$$

donc :

$$u_{n+1} = \frac{4u_n - 1}{2u_n + 1} = \frac{2(2u_n + 1) - 3}{2u_n + 1} = 2 - \frac{3}{2u_n + 1}.$$

3 Montrons par récurrence la propriété  $\mathcal{P}(n)$  : «  $1 \leq u_{n+1} < u_n \leq 2$  ».

• **Initialisation.**

Pour  $n = 0$  :  $u_0 = 2$  et  $u_1 = \frac{7}{5}$ . On a bien  $1 \leq \frac{7}{5} < 2 \leq 2$ .  $\mathcal{P}(0)$  est vraie.

• **Hérédité.**

Supposons que  $1 \leq u_{k+1} < u_k \leq 2$  pour un certain entier  $k \geq 0$ .

Montrons que  $1 \leq u_{k+2} < u_{k+1} \leq 2$ .

$$\text{D'après la question 2, } u_{k+2} = 2 - \frac{3}{2u_{k+1} + 1}.$$

Par hypothèse de récurrence,

$$\begin{aligned} 1 \leq u_{k+1} < u_k \leq 2 &\implies 2 \leq 2u_{k+1} < 2u_k < 4 \\ &\implies 3 \leq 2u_{k+1} + 1 < 2u_k + 1 \leq 5 \\ &\implies 1 \geq \frac{3}{2u_{k+1} + 1} > \frac{3}{2u_k + 1} \geq \frac{3}{5} \\ &\implies -1 \leq -\frac{3}{2u_{k+1} + 1} < -\frac{3}{2u_k + 1} \leq -\frac{3}{5} \\ &\implies 1 \leq 2 - \frac{3}{2u_{k+1} + 1} < 2 - \frac{3}{2u_k + 1} \leq \frac{7}{5} \\ &\implies 1 \leq u_{k+2} < u_{k+1} \leq 2 \end{aligned}$$

• **Conclusion.**

$\mathcal{P}(0)$  est vraie et, pour un entier  $k \geq 0$ ,  $\mathcal{P}(k) \Rightarrow \mathcal{P}(k+1)$  donc, d'après le principe de récurrence,  $\mathcal{P}(n)$  est vraie pour tout entier naturel  $n$ .

4 La suite  $(u_n)$  est décroissante et minorée (d'après la question précédente). Donc, d'après le théorème de convergence des suites monotones,  $(u_n)$  converge vers une limite  $\ell \geq 1$ .

5 On pose  $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n - \frac{1}{2}}$  pour tout entier naturel  $n$ .

a. Calculons  $v_{n+1}$  :

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{4u_n - 1}{2u_n + 1} - 1}{\frac{4u_n - 1}{2u_n + 1} - \frac{1}{2}}.$$

Numérateur :

$$\frac{4u_n - 1}{2u_n + 1} - 1 = \frac{4u_n - 1 - (2u_n + 1)}{2u_n + 1} = \frac{2u_n - 2}{2u_n + 1} = \frac{2(u_n - 1)}{2u_n + 1}.$$

Dénominateur :

$$\frac{4u_n - 1}{2u_n + 1} - \frac{1}{2} = \frac{2(4u_n - 1) - (2u_n + 1)}{2(2u_n + 1)} = \frac{6u_n - 3}{2(2u_n + 1)} = \frac{3(2u_n - 1)}{2(2u_n + 1)}.$$

Donc :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{2(u_n - 1)}{\cancel{2u_n + 1}} \times \frac{\cancel{2(2u_n + 1)}}{3(2u_n - 1)} \\ &= \frac{2 \times 2(u_n - 1)}{3(2u_n - 1)} \\ &= \frac{2}{3} \times \frac{2(u_n - 1)}{2(u_n - \frac{1}{2})} \\ &= \frac{2}{3} \times \frac{u_n - 1}{u_n - \frac{1}{2}} \\ &= \frac{2}{3} v_n. \end{aligned}$$

La suite  $(v_n)$  est donc une suite géométrique de raison  $q = \frac{2}{3}$ .

Son premier terme est :

$$v_0 = \frac{u_0 - 1}{u_0 - \frac{1}{2}} = \frac{2 - 1}{2 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}.$$

b.  $(v_n)$  est géométrique de raison  $\frac{2}{3}$  et de premier terme  $v_0 = \frac{2}{3}$ , donc :

$$v_n = \frac{2}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}.$$

On a :

$$\begin{aligned} v_n = \frac{u_n - 1}{u_n - \frac{1}{2}} &\iff v_n \left(u_n - \frac{1}{2}\right) = u_n - 1 \\ &\iff u_n v_n - \frac{1}{2} v_n = u_n - 1 \\ &\iff u_n v_n - u_n = \frac{1}{2} v_n - 1 \\ &\iff u_n (v_n - 1) = \frac{1}{2} v_n - 1 \\ &\iff u_n = \frac{\frac{1}{2} v_n - 1}{v_n - 1} \\ &\iff u_n = \frac{v_n - 2}{2(v_n - 1)}. \end{aligned}$$

En substituant  $v_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$ , on a :

$$u_n = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} - 2}{2\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} - 1\right)}.$$

c.  $0 < \frac{2}{3} < 1$ , donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$ . Ainsi,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = \frac{0 - 2}{2(0 - 1)} = \frac{-2}{-2} = 1$ .

Interprétation : la population de bactéries tend vers 1 (millier), soit 1 000 bactéries. L'antibiotique ne détruit pas complètement la colonie, mais régule sa taille vers un seuil d'équilibre de 1 000 bactéries.

## Corrigé de l'exercice 1.2 page 2

- 1 On sait que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} (te^{-t}) = 0$  (croissances comparées), donc :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 6 \times 0 = 0.$$

*Interprétation* : à long terme, la concentration en  $\text{CO}_2$  tend vers 0. La ventilation finit par évacuer complètement le dioxyde de carbone accumulé dans la serre.

- 2 La fonction  $f$  est le produit de  $u(t) = 6t$  et  $v(t) = e^{-t}$ , avec  $u'(t) = 6$  et  $v'(t) = -e^{-t}$ . Ainsi,

$$\begin{aligned} f'(t) &= u'(t)v(t) + u(t)v'(t) \\ &= 6e^{-t} + 6t \times (-e^{-t}) \\ &= 6e^{-t}(1 - t) \end{aligned}$$

$$\boxed{f'(t) = 6(1 - t)e^{-t}}$$

- 3  $e^{-t} > 0$  pour tout  $t$ , le signe de  $f'(t)$  est donc celui de  $(1 - t)$ . D'où le tableau suivant :

|         |   |            |   |           |            |            |
|---------|---|------------|---|-----------|------------|------------|
| $x$     | 0 | 1          | 5 |           |            |            |
| $f'(x)$ |   | +          | 0 | −         |            |            |
| $f(x)$  | 0 | $\nearrow$ |   | $6e^{-1}$ | $\searrow$ | $30e^{-5}$ |

On calcule les valeurs aux bornes et au maximum :

$$f(0) = 0, \quad f(1) = 6e^{-1}, \quad f(5) = 30e^{-5}.$$

- 4 D'après le tableau de variations,  $f$  atteint son maximum en  $t = 1$  :

$$f(1) = 6e^{-1} \approx 2,21 \text{ g/m}^3.$$

La concentration maximale en  $\text{CO}_2$  dans la serre est d'environ **2,21 g/m<sup>3</sup>**, atteinte 1 heure après l'activation de la ventilation.

- 5 Pour tout réel  $t$ ,  $e^{-t} > 0$  donc le signe de  $f''(t)$  est celui de  $(t - 2)$  :

- $f''(t) < 0$  pour  $t \in [0; 2[$  : la fonction est **concave**.
- $f''(t) > 0$  pour  $t \in ]2; 5]$  : la fonction est **convexe**.
- $f''(t) = 0$  pour  $t = 2$ .

$f''$  s'annule en changeant de signe en  $t = 2$ , donc la courbe représentative de  $f$  admet un point d'inflexion en  $t = 2$ .

Ses coordonnées sont :

$$(2; f(2)) = (2; 12e^{-2}).$$

*Interprétation* : en  $t = 2$ , soit 2 heures après l'activation de la ventilation, la concentration décroît le plus rapidement. C'est le moment où le système de ventilation est le plus efficace pour évacuer le  $\text{CO}_2$ .

- 6 a. On pose :

$$u(t) = 6t \quad \text{et} \quad v'(t) = e^{-t},$$

d'où :

$$u'(t) = 6 \quad \text{et} \quad v(t) = -e^{-t}.$$

Par intégration par parties :

$$\int_0^5 6te^{-t} dt = \left[ -6te^{-t} \right]_0^5 - \int_0^5 6 \times (-e^{-t}) dt = \left[ -6te^{-t} \right]_0^5 + \int_0^5 6e^{-t} dt.$$

On calcule chaque terme :

$$\begin{aligned} \left[ -6te^{-t} \right]_0^5 &= -30e^{-5} - 0 = -30e^{-5}, \\ \int_0^5 6e^{-t} dt &= \left[ -6e^{-t} \right]_0^5 = -6e^{-5} + 6. \end{aligned}$$

Donc :

$$\int_0^5 f(t) dt = -30e^{-5} + (-6e^{-5} + 6) = 6 - 36e^{-5}.$$

b. La concentration moyenne sur  $[0; 5]$  est :

$$\mu = \frac{1}{5} \int_0^5 f(t) dt = \frac{6 - 36e^{-5}}{5} \approx \frac{5,76}{5} \approx 1,15 \text{ g/m}^3.$$

*Interprétation* : durant les 5 heures de ventilation, les plantes sont exposées en moyenne à une concentration de  $\text{CO}_2$  d'environ  $1,15 \text{ g/m}^3$ .

**7** a. On cherche le premier instant  $t > 1$  (après le maximum) où  $f(t) < 0,5 \times C_{\max} = \frac{3}{e}$ .

Le programme dûment complété est le suivant :

| Code Python 1-3 |                      |
|-----------------|----------------------|
| 1               | from math import exp |
| 2               |                      |
| 3               | Cmax = 6 * exp(-1)   |
| 4               | t = 1                |
| 5               | C = 6*t*exp(-t)      |
| 6               |                      |
| 7               | while C >= 0.5*Cmax: |
| 8               | t = t + 0.01         |
| 9               | C = 6*t*exp(-t)      |
| 10              |                      |
| 11              | print(t)             |

b. Le programme affiche  $2,68 = 2 \text{ h} + 0,68 \times 60 \text{ min} \approx 2 \text{ h } 41 \text{ min}$ .

*Interprétation* : environ 2 heures 41 minutes après le début de la ventilation, la concentration en  $\text{CO}_2$  est redescendue à la moitié de sa valeur maximale.

## Corrigé de l'exercice 1.3 page 3

### Partie A : dénombrement

- 1** Un mot de passe est ici un 6-uplet d'un ensemble à 36 éléments. En effet, chacun des 36 caractères peut être choisi pour les 6 qui composent le mot de passe.  
Il y a donc  $36^6$  mots de passe possibles.
- 2** Un code d'accès temporaire est ici un arrangement de 6 caractères dans un ensemble à 36 éléments.  
Il y a donc  $A_{36}^6 = 36 \times 35 \times \cdots \times 31 = 1\,402\,410\,240$  codes d'accès.
- 3** Un code de validation est ici une permutation de l'ensemble  $\{1,2,3,4\}$ .  
Il y a donc  $4! = 24$  codes de validation différents possibles.
- 4** Un groupe de 10 personnes prises parmi 50 est une combinaison (l'ordre ne compte pas dans un tel groupe).  
Il y a donc  $\binom{50}{10} = 10\,272\,278\,170$  groupes différents possibles.

## Partie B : probabilités

- 1 On répète 8 fois de façon indépendante l'expérience consistant à regarder si un chiffre du mot de passe est dans l'ensemble  $\{8,9\}$ , épreuve de Bernoulli de probabilité  $\frac{2}{10} = 0,2$ .

Ainsi, le nombre  $X$  de succès à l'issue de ces 8 successions d'épreuves est une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres  $n = 8$  et  $p = 0,2$ .

- 2  $P(X = 0)$  est la probabilité qu'il n'y ait aucun chiffre de l'ensemble  $\{8,9\}$ .

Ainsi,

$$P(X = 0) = (1 - p)^8 = 0,8^8 \approx 0,167\,8$$

- 3 La formule de Bernoulli nous permet de calculer :

$$\begin{aligned} P(X = 1) &= \binom{8}{1} \times p^1 \times (1 - p)^{8-1} \\ &= 8 \times 0,2 \times 0,8^7 \end{aligned}$$

$$P(X = 1) \approx 0,335\,5$$

- 4 La mention « en déduire » nous incite à ne pas utiliser la calculatrice directement pour calculer cette probabilité.

$$\begin{aligned} P(X \geq 2) &= 1 - P(X \leq 1) \\ &= 1 - P(X = 0) - P(X = 1) \\ &\approx 1 - 0,167\,8 - 0,335\,5 \end{aligned}$$

$$P(X \geq 2) \approx 0,496\,7$$

- 5  $X$  suit la loi binomiale  $\mathcal{B}(8; 0,2)$  donc son espérance est :

$$\mathbb{E}(X) = n \times p = 8 \times 0,2 \iff \mathbb{E}(X) = 1,6$$

et sa variance est :

$$\mathbb{V}(X) = n \times p \times (1 - p) = 8 \times 0,2 \times 0,8 \iff \mathbb{V}(X) = 1,28$$

Il y a donc en moyenne 1,6 chiffre qui sont soit 8, soit 9 dans un mot de passe.

## Partie C : concentration

- 1 L'espérance de  $F_n$  est :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(F_n) &= \mathbb{E}\left(\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n} \mathbb{E}(X_1 + \dots + X_n) \\ &= \frac{1}{n} \times n \mathbb{E}(X_1) \text{ par linéarité de l'espérance} \\ &= \mathbb{E}(X_1) \end{aligned}$$

$$\mathbb{E}(F_n) = 0,2$$

Sa variance est alors :

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(F_n) &= \frac{1}{n^2} \mathbb{V}(X_1 + \dots + X_n) \\ &= \frac{1}{n^2} \times n \mathbb{V}(X_1) \text{ car les } X_i \text{ sont indépendantes} \\ &= \frac{\mathbb{V}(X_1)}{n} \\ &= \frac{0,2 \times 0,8}{n} \end{aligned}$$

$$\mathbb{V}(F_n) = \frac{0,16}{n}$$

- 2** Le théorème de Bienaymé-Tchebychev stipule que :

$$\forall \delta > 0, P(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \delta) \leq \frac{\mathbb{V}(X)}{\delta^2}.$$

En prenant  $X = F_n$  et  $\delta = 0,1$ , cela donne :

$$P(|F_n - 0,2| \geq 0,1) \leq \frac{0,16}{n \times 0,1^2}$$

soit :

$$P(|F_n - 0,2| \geq 0,1) \leq \frac{16}{n}$$

- 3** Pour garantir que  $P(|F_n - 0,2| \geq 0,1) \leq 0,01$ , il suffit de choisir  $n$  tel que :

$$\begin{aligned} \frac{16}{n} \leq 10^{-2} &\iff \frac{n}{16} \geq 10^2 \\ &\iff n \geq 100 \times 16 \\ &\iff \boxed{n \geq 1\,600} \end{aligned}$$

Ainsi, en analysant au moins 1 600 mots de passe, l'auditeur peut affirmer avec une probabilité supérieure ou égale à 0,99 que la proportion observée de mots de passe forts est comprise entre 0,1 et 0,3.

#### Corrigé de l'exercice 1.4 page 4

- 1** Il suffit de voir si les coordonnées des points  $B$ ,  $C$  et  $D$  vérifient l'équation donnée. On voit assez rapidement que :

$$x_B + y_B + z_B = 6 \neq 3.$$

$B$  n'appartient donc pas au plan d'équation  $x + y + z = 3$ .

L'affirmation 1 est donc fausse.

- 2** La droite  $(AD)$  passe par  $A(0; 0; 0)$  et admet pour vecteur directeur  $\overrightarrow{AD} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$ . La représentation paramétrique donnée est donc bien une représentation de  $(AD)$

L'affirmation 2 est donc vraie.

- 3**  $x_G + y_G + z_G = 2 + 2 + 2 = 6$  donc  $G \in (BCD)$ .

De plus, de manière immédiate, une représentation paramétrique de la droite  $(AH)$  est :

$$\begin{cases} x = k \\ y = k \\ z = k \end{cases}, k \in \mathbb{R}.$$

Donc  $G \in (AH)$ .

$G$  est donc l'intersection de la droite  $(AH)$  et du plan  $(BCD)$

L'affirmation 3 est donc vraie.

- 4 On détermine des représentations paramétriques des droites  $(AB)$  et  $(CD)$ .

**Droite  $(AB)$**  : passe par  $A(0; 0; 0)$ , direction  $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  :

$$\begin{cases} x = 6s \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}, \quad s \in \mathbb{R}.$$

**Droite  $(CD)$**  : passe par  $C(0; 6; 0)$ , direction  $\overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix}$  :

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 6 - 6t \\ z = 6t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Les vecteurs directeurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{CD}$  ne sont pas colinéaires, donc les droites ne sont pas parallèles. Si elles étaient sécantes, il existerait  $(s, t) \in \mathbb{R}^2$  vérifiant :

$$\begin{cases} (i) & 6s = 0 \\ (ii) & 0 = 6 - 6t \\ (iii) & 0 = 6t \end{cases}$$

De  $(i)$  :  $s = 0$ .

De  $(ii)$  :  $t = 1$ .

De  $(iii)$  :  $t = 0$ .

Les équations  $(ii)$  et  $(iii)$  sont incompatibles : le système n'a pas de solution.

Les droites  $(AB)$  et  $(CD)$  ne sont ni parallèles ni sécantes.

L'affirmation 4 est donc fausse.

- 5 Le plan  $(BCD)$  a pour équation  $x + y + z = 6$ , soit  $x + y + z - 6 = 0$ .

La distance d'un point  $P(x_0; y_0; z_0)$  à un plan  $ax + by + cz + d = 0$  est :

$$\delta = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Avec  $A(0; 0; 0)$ ,  $a = b = c = 1$  et  $d = -6$  :

$$\delta = \frac{|1 \times 0 + 1 \times 0 + 1 \times 0 - 6|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{6}{\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}.$$

L'affirmation 5 est donc vraie.